

Матрица $P_r(t)$ в (11) является трёхдиагональной.

Установлено, что замена

$$Y = \left(\sum_{r=0}^{\infty} P_r(t) \varepsilon^r \right) Z$$

переводит уравнение (3) в дифференциальное уравнение

$$\varepsilon^h Z' = \left(\sum_{r=0}^{\infty} B_r(t) \varepsilon^r \right) Z.$$

Матрица $B_r(t)$ этой системы имеет блочно-диагональный вид (12).

Таким образом, исходная система, состоящая из n уравнений, может быть расщеплена на три подсистемы меньших порядков: k , l , m .

Аналогичные преобразования могут быть проведены и на промежутке $[t_0 + \delta, b]$.

При достаточно малом δ решения исследуемой системы можно заменить их линейными комбинациями.

4. Заключение

Научная новизна состоит в следующем. Рассмотрен процесс формирования активной смеси, в которой происходит образование порошковой массы. Описан случай, когда смесь из объёма V_i перемещается в граничащие с V_i объёмы и в объёмы, с которыми V_i напрямую не граничит.

Проведен сравнительный анализ порошковых масс, которые были получены под воздействием различных возмущений.

Описана система дифференциальных уравнений, описывающих процесс формирования смеси. Установлено, что её можно расщепить на системы меньших порядков.

Практическая ценность работы заключается в том, что полученные результаты позволяют производить общий анализ процессов, происходящих при формировании порошковых масс. Это даёт возможность предсказать эволюцию таких процессов при условии, что их основные характеристики известны.

Литература: 1. Гора Н.Н. Уравнения процесса формирования многокомпонентных смесей // АСУ и приборы автоматики. 2006. Вып. 133. 2. Грановский М.Г., Лавров И.С., Смирнов О.В. Электрообработка жидкостей. Л.: Химия. 1976. 216с. 3. Ходаков Г.С. Физика измельчения. М.: Наука, 1972. 307с. 4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 5. Sibuya Y. Sur un systeme des equations differentielles ordinaires lineaires a coefficients periodiques et contenant des parameters, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, (1), 7 (1954). P. 229-2414. 6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Т.6: Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736с.

Поступила в редколлегию 04.04.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Вовк Александр Владимирович, стажёр-исследователь кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61100, Харьков, пр. Маршала Жукова, 45, кв. 16, тел. 716-16-88.

УДК 004.942:621.6:622.691

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ В ЛИНЕЙНЫХ УЧАСТКАХ МАГИСТРАЛЬНЫХ ГАЗОПРОВОДОВ

ТЕВЯШЕВ А.Д., ГУСАРОВА И.Г., КАМИНСКАЯ А.В.

Проводится сравнительный анализ двух конечно-разностных схем аппроксимации математической модели для моделирования нестационарных неизотермических режимов транспорта природного газа в многониточных линейных участках магистральных газопроводов. Результаты моделирования позволяют выбрать схему, отвечающую требованиям как по точности получаемых решений, так и по затратам машинного времени их получения.

1. Введение

Современные методы исследования, проектирования и создания сложных систем неразрывно связаны с разработкой, реализацией на ПЭВМ и изучением их моделей. Исследование динамических свойств и характеристик таких систем часто проводится на их моделях, представленных системами дифференциаль-

ных уравнений в частных производных, в общем случае нелинейных. Лишь для сравнительно немногих систем дифференциальных уравнений решения могут быть найдены аналитически. В тех же случаях, когда аналитическое решение не может быть найдено, на помощь приходят приближенные численные методы. Существует достаточно большое количество методов численного решения систем дифференциальных уравнений в частных производных, разной степени сложности и разной степени точности. Наиболее эффективными являются численные методы интегрирования таких систем, основанные на применении неявных конечно-разностных схем, позволяющих проводить расчеты с крупными шагами как по временной, так и по пространственной переменным разностной сетки.

Однако не вызывает никаких сомнений, что разные задачи предъявляют разные требования к сеткам. Но лишь в отдельных случаях эти требования удается четко сформулировать. В остальных же случаях приходится сравнивать сетки на тестах. Зачастую удачный выбор параметров сетки повышает точность не менее, чем усовершенствование разностной схемы.

Поэтому необходимость выбора оптимальной разностной схемы стимулируется, с одной стороны, возрастающими требованиями к точности численных расчетов, а с другой – необходимостью проведения расчетов за приемлемое время.

Необходимость проведения серийных расчетов диктует высокие требования к быстродействию алгоритмов и экономичному расходованию памяти ПЭВМ. Все эти требования определяют цель работы – выбор абсолютно устойчивых, экономичных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для моделирования нестационарных неизотермических режимов транспорта природного газа (ННРТГ).

Проведем сравнительный анализ двух неявных конечно-разностных схем при моделировании нестационарных неизотермических режимов транспорта природного газа в многониточных линейных участках (ЛУ) магистральных газопроводов (МГ). Первая определена на четырехточечном шаблоне с разностным оператором второго порядка аппроксимации по пространственной переменной и первым порядком – по временной переменной, а вторая – на пятиточечном шаблоне с разностными операторами второго порядка аппроксимации по пространственной и временной переменным. Сформулируем задачи расчета ННРТГ по ЛУ МГ и приведем алгоритмы их решений. Осуществим программную реализацию рассмотренных алгоритмов по двум выбранным схемам. Для выбора оптимальной конечно-разностной схемы проведем тестирование программы как на участке трубопровода, так и на ЛУ многониточного МГ.

Для этого нужно решить следующие задачи: разработка алгоритма расчета ННРТГ по многониточным ЛУ МГ на основе математической модели и проведение сравнительного анализа выбранных конечно-разностных схем с помощью разработанного программного продукта.

2. Математическая модель нестационарных неизотермических режимов транспорта газа по участку трубопровода

Математическая модель нестационарных неизотермических режимов транспорта газа по участку трубопровода (УТ) магистрального газопровода рассмотрена в [1]. В настоящей статье приведена модель для УТ без промежуточных выкладок.

Математическая модель, описывающая режимы транспорта газа по УТ, представляется квазилинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных, полученной из общих законов механики сплошной среды – законы сохранения: количества движения, неразрывности потока, энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + (1 - \alpha ST) \frac{W^2}{P^2} \frac{\partial P}{\partial x} + 2\alpha ST \frac{W}{P} \frac{\partial W}{\partial x} + \\ + \beta ST \frac{W|W|}{P} + \frac{g}{\alpha S} \frac{P}{T} \frac{dh}{dx} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \alpha ST \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha \gamma ST \frac{W}{P} \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha S(\gamma - 1) \frac{T^2}{P} \frac{\partial W}{\partial x} + \\ + \frac{4K}{D} (\gamma - 1) \frac{T}{P} (T - T_{гр}) + g(\gamma - 1) \frac{WT}{P} \frac{dh}{dx} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha = \frac{z g R}{S}$, $\beta = \frac{\lambda \alpha}{2D}$, $\gamma = \frac{C_p}{C_p - z g R}$, S – площадь поперечного сечения трубы, m^2 ; C_p – удельная теплоемкость газа, Дж/кг·К; z – коэффициент сжимаемости газа; R – газовая постоянная; $W(x, t)$ $T(x, t)$, $P(x, t)$ –

удельный массовый расход, кг/($m^2 c$); температура, К; давление (Па) газа, t , x – временная и пространственная переменные, l – коэффициент гидравлического сопротивления, D – диаметр трубы, м; K – коэффициент теплопередачи от трубы к грунту, Вт/ $m^2 \cdot K$; $T_{гр}$ – температура грунта, К; h – глубина залегания трубы, м; g – ускорение свободного падения, m/c^2 .

Модель структуры многониточного ЛУ МГ представляется ориентированным графом $G(V, M)$, где V – множество узлов графа, M – множество дуг графа соответствующего УТ. Множество узлов $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, где $|V| = v$, $|V_1| = v_1$ – количество входов ЛУ МГ; $|V_2| = v_2$ – количество промежуточных узлов; $|V_3| = v_3$ – количество выходов ЛУ МГ.

Систему уравнений (1) - (3) для j -го УТ запишем в матричной форме:

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + B \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = \Phi_j, \quad j \in M, \quad (4)$$

$$\text{где } B_j = \begin{bmatrix} 2\alpha T_j S_j \frac{W_j}{P_j} & 1 - \alpha T_j S_j \frac{W_j^2}{P_j^2} & 0 \\ \alpha T_j S_j & 0 & 0 \\ \alpha(\gamma - 1) S_j \frac{T_j^2}{P_j} & 0 & \alpha \gamma T_j S_j \frac{W_j}{P_j} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} -\beta T_j S_j \frac{W_j |W_j|}{P_j} - \frac{g}{\alpha} \frac{P_j}{T_j S_j} \frac{dh}{dx} \\ 0 \\ -\frac{4K}{D_j} (\gamma - 1) \frac{T_j}{P_j} (T - T_{гр}) - g(\gamma - 1) \frac{T_j W_j}{P_j} \frac{dh}{dx} \end{bmatrix},$$

$$\varphi_j = (W_j, P_j, T_j).$$

Для того чтобы система уравнений (4) была разрешимой, необходимо задать граничные условия для узлов, соответствующих входам и выходам ЛУ МГ.

Рассматриваются граничные узлы 1-го и 2-го типов. Для узлов 1-го типа задано давление, как функция времени, для узлов 2-го типа задан расход, как функция времени.

Граничные условия для m -го выходного и входного узлов имеют вид:

$$G_v^m(t) = G^m(t) \quad (\text{узел II типа})$$

или $P_{v3}^m(t) = P^m(t)$ (узел I типа), кроме того, на входах задана температура поступающего газа $T_v^m(t) = T^m(t)$.

Условия согласования параметров газового потока для m -го промежуточного узла принимают следующий вид:

для расходов:

$$\sum_{j \in V_m^+} G_j(x^{++}, t) = \sum_{i \in V_m^-} G_i(x^+, t), \quad m \in V_2, \quad (5)$$

для давлений:

$$P_j(x^{++}, t) = P_i(x^+, t), \quad j \in V_m^+, i \in V_m^-, \quad (6)$$

для температур:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V_m^+} ((G_j(x^{++}, t))^+ \cdot T_j(x^{++}, t)) + \sum_{i \in V_m^-} ((G_i(x^+, t))^- \cdot T_i(x^+, t)) = \\ = T_{cp}^m \cdot \left(\sum_{j \in V_m^+} ((G_j(x^{++}, t))^+ + \sum_{i \in V_m^-} (G_i(x^+, t))^-) \right), \quad (7) \end{aligned}$$

кроме того,

если $G_j(x^{++}, t) < 0$, то $T_j^m(x^{++}, t) = T_{cp}^m(t)$, $j \in V_m^+$,

если $G_i(x^+, t) > 0$, то $T_i^m(x^+, t) = T_{cp}^m(t)$, $i \in V_m^-$,

где $(a)^+ = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ 0, a < 0 \end{cases}$, $(a)^- = \begin{cases} -a, a < 0 \\ 0, a \geq 0 \end{cases}$, x^+ , x^{++} – начальная и конечная координата соответствующего участка;

V – множество узлов сети; V_m^+ , V_m^- – множество индексов дуг, входящих и выходящих из m -го узла сети; $G(x, t)$, $T(x, t)$, $P(x, t)$ – массовый расход, кг/с, давление (Па) и температура (К) для j -го участка; $T_{cp}^m(t)$ – средняя температура вытекающего из m -го узла газа (К).

Задается также начальное распределение расходов, давлений и температур для ЛУ: $W_j(x_j, 0) = W_j^0(x_j)$, $P_j(x_j, 0) = P_j^0(x_j)$, $T_j(x_j, 0) = T_j^0(x_j)$, где $x_j \in [x_j^+, x_j^{++}]$, $\forall j \in M$.

3. Метод решения

Для решения систем дифференциальных уравнений математической модели (4)–(7) использован метод сеток. Аппроксимация уравнений системы проведена по двум неявным конечно-разностным схемам. Первая определена на четырехточечном шаблоне с разностным оператором второго порядка аппроксимации по пространственной переменной и первым порядком

– по временной переменной, а вторая – на пятиточечном шаблоне с разностными операторами второго порядка аппроксимации по пространственной и временной переменным. Рассмотрим каждую из разностных схем подробно. Для наглядности сопоставим каждой схеме свой шаблон. Шаблоны имеют вид, изображенный соответственно на рис. 1 и 2.

а) Пятиточечный шаблон

Для получения численного решения система (4) аппроксимируется разностными уравнениями с использованием неявной конечно-разностной схемы, определенной на пятиточечном шаблоне (см. рис. 1). Разобьем отрезок $[x_j^+, x_j^{++}]$ на N_j частей для каждого j -го участка трубопровода. Разобьем временной интервал $[0, T]$ на $k = 0, \dots, \frac{T}{\Delta t}$ временных слоев.

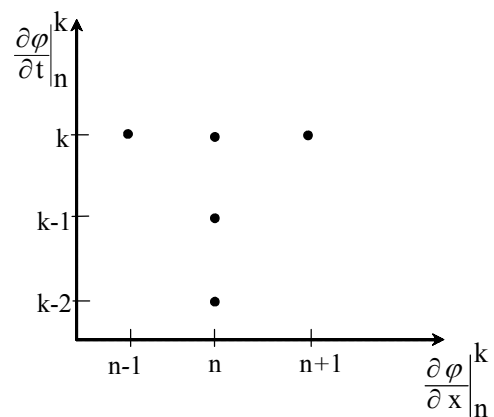


Рис. 1. Пятиточечный шаблон

В этом случае производные заменяются следующими соотношениями [2]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_n^k = \frac{3\varphi_n^k - 4\varphi_n^{k-1} + \varphi_n^{k-2}}{2\Delta t}, \quad n = \overline{0, N}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_n^k = \begin{cases} \frac{\varphi_1^k - \varphi_0^k}{\Delta x}, & n = 0, \\ \frac{\varphi_{n+1}^k - \varphi_{n-1}^k}{2\Delta x}, & n = \overline{1, N-1}, \\ \frac{\varphi_N^k - \varphi_{N-1}^k}{\Delta x}, & n = N. \end{cases} \quad (9)$$

С учетом (8)–(9) система уравнений для j -го участка трубопровода принимает вид:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\Delta x} B_n^k \varphi_{n-1}^k + \frac{3}{2\Delta t} \varphi_n^k + \frac{1}{2\Delta x} B_n^k \varphi_{n+1}^k = \\ = \Phi_n^k + \frac{2}{\Delta t} \varphi_n^{k-1} - \frac{1}{2\Delta t} \varphi_n^{k-2}, \quad n = \overline{1, N_j - 1}, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\Delta t} \varphi_0^k - \frac{1}{\Delta x} B_0^k \varphi_0^k + \frac{1}{\Delta x} B_0^k \varphi_1^k = \\ = \Phi_0^k + \frac{2}{\Delta t} \varphi_0^{k-1} - \frac{1}{2\Delta t} \varphi_0^{k-2}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\Delta t} \varphi_{N_j}^k + \frac{1}{\Delta x} B_{N_j}^k \varphi_{N_j}^k - \frac{1}{\Delta x} B_{N_j}^k \varphi_{N_{j-1}}^k = \\ & = \Phi_{N_j}^k - \frac{2}{\Delta t} \varphi_{N_j}^{k-1} - \frac{1}{2\Delta t} \varphi_{N_j}^{k-2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, получили систему нелинейных алгебраических уравнений, которая содержит $3(N+1)$ уравнений и $3(N+1)$ переменных. Данная система решается методом Ньютона, путем линеаризации системы (10) – (12). Линейная система уравнений решается относительно векторов поправок к неизвестным методом Гаусса с выбором главного элемента. Для ее решения необходимо вычислить векторы невязок и элементы матриц Якоби для каждого j -го участка трубопровода:

$$\begin{aligned} \psi_{0,1}^{k,r,j} &= \frac{3}{2\Delta t} \varphi_0^{k,r,j} - \frac{1}{\Delta x} B_0^{k,r,j} \varphi_0^{k,r,j} + \\ & + \frac{1}{\Delta x} B_0^{k,r,j} \varphi_1^{k,r,j} - \Phi_0^{k,r,j} - \frac{2}{\Delta t} \varphi_0^{k-1,j} + \frac{1}{2\Delta t} \varphi_0^{k-2,j}, \\ \psi_n^{k,r,j} &= -\frac{1}{2\Delta x} B_n^{k,r,j} \varphi_{n-1}^{k,r,j} + \frac{3}{2\Delta t} \varphi_n^{k,r,j} + \\ & + \frac{1}{2\Delta x} B_n^{k,r,j} \varphi_{n+1}^{k,r,j} - \Phi_n^{k,r,j} - \frac{2}{\Delta t} \varphi_n^{k-1,j} + \frac{1}{2\Delta t} \varphi_n^{k-2,j}, \quad n=1, N_j-1, \\ \psi_{N_j}^{k,r,j} &= \frac{3}{2\Delta t} \varphi_{N_j}^{k,r,j} + \frac{1}{\Delta x} B_{N_j}^{k,r,j} \varphi_{N_j}^{k,r,j} - \\ & - \frac{1}{\Delta x} B_{N_j}^{k,r,j} \varphi_{N_{j-1}}^{k,r,j} - \Phi_{N_j}^{k,r,j} - \frac{2}{\Delta t} \varphi_{N_j}^{k-1,j} + \frac{1}{2\Delta t} \varphi_{N_j}^{k-2,j}. \end{aligned}$$

Запишем выражения для невязок $\psi_n = (\psi_{n,1}, \psi_{n,2}, \psi_{n,3})$ в развернутой форме.

Выражения для определения невязок в точке 0 имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_{0,1}^{k,r,j} &= \left(\frac{3}{2\Delta t} W_0^{k,r,j} - \frac{2}{\Delta t} W_0^{k-1,j} + \frac{1}{2\Delta t} W_0^{k-2,j} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{2\alpha T_0^{k,r,j} W_0^{k,r,j}}{P_0^{k,r,j}} (W_1^{k,r,j} - W_0^{k,r,j}) + \left(1 - \frac{S\alpha\alpha_0^{k,r,j} (W_0^{k,r,j})^2}{(P_0^{k,r,j})^2} \right) x \right. \\ & \left. x(P_1^{k,r,j} - P_0^{k,r,j}) \right] + \beta S \frac{T_0^{k,r,j} W_0^{k,r,j} |W_0^{k,r,j}|}{P_0^{k,r,j}} + \frac{g}{\alpha S} \frac{P_0^{k,r,j}}{T_0^{k,r,j}} \frac{dh}{dx}, \\ \psi_{0,2}^{k,r,j} &= \left(\frac{3}{2\Delta t} P_0^{k,r,j} - \frac{2}{\Delta t} P_0^{k-1,j} + \frac{1}{2\Delta t} P_0^{k-2,j} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta x} \alpha S T_0^{k,r,j} (W_1^{k,r,j} - W_0^{k,r,j}), \\ \psi_{0,3}^{k,r,j} &= \left(\frac{3}{2\Delta t} T_0^{k,r,j} - \frac{2}{\Delta t} T_0^{k-1,j} + \frac{1}{2\Delta t} T_0^{k-2,j} \right) + \frac{\alpha S T_0^{k,r,j}}{\Delta x P_0^{k,r,j}} x \\ & x[(\gamma-1) T_0^{k,r,j} (W_1^{k,r,j} - W_0^{k,r,j}) + \gamma W_0^{k,r,j} (T_1^{k,r,j} - T_0^{k,r,j})] + \\ & + \frac{4K}{D} (\gamma-1) \frac{T_0^{k,r,j}}{P_0^{k,r,j}} (T_0^{k,r,j} - T_{rp}) + g(\gamma-1) \frac{T_0^{k,r,j} W_0^{k,r,j}}{P_0^{k,r,j}} \frac{dh}{dx}. \end{aligned}$$

Выражения для невязок для любой внутренней точки j -го участка трубопровода ($n=1, N_j-1$) имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_{n,1}^{k,r,j} &= \left(\frac{3}{2\Delta t} W_n^{k,r,j} - \frac{2}{\Delta t} W_n^{k-1,j} + \frac{1}{2\Delta t} W_n^{k-2,j} \right) + \frac{1}{2\Delta x} \cdot x \\ & x \left[\frac{2\alpha S T_n^{k,r,j} W_n^{k,r,j}}{P_n^{k,r,j}} (W_{n+1}^{k,r,j} - W_{n-1}^{k,r,j}) + \left(1 - \frac{\alpha S T_n^{k,r,j} (W_n^{k,r,j})^2}{(P_n^{k,r,j})^2} \right) x \right. \\ & \left. x(P_{n+1}^{k,r,j} - P_{n-1}^{k,r,j}) \right] + \beta S T_n^{k,r,j} \frac{W_n^{k,r,j} |W_n^{k,r,j}|}{P_n^{k,r,j}} + \frac{g}{\alpha S} \frac{P_n^{k,r,j}}{T_n^{k,r,j}} \frac{dh}{dx}, \\ \psi_{n,2}^{k,r,j} &= \left(\frac{3}{2\Delta t} P_n^{k,r,j} - \frac{2}{\Delta t} P_n^{k-1,j} + \frac{1}{2\Delta t} P_n^{k-2,j} \right) + \\ & + \frac{1}{2\Delta x} \alpha S T_n^{k,r,j} (W_{n+1}^{k,r,j} - W_{n-1}^{k,r,j}), \\ \psi_{n,3}^{k,r,j} &= \left(\frac{3}{2\Delta t} T_n^{k,r,j} - \frac{2}{\Delta t} T_n^{k-1,j} + \frac{1}{2\Delta t} T_n^{k-2,j} \right) + \frac{\alpha S T_n^{k,r,j}}{2\Delta x P_n^{k,r,j}} x \\ & x[(\gamma-1) T_n^{k,r,j} (W_{n+1}^{k,r,j} - W_{n-1}^{k,r,j}) + \gamma W_n^{k,r,j} (T_{n+1}^{k,r,j} - T_{n-1}^{k,r,j})] + \\ & + \frac{4K}{D} (\gamma-1) \frac{T_n^{k,r,j}}{P_n^{k,r,j}} (T_n^{k,r,j} - T_{rp}) + g(\gamma-1) \frac{T_n^{k,r,j} W_n^{k,r,j}}{P_n^{k,r,j}} \frac{dh}{dx}. \end{aligned}$$

Выражения для определения невязок в граничной точке N_j имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_{N_j,1}^{k,r,j} &= \left(\frac{3}{2\Delta t} W_{N_j}^{k,r,j} - \frac{2}{\Delta t} W_{N_j}^{k-1,j} + \frac{1}{2\Delta t} W_{N_j}^{k-2,j} \right) + \frac{1}{\Delta x} \cdot x \\ & x \left[\frac{2\alpha S T_{N_j}^{k,r,j} W_{N_j}^{k,r,j}}{P_{N_j}^{k,r,j}} (W_{N_j}^{k,r,j} - W_{N_{j-1}}^{k,r,j}) + \left(1 - \frac{\alpha S T_{N_j}^{k,r,j} (W_{N_j}^{k,r,j})^2}{(P_{N_j}^{k,r,j})^2} \right) x \right. \\ & \left. x(P_{N_j}^{k,r,j} - P_{N_{j-1}}^{k,r,j}) \right] + \beta S \frac{T_{N_j}^{k,r,j} W_{N_j}^{k,r,j} |W_{N_j}^{k,r,j}|}{P_{N_j}^{k,r,j}} + \frac{g}{\alpha S} \frac{P_{N_j}^{k,r,j}}{T_{N_j}^{k,r,j}} \frac{dh}{dx}, \\ \psi_{N_j,2}^{k,r,j} &= \left(\frac{3}{2\Delta t} P_{N_j}^{k,r,j} - \frac{2}{\Delta t} P_{N_j}^{k-1,j} + \frac{1}{2\Delta t} P_{N_j}^{k-2,j} \right) + \\ & + \frac{1}{\Delta x} \alpha S T_{N_j}^{k,r,j} (W_{N_j}^{k,r,j} - W_{N_{j-1}}^{k,r,j}), \\ \psi_{N_j,3}^{k,r,j} &= \left(\frac{3}{2\Delta t} T_{N_j}^{k,r,j} - \frac{2}{\Delta t} T_{N_j}^{k-1,j} + \frac{1}{2\Delta t} T_{N_j}^{k-2,j} \right) + \frac{\alpha S T_{N_j}^{k,r,j}}{\Delta x P_{N_j}^{k,r,j}} x \\ & x[(\gamma-1) T_{N_j}^{k,r,j} (W_{N_j}^{k,r,j} - W_{N_{j-1}}^{k,r,j}) + \gamma W_{N_j}^{k,r,j} (T_{N_j}^{k,r,j} - T_{N_{j-1}}^{k,r,j})] + \\ & + \frac{4K}{D} (\gamma-1) \frac{T_{N_j}^{k,r,j}}{P_{N_j}^{k,r,j}} (T_{N_j}^{k,r,j} - T_{rp}) + g(\gamma-1) \frac{T_{N_j}^{k,r,j} W_{N_j}^{k,r,j}}{P_{N_j}^{k,r,j}} \frac{dh}{dx}. \end{aligned}$$

Элементы матрицы Якоби $\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right]_0^{k,r,j}$ в начальной

точке 0 имеют вид (индексы k, r, j опущены):

$$\frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial W} = \frac{3}{2\Delta t} + \frac{2\alpha ST_0}{\Delta x P_0} [(W_1 - 2W_0) - (P_1 - P_0) \frac{W_0}{P_0}] +$$

$$+ \frac{2\beta ST_0 |W_0|}{P_0},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial P} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{-2\alpha ST_0 W_0 (W_1 - W_0)}{P_0^2} - (1 +$$

$$+ \frac{\alpha ST_0 W_0^2 (P_0 - 2P_1)}{P_0^3}) \right] - \frac{\beta ST_0 W_0 |W_0|}{P_0^2} + \frac{g}{\alpha ST_0} \frac{dh}{dx},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial T} = \frac{\alpha W_0 S}{\Delta x P_0} [2(W_1 - W_0) - \frac{P_1 - P_0}{P_0} W_0] +$$

$$+ \frac{\beta S W_0 |W_0|}{P_0} - \frac{g}{\alpha S} \frac{P_0}{T_0^2} \frac{dh}{dx},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial W} = -\frac{\alpha T_0 S}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial P} = \frac{3}{2\Delta t},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial T} = \frac{\alpha S (W_1 - W_0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial W} = \frac{\alpha ST_0}{\Delta x P_0} [(1 - 2\gamma) T_0 + \gamma T_1] + g(\gamma - 1) \frac{T_0}{P_0} \frac{dh}{dx},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial P} = \frac{-\alpha ST_0}{\Delta x P_0^2} [(\gamma - 1) T_0 (W_1 - W_0) + \gamma W_0 (T_1 - T_0)] -$$

$$- \frac{4K}{D} (\gamma - 1) \frac{T_0 (T_0 - T_{rp})}{P_0^2} - g(\gamma - 1) \frac{T_0 W_0}{P_0^2} \frac{dh}{dx},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial T} = \frac{3}{2\Delta t} + \frac{\alpha S}{\Delta x P_0} [2(\gamma - 1) T_0 (W_1 - W_0) + \gamma W_0 (T_1 - 2T_0)] +$$

$$+ \frac{4K}{D} (\gamma - 1) \frac{2T_0 - T_{rp}}{P_0^2} + g(\gamma - 1) \frac{W_0}{P_0^2} \frac{dh}{dx}.$$

Элементы матрицы Якоби $\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right]_n^{k,r,j}$ для внутренних

точек ($n = \overline{1, N_j - 1}$) имеют вид:

$$\frac{\partial \psi_{n,1}}{\partial W} = \frac{3}{2\Delta t} + \frac{\alpha ST_n}{\Delta x P_n} [(W_{n+1} - W_{n-1}) - \frac{P_{n+1} - P_{n-1}}{P_n} W_n] +$$

$$+ 2\beta S \frac{T_n |W_n|}{P_n},$$

$$\frac{\partial \psi_{n,1}}{\partial P} = \frac{\alpha ST_n W_n}{\Delta x P_n^2} [(W_{n+1} - W_{n-1}) - \frac{P_{n+1} - P_{n-1}}{P_n} W_n] -$$

$$- \frac{\beta ST_n W_n |W_n|}{P_n^2} + \frac{g}{\alpha ST_n} \frac{dh}{dx},$$

$$\frac{\partial \psi_{n,1}}{\partial T} = \frac{\alpha S W_n}{2\Delta x P_n} [2(W_{n+1} - W_{n-1}) - \frac{P_{n+1} - P_{n-1}}{P_n} W_n] +$$

$$+ \frac{\beta S W_n |W_n|}{P_n} - \frac{g P_n}{\alpha ST_n^2} \frac{dh}{dx},$$

$$\frac{\partial \psi_{n,2}}{\partial W} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_{n,2}}{\partial P} = \frac{3}{2\Delta t},$$

$$\frac{\partial \psi_{n,2}}{\partial T} = \frac{\alpha S}{2\Delta x} (W_{n+1} - W_{n-1}),$$

$$\frac{\partial \psi_{n,3}}{\partial W} = \frac{\gamma \alpha S}{2\Delta x} \frac{T_n}{P_n} (T_{n+1} - T_{n-1}) + g(\gamma - 1) \frac{T_n}{P_n} \frac{dh}{dx},$$

$$\frac{\partial \psi_{n,3}}{\partial P} = \frac{-\alpha ST_n}{2\Delta x P_n^2} [(\gamma - 1) T_n (W_{n+1} - W_{n-1}) + \gamma W_n (T_{n+1} - T_{n-1})] -$$

$$- \frac{4K}{D} (\gamma - 1) \frac{T_n}{P_n^2} (T_n - T_{rp}) - g(\gamma - 1) \frac{T_n W_n}{P_n^2} \frac{dh}{dx},$$

$$\frac{\partial \psi_{n,3}}{\partial T} = \frac{3}{2\Delta t} + \frac{\alpha S}{2\Delta x P_n} [2(\gamma - 1) T_n (W_{n+1} - W_{n-1}) +$$

$$+ \gamma W_n (T_{n+1} - T_{n-1})] + \frac{4K}{D} (\gamma - 1) \frac{2T_n - T_{rp}}{P_n} + g(\gamma - 1) \frac{W_n}{P_n} \frac{dh}{dx}.$$

б) Четырехточечный шаблон

Для получения численного решения система (4) аппроксимируется разностными уравнениями с использованием неявной конечно-разностной схемы, определенной на четырехточечном шаблоне (см. рис. 2). Разобьем отрезок $[x_j^+, x_{j+1}^+]$ на N_j частей для каждого j-го участка трубопровода. Разобьем временной интервал $[0, T]$ на $k = 0, \left[\frac{T}{\Delta t} \right]$ временных слоев.

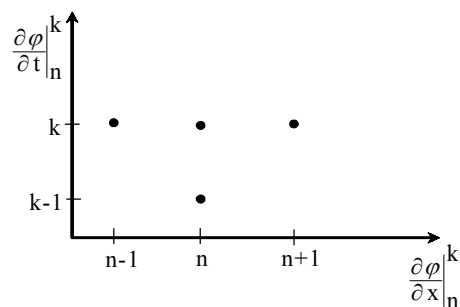


Рис. 2. Четырехточечный шаблон

Тогда производные заменяются следующими соотношениями [2]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_n^k = \frac{\varphi_n^k - \varphi_n^{k-1}}{\Delta t}, \quad n = \overline{0, N}. \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_n^k = \begin{cases} \frac{\varphi_1^k - \varphi_0^k}{\Delta x}, & n = 0, \\ \frac{\varphi_{n+1}^k - \varphi_{n-1}^k}{2\Delta x}, & n = \overline{1, N-1}, \\ \frac{\varphi_N^k - \varphi_{N-1}^k}{\Delta x}, & n = N. \end{cases} \quad (14)$$

С учетом (13)–(14) уравнение (4) для j -го участка трубопровода записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\Delta t} \varphi_0^k - \frac{1}{\Delta x} B_0^k \varphi_0^k + \frac{1}{\Delta x} B_0^k \varphi_1^k = \Phi_0^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_0^{k-1}, \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2\Delta x} B_n^k \varphi_{n-1}^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_n^k + \frac{1}{2\Delta x} B_n^k \varphi_{n+1}^k =$$

$$= \Phi_n^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_n^{k-1}, \quad n = \overline{1, N_j - 1}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \varphi_{N_j}^k + \frac{1}{\Delta x} B_{N_j}^k \varphi_{N_j}^k - \frac{1}{\Delta x} B_{N_j}^k \varphi_{N_j-1}^k = \Phi_{N_j}^k + \frac{1}{\Delta t} \varphi_{N_j}^{k-1}. \quad (17)$$

Аналогичные выкладки, проведенные для пятиточечного шаблона, справедливы и для разностной схемы, определенной на четырехточечном шаблоне.

Как и в пункте а) система уравнений (15) – (17) решена методом Ньютона. В результате линеаризации получаем линейную систему, которая была решена методом Гаусса с выбором главного элемента, относительно векторов поправок к неизвестным.

4. Результаты расчетов

Приведем сопоставление результатов расчетов сети по двум конечно-разностным схемам.

Рассматриваемая сеть, состоящая из ЛУ МГ, имеет следующие характеристики: суммарная длина всех труб – 170 км, внутренние диаметры труб – 1400 мм, толщина стенок $h=10$ мм, шероховатость труб – 0,03 мм, удельная теплоемкость газа $C_p = 0.655952$ ккал/(кг·°C), относительная плотность газа по воздуху $\Delta = 0,604707$, температура грунта на глубине заложения газопровода $t_{gr}=10^\circ\text{C}$, коэффициент теплопередачи от газа к грунту $K = 1,4$ ккал/(м²·ч·°C). Расчетная схема представлена на рис. 3.

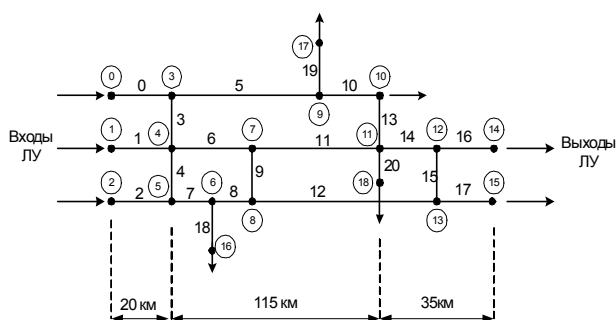


Рис. 3. Расчетная схема ЛУ МГ

Задача решалась на пространственно-временной сетке с шагами $\Delta x = 20$ км и $\Delta t = 30$ мин на период времени 24 ч. В качестве начального условия принимаем стационарное течение газа по рассматриваемой ЛЧ с давлением на входах равным 8,398 МПа, температурой – 40°C и суммарным коммерческим расходом – 306,798 млн.м³/сут. Ниже приводятся графики зависимости параметров газового потока от времени для разных шаблонов расчетов.

На рис. 4 – 6 представлен переходной процесс, моделирующий заданное по определенному ступенчатому временному закону увеличение и последующее восстановление выходного расхода в 16 и 14 узлах линейной части и постоянным расходом в 17, 10, 18, 15 узлах рассматриваемой сети. Граничные условия представлены в таблице.

Узлы сети	Значения в узлах сети
1	$P(t) = 8,398$ МПа $T(t) = 40^0\text{C}$
2	$P(t) = 8,398$ МПа $T(t) = 40^0\text{C}$
3	$P(t) = 8,398$ МПа $T(t) = 40^0\text{C}$
10	$q^{10}(t) = 15$ млн м ³ в сут., $t \geq 0$ мин.
15	$q^{15}(t) = 10$ млн м ³ в сут., $t \geq 0$ мин.
16	$q^6(t) = \begin{cases} 15 \text{ млн м}^3 \text{ в сут.}, t \leq 180 \text{ мин.} \\ 50 \text{ млн м}^3 \text{ в сут.}, 180 < t \leq 390 \text{ мин.} \\ 15 \text{ млн м}^3 \text{ в сут.}, t > 390 \text{ мин.} \end{cases}$
17	$q^9(t) = \begin{cases} 15 \text{ млн м}^3 \text{ в сут.}, t \leq 120 \text{ мин.} \\ 25 \text{ млн м}^3 \text{ в сут.}, t > 120 \text{ мин.} \end{cases}$
18	$q^{11}(t) = 10$ млн м ³ в сут., $t \geq 0$ мин.

5. Выводы

Научная новизна – впервые предложен сравнительный анализ конечно-разностных схем аппроксимации модели нестационарных неизотермических режимов транспорта природного газа в многониточных линейных участках магистральных газопроводов применительно к приведенной математической модели.

Исследование рассмотренных в работе конечно-разностных схем показало, что обе применяемые разностные схемы дают с точностью до третьего знака после запятой при одинаковых начальных параметрах одинаковые результаты параметров газового потока. При этом выбор временного шага сетки также не влияет на результат (второй порядок аппроксимации по временной переменной в пятиточечном шаблоне не влияет на результат и быстродействие выполнения расчета по алгоритму).

К тому же, избрав пятиточечный шаблон для вычисления решения, мы на каждом шаге осуществления алгоритма по этому шаблону допускаем (помимо погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным) дополнительные ошибки округления. Эти ошибки, связанные со вторым порядком аппроксимации по временной переменной в разностной схеме, отсутствующие при использовании четырехточечного шаблона, влияют на результаты, получаемые на последующих шагах вычисления.

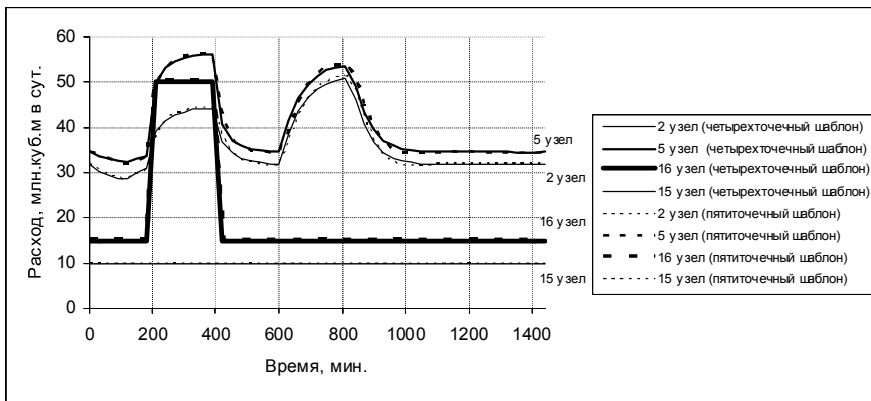


Рис. 4. График зависимости расхода от времени в узлах сети ЛУ МГ

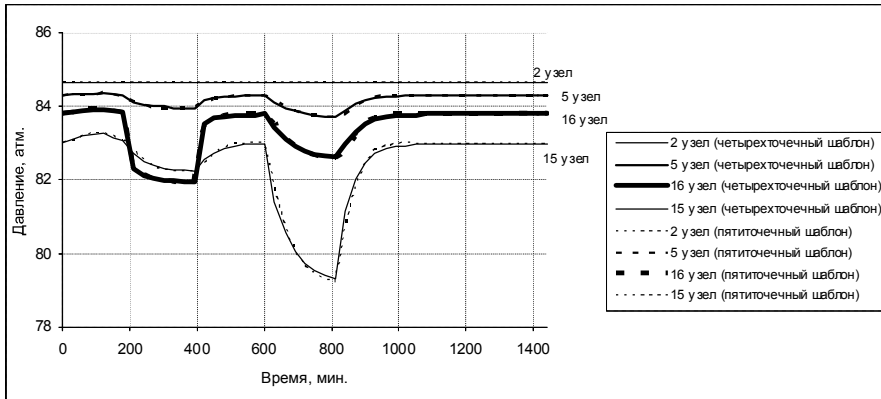


Рис. 5. График зависимости давления от времени в узлах сети ЛУ МГ

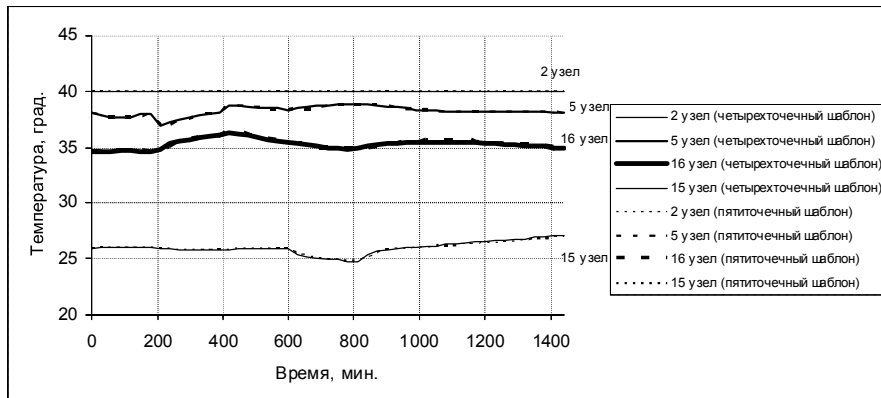


Рис. 6. График зависимости температуры от времени в узлах сети ЛУ МГ

В результате исследования параметров газового потока по линейным частям сетевой структуры, аналогичным приведенной в тестовом примере, время расчета режима на четырехточечном шаблоне в среднем на 10-20 секунд быстрее, чем на пятиточечном. При анализе данных также определили, что длительность переходного процесса для пятиточечного шаблона меньше, чем для четырехточечного, что связано с выбором более точной аппроксимации по временной переменной, хотя разница по времени окончания переходного процесса в общем случае незначительна (порядка 30 минут для рассмотренного тестового примера).

Приведенные результаты моделирования динамики транспорта природного газа в многониточных линейных участках магистрального газопровода позволили сделать следующий вывод. Для сетей большой размерности, когда можно пренебречь погрешностями, связанными с

определением времени окончания переходного процесса, нет необходимости для численного решения системы уравнений модели применять неявную конечно-разностную схему, определенную на пятиточечном шаблоне. Следовательно, в дальнейшем для расчетов эксплуатационных режимов транспорта природного газа магистральными газопроводами будем использовать четырехточечный шаблон.

Практическая значимость: результаты выводов, сделанных в статье, дают возможность выбрать конечно-разностную схему, отвечающую всем заданным требованиям и позволяющую с высокой степенью точности и скоростью проводить расчеты режимов транспорта газа в режиме реального времени, а также прогнозировать эти режимы с целью избежать аварий на магистральных газопроводах. Специальный расчетный модуль, реализованный на основе метода с использованием выбранной разностной схемы, будет в дальнейшем включен в информационно-аналитическую систему оперативно-диспетчерского управления режимами транспорта и распределения природного газа в ГТС.

Литература: 1. *Тевяшев А.Д., Гусарова И.Г., Чуркина А.В.* Эффективный метод и алгоритм расчета нестационарных неизотермических режимов транспорта газа в газотранспортной сети произвольной структуры // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2006. 2/3 (20). С. 45-52. 2.

Годунов С.К., Рябенкий В. С. Разностные схемы (введение в теорию). Учеб. пособие. М: Наука, 1973. 400с.

Поступила в редколлегию 24.05.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Левыкин В.М.

Тевяшев Андрей Дмитриевич, академик УНГА, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория стохастических моделей. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (057) 702-14-36.

Гусарова Ирина Григорьевна, канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование и управление систем с распределенными параметрами. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (057) 702-14-36.

Каминская Анна Владимировна, аспирантка кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: численное моделирование трубопроводных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (057) 702-14-36.