УДК 519.713

МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

ХАХАНОВ В.И., ЧУМАЧЕНКО С.В.

Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой.

К. Маркс

Рассматриваются методологические вопросы, связанные с моделями существующих в математике пространств, применительно к научным исследованиям, касающимся радиоэлектроники. Представлены определения пространств и их горизонтальные взаимосвязи. Описываются алгебраические структуры и множества, определяющие вертикальные взаимосвязи.

1. Введение

Практически любое научное исследование связано с математической формализацией рассматриваемых процессов и явлений, превращаемых в общепринятые понятия моделей и методов.

По мнению В.М. Глушкова [1] каждая наука оперирует развивающейся во времени информационной моделью, которая содержит и исчисленческую часть. Последняя – исчисление, определяемое как совокупность правил вывода, позволяет получать дедуктивным путем следствия из конечного множества аксиом.

В процессе развития науки меняется соотношение между информационной и исчисленческой моделями – повышается удельный вес последней – происходит математизация науки (рис.1), оказывающая позитивное действие на уменьшение временных и материальных затрат конкретной научной или технической проблемы.

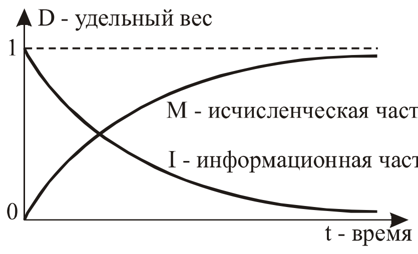


Рис. 1. Эволюция исчисленческой модели

Математизация – это возможность использования воздвигнутого на основе математического языка огромного и стройного здания дедуктивных построений, как результата усилий многих поколений математиков [5-9]. Поэтому формализация решаемой задачи в любой области науки дает исследователю возможность пользоваться определенной частью здания в виде соответствующего математического аппарата, благодаря чему удается сэкономить время на дедуктивные построения в целях получения необходимых выводов. В связи с этим весьма актуальной представляется задача определения той части математического здания, которое наиболее адекватно описывает рассматриваемую проблему и с минимальными затратами формализует процесс ее решения. С учетом сказанного представление многообразия существующих математических пространств, как фундамента для моделей и методов, дает исследователю на начальной стадии научной разработки мощный арсенал методологических средств. Они, во-первых, дают ему уже готовые дедуктивные построения фрагментов поставленной задачи, во-вторых, определяют ориентиры для нового и более эффективного ее решения в лабиринтах математического здания, не изобретая при этом велосипед.

Цель исследования – анализ математических пространств во взаимосвязи с множествами, алгебрами, моделями для определения места формулирования и решения прикладной научной задачи, относящейся к области радиоэлектроники.

Задачи: 1. Исторические аспекты появления моделей пространств. 2. Методология порождения пространств. 3. Существующие пространства и их определения. 4. Практическое использование пространств для решения прикладных проблем.

При первоначальном определении исчисленческой части модели процесса или явления в методическом отношении важна взаимная классификация понятий и категорий. Она направлена на установление связей между различными объектами, природа которых определяется принадлежностью к определенной алгебраической системе или пространству. Только в рамках такой классификации целый ряд принципов и теорем общематематического значения получает обобщенную формулировку. Связи такого рода составляют эффективную систему ориентиров при рассмотрении классов объектов.

2. Понятие пространства

В современной математике пространство задается как множество объектов, называемых элементами или точками, например, геометрические фигуры, функции, состояния физической системы, отношения между которыми вводятся аксиоматически и определяют геометрию пространства. Оно есть логически мыслимая форма или структура, служащая средой, в которой реализуются другие формы или конструкции. Например, в элементарной геометрии двух- или трехмерное пространство служит средой, где строятся различные фигуры (рис. 2).

Рис. 2. Двумерное пространство

В большинстве случаев в пространствах фиксируются отношения, аналогичные обычным геометрическим: расстояние между точками, равенство фигур.

Такие пространства представляют логически мыслимые пространственно-подобные формы.

Исторически первым примером является трехмерное евклидово пространство. Оно представляет приближенный абстрактный образ реального пространства. Затем было введено евклидово пространство любого числа измерений (первая половина XIX века). Одновременно появилось пространство Лобачевского (геометрия Лобачевского).

В результате постепенного все более широкого обобщения и видоизменения понятий евклидовой геометрии в математике сложилось общее понятие пространства. Оно было выдвинуто в 1854 году Б.Риманом и впоследствии обобщалось, уточнялось и конкретизировалось. В результате эволюционирования этого понятия возникли векторное, гильбертово, банахово, риманово, топологическое, метрическое пространства.

Примерами пространств могут служить:

1) Пространство непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ (элементами являются функции $f(x)$, расстояние или метрика определяется как максимум модуля их разности $r(f_1, f_2) = \max|f_1(x) - f_2(x)|$). Это метрическое пространство.

2) Пространство событий, где каждое событие характеризуется координатами x, y, z и временем t, определяется 4 координатами. Множество всевозможных событий образует 4-мерное пространство, которое имеет важное значение в геометрической интерпретации теории относительности.

3) Фазовое пространство как совокупность всех состояний физической системы, которые рассматриваются в качестве его элементов. Применяется в теоретической физике и механике.

Таким образом, представление о пространствах имеет вполне реальный смысл. Речь идет о реальных формах действительности, которые не всегда являются пространственными в обычном смысле, но пространственно-подобные по своей структуре. Вопрос о том, какое математическое описание максимально соответствует свойствам реального пространства, решается опытом. Например, было установлено, что евклидова геометрия не всегда достаточно точно описывает реальное пространство. Поэтому в современной теории реального пространства применяется риманова геометрия.

2.1. Основные типы отношений в пространствах

Математика рассматривает лишь форму явления, отвлекаясь от его содержания. С данной точки зрения многие качественно различные явления оказываются похожими. Разнообразие приложений математики обеспечивается именно ее абстрактным характером.

Принятое в современной математике формально-математическое определение пространства исходит из понятия множества. Пространство определяется как множество элементов, объектов, точек с установленными в нем отношениями.

2.1.1. Отношения принадлежности и включения

Если введены только эти отношения: точка принадлежит множеству, одно множество есть часть другого, то в нем еще не определена геометрия и оно не является пространством. Но если выделены фигуры как специальные множества точек, прямая, плоскость, то геометрия пространства определяется законами связи точек с фигурами.

2.1.2. Введение координат

Принцип выделения некоторых специальных множеств позволяет определить понятие топологического пространства (ТП), где специальными множествами являются окрестности точек. Каждая точка имеет свою окрестность и принадлежит ей. Понятие ТП служит для математического выражения понятия непрерывности.

Многообразие – ТП, возможно связное, непрерывное, в окрестности каждой точки которого можно ввести координаты путем взаимно-однозначного и взаимно-непрерывного соответствия точек окрестности и систем из n действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n, n – число измерений многообразия. Простейшие геометрические фигуры, отрезки, части поверхностей являются кусками многообразий. Если существуют системы координат такие, что одни выражаются через другие дифференцируемыми функциями, то многообразие называется гладким или аналитическим. Такие многообразия изучаются дифференциальной топологией, которая в сочетании с методами дифференциального, интегрального исчисления, векторного и тензорного анализа составляет дифференциальную геометрию, например, теория гладких кривых и поверхностей, являющихся одно- и двумерными дифференцируемыми многообразиями.

2.1.3. Обобщение понятия движения

Понятие движения как преобразование одной фигуры в другую приводит к общему принципу определения разных пространств. Каждое из них представляет множество элементов, в котором заданы взаимно-однозначные преобразования этого пространства на себя. Представляют интерес те свойства фигуры, которые сохраняются при преобразовании. Возможно преобразование координат в пространстве, а не самого пространства.

2.1.4. Обобщение понятия расстояния

Согласно Б.Риману (1854г.), пространство – гладкое многообразие, в котором задан закон измерения длин или расстояний бесконечно малыми шагами. Обобщение понятия расстояния привело к понятию метрического пространства (МП) как множества элементов, в котором задана метрика – каждой паре элементов сопоставлено расстояние между ними, измеряемое определенным образом и подчиненное некоторым общим условиям. Эта идея реализуется в функциональном анализе.

2.2. Дискретность и непрерывность

Математика как наука о формах действительности сталкивается, прежде всего, с дискретностью и непрерывностью. Арифметика дает счет отдельных предметов. Геометрия изучает пространственную непрерывность. Столкновение дискретного и непрерывного является одним из основных противоречий, движущих развитие математики. Деление отдельных величин на части и их измерение представляют сопоставление дискретного и непрерывного, например, масштаб откладывается отдельными шагами. Задание вектора координатами точек начала и конца есть дискретное представление, тогда как сам вектор с геометрической точки зрения является непрерывным направленным отрезком. В связи с задачей измерения диагонали квадрата со стороной 1 потребовалось обобщение понятия числа – создание понятия иррационального числа (XIX век). Прямая и всякая другая фигура стала рассматриваться как множество точек. Противоречие дискретного и непрерывного не может быть полностью снято. Часто эти понятия приходится рассматривать в единстве.

Начала дискретного пространства следует определять из примитивных понятий множества и элемента. Пространство с одним элементом не существует, поскольку в нем невозможно определить отношения. Следовательно, самым примитивным пространством считается теоретико-множественное, соответствующее алгебре Кантора $A_k=<\{0,1,X,\varnothing\}, \bigcap,\bigcup,\neg>$. Здесь имеются только два элемента 0 и 1, поэтому пространство является одномерным. В нем определены точки 0 и 1, отрезок X={0,1}. Оно является замкнутым, поскольку теоретико-множественные операции $\{\bigcap,\bigcup,\neg\}$ над его элементами дают символы из множества $\{0,1,X,\varnothing\}$. В данном пространстве длина есть кодовое расстояние по Хэммингу между элементами, которое определяется как d(0,1)=1. Таким образом, алгебре Кантора соответствует самое примитивное теоретико-множественное замкнутое, метрическое, геометрическое, булево, дискретное пространство. Геометрия этого пространства определяется специальными множествами точек, которые являются концами виртуального отрезка, но не задают своих окрестностей (топологию).

3. Евклидова геометрия

Евклидово пространство – пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. Она возникла как отражение фактов действительности.

3.1. Аксиоматика евклидовой геометрии

Система аксиом евклидовой геометрии состоит из пяти групп и опирается на шесть основных неопределяемых понятий. К последним относятся три рода объектов: точки, прямые и плоскости и три вида отношений между ними: принадлежит, между, движение.

I. Аксиомы принадлежности: инцидентности, соединения, связи, сочетания

I_1: Через каждые две точки можно провести прямую и притом только одну.

I_2: На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой.

I_3: Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

I_4: На каждой плоскости есть по крайней мере три точки и существуют хотя бы четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

I_5: Если две точки данной прямой лежат в данной плоскости, то и сама прямая лежит на этой плоскости.

I_6: Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют еще одну общую точку и, следовательно, общую прямую.

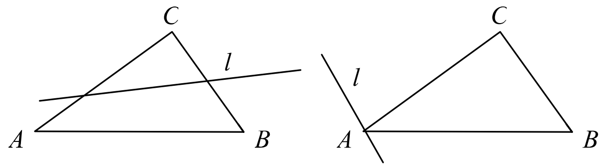
II. Аксиомы порядка

II_1: Если точка B лежит между A и C, то все три точки лежат на одной прямой.

II_2: Для каждых точек A, B существует такая точка C, что B лежит между A и C.

II_3: Из трех точек прямой только одна лежит между двумя другими.

II_4: Аксиома Паша. Если прямая пересекает одну сторону треугольника, то она пересекает еще одну его сторону либо проходит через его вершину:

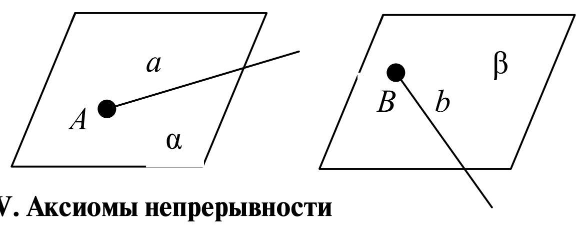


III. Аксиомы движения

III_1: Движение ставит в соответствие точкам точки, прямым прямые, плоскостям плоскости, сохраняя принадлежность точек прямым и плоскостям.

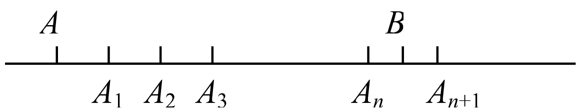
III_2: Два последовательных движения дают опять движение и для всякого движения есть обратное.

III_3: Если даны точки A, B и полуплоскости α, β, ограниченные продолженными полупрямыми a, b, которые исходят из точек A, B соответственно, то существует движение, и притом единственное, переводящее A, a, α в B, b, β:



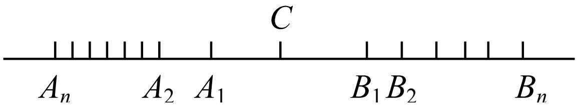
IV. Аксиомы непрерывности

IV_1: Аксиома Архимеда. Всякий отрезок AB можно перекрыть меньшим отрезком AA_1, откладывая его на AB достаточное количество раз ($AA_1 = A_1A_2 = ... = A_nA_{n+1}$):



Откладывание отрезка осуществляется движением.

IV_2: Аксиома Кантора. Если дана бесконечная последовательность вложенных отрезков A_nB_n, то существует, и притом единственная точка, принадлежащая всем отрезкам:



V. Аксиома параллельности

Через данную точку вне данной прямой можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной, не пересекающей данную.

С помощью основных понятий евклидовой геометрии определяются остальные ее понятия. На основании данной аксиоматики выводятся и доказываются другие свойства геометрических фигур.

В приведенной системе аксиом за основные могут быть приняты и другие понятия. Например, у Д.Гильберта в число основных вместо движения входит понятие конгруэнтности, и III группа аксиом содержит 5 определений [2]. В аксиоматике В.Ф.Кагана (1905г.) одним из основных является понятие расстояния. В векторно-точечной аксиоматике основными являются понятия точки и вектора, связь между которыми устанавливается сопоставлением паре точек однозначно определенного вектора. Отношение симметрии также может быть принято в качестве основного.

Следует заметить, что объекты, удовлетворяющие системе аксиом евклидова пространства, допускают бесчисленное множество интерпретаций.

Например, в декартовой интерпретации точкой на плоскости называется любая пара действительных чисел x и y, взятых в определенном порядке (x, y) (тем самым вводится понятие упорядоченной пары). Числа x и y называются координатами точки. Прямая – совокупность всех точек, удовлетворяющих линейному уравнению прямой $ax + by + c = 0$. Определяется также отношение порядка точек на прямой. Движение заключается в сопоставлении каждой точке (x, y) пары (x', y') по формулам

$$x' = x\cos\theta - \varepsilon y\sin\theta + p\,,\quad y' = x\sin\theta + \varepsilon y\cos\theta + q\,,$$

где θ, p, q – любые числа, $\varepsilon = \pm 1$.

Аксиома о параллельных не зависит от остальных аксиом евклидовой геометрии. Если ее заменить на противоположную, то получится геометрия Лобачевского-Больяй или гиперболическая неевклидова геометрия, которая нашла приложение в общей теории относительности. Если считать распределение масс материи во Вселенной равномерным, что допустимо в космических масштабах, то пространство соответствует геометрии Лобачевского как возможной теории реального пространства [2].

4. Система классификаций общей алгебры

К общей или абстрактной алгебре относятся алгебраические системы, включающие в себя теории групп, колец, модулей, полугрупп, решеток (рис.3) [2]. Появление алгебраических систем является результатом взаимосвязей алгебры, математической логики и теоретико-множественного мышления. Все разделы общей алгебры, возникшие в результате исследований тех или иных свойств и взаимных связей, имеют собственные пути развития и области приложения, например, полугруппы важны для алгебраической теории автоматов. Выявление общих моментов, содержащихся в этих теориях, восходит к понятию категории – совокупности однотипных математических структур или объектов и отображений или морфизмов между этими структурами, в которых выполняется ряд естественных дополнительных условий.

Категория C состоит из класса объектов $\mathrm{Ob}\,C$ и класса морфизмов $\mathrm{Mor}\,C$, удовлетворяющих следующим аксиомам:

C_1: каждой упорядоченной паре объектов A, B сопоставлено множество $H_C(A, B)$ из $\mathrm{Mor}\,C$:

$$\forall (A, B) \in \mathrm{Ob}\,C \;\; \exists H_C(A, B) \in \mathrm{Mor}\,C\,.$$

C_2: каждый морфизм f принадлежит однозначно определенному множеству $H_C(A, B)$.

Рис. 3. Иерархическая классификация общей алгебры

Объект A называется началом f, B – концом морфизма f. Формальная запись имеет вид:

$$f \in H_C(A,B) \text{ или } f: A \to B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{f} B .$$

C_3: для произвольных объектов A, B, C и морфизмов $f: A \to B$ и $g: B \to C$ определено произведение $fg: A \to C$. Умножение морфизмов ассоциативно: $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ имеет место равенство $(fg)h = f(gh)$.

C_4: в каждом множестве $H_C(A, A)$ задан тождественный или единичный морфизм $\mathrm{I}_A : A \to A$, такой, что для любых морфизмов $f: X \to A$ и $g: A \to Y$ выполнены равенства $f\,\mathrm{I}_A = f$, $\mathrm{I}_A\, g = g$.

Примеры категорий.

1) В категории множеств St или Ens [2] объектами являются множества; морфизмами – их отображения друг в друга $f: A \to B$; умножение морфизмов совпадает с суперпозицией или последовательным выполнением отображений; единичными морфизмами являются тождественные отображения множеств в себя.

2) В категории бинарных отношений над категорией множеств Rel(St) [2] объектами выступают произвольные множества; морфизмами – бинарные отношения; умножение морфизмов есть умножение бинарных отношений.

5. Линейные системы или векторные пространства

Линейная система (ЛС) или векторное пространство (ВП) по своей природе является алгебраической структурой. Она определяется как множество E (вещественное или комплексное) с операциями сложения $(+)$ элементов и умножения $(\cdot)$ на скаляр (вещественный или комплексный), которые удовлетворяют следующим аксиомам:

1) ассоциативность сложения

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

2) коммутативность сложения $x + y = y + x$;

3) дистрибутивность

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$$

4) ассоциативность умножения $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;

5) аксиома о нулевом элементе

$$\exists \mathbf{0} \in E: \ \forall x \in E \ \ 0 \cdot x = \mathbf{0};$$

6) умножение на скалярный множитель 1: $1 \cdot x = x$;

7) обратная операция вычитания определяется при помощи умножения на –1: $x - y = x + (-1) \cdot y$.

Результаты действия этих операций не выводят из носителя, на котором они определены, т.е. принадлежат множеству E:

$$\forall x, y \in E \ \exists (x + y) \in E; \ \forall \lambda \ \exists \lambda x \in E .$$

Примеры ВП:

1. E_n – совокупность векторов n-мерного евклидова пространства представляет собой вещественную ЛС:

$$\forall x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n), \ y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in E_n, \ \forall \lambda \in \mathbf{R},$$
$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, ..., \xi_n + \eta_n),$$
$$\lambda x = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, ..., \lambda\xi_n).$$

2. E_n^* – комплексная ЛС определяется аналогично.

3. $C(0,1)$ – множество непрерывных функций, заданных на $[0,1]$, является вещественной ЛС.

Для описания ЛС вводятся также понятия линейной независимости элементов, алгебраического базиса, размерности.

Элементы $x_1, x_2, ... x_n \in E$ линейно-независимы, если

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0,$$

иначе $x_1, x_2, ... x_n$ – линейно-зависимы.

Бесконечная система элементов $x_1, x_2, ... x_n, ... \in E$ линейно-независима, если любой конечный набор из них линейно-независим.

Алгебраическим базисом называется система элементов $\{x_\alpha\} \in E$ такая, что любой элемент из множества E единственным образом представим в виде линейной комбинации элементов этой системы:

$$\forall x \in E : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i .$$

Каждая ЛС имеет алгебраический базис. Любые два базиса ЛС имеют одно и то же кардинальное число, которое называется размерностью ЛС. ЛС конечномерна, если ее размерность – натуральное число, тогда базис состоит из n элементов $e_1, e_2, ..., e_n \in E$.

Следовательно, любой элемент из ЛС E однозначно представим в виде линейной комбинации элементов этого базиса:

$$\forall x \in E \ \exists! x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i ,$$

где коэффициенты λ_i называются координатами элемента x в базисе $\{e_i\}$. Если кардинальное число бесконечно, то ЛС E является бесконечномерной. Таким образом, размерность ВП определяется числом элементов его базиса.

Вводится также понятие линейного многообразия M как непустого подмножества ЛС E такого, что $\forall x_1, x_2 \in M \Rightarrow \forall(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in M$.

6. Топологические пространства

Топологические пространства (ТП) описываются свойствами, связанными с интуитивными понятиями окрестности, предела и непрерывности в евклидовом пространстве.

Общая топология – раздел геометрии, посвященный исследованию непрерывности и предельного перехода. Основополагающими являются понятия ТП и непрерывного отображения (Ф. Хаусдорф, 1914 г.). Частным случаем непрерывных отображений являются гомеоморфизмы – непрерывные в обе стороны взаимно-однозначные отображения ТП. Гомеоморфные пространства, которые можно отобразить друг на друга посредством гомеоморфизма, считаются одинаковыми. Общая топология выявляет и исследует топологические инварианты, топологические свойства пространств: связность, компактность, размерность.

Аксиомы отделимости представляют собой условия, налагаемые на ТП и выражающие требования отделимости непересекающихся множеств [2]:

T_0: аксиома Колмогорова – определяет пространство Колмогорова T_0, любые две точки которого не имеют одинаковых замыканий, что равносильно тому, что одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку, т.е.

$$\forall x, y \in T_0 \ \exists V_x, V_y \subset T_0 : x \notin V_y \ .$$

Одноточечные множества в T_0 могут не быть замкнутыми.

T_1: для любых двух точек существует окрестность каждой из них, не содержащая другой точки, это равносильно тому, что каждая точка замкнута:

$$\forall x, y \in T_1 \ \exists V_x, V_y \subset T_1 : x \notin V_y, \ y \notin V_x \ .$$

Аксиома определяет достижимые пространства T_1.

T_2: для любых двух точек существуют непересекающиеся окрестности:

$$\forall x, y \in T_2 \ \exists V_x, V_y \subset T_2 : V_x \cap V_y = \varnothing \ .$$

Аксиома определяет Хаусдорфовы пространства T_2.

T_3: для любого замкнутого множества и не содержащейся в нем точки существуют их непересекающиеся окрестности:

$$\forall \overline{M} \in T_3, \ \forall x \notin \overline{M} \ \exists V_{\overline{M}}, V_x \subset T_2 : V_{\overline{M}} \cap V_x = \varnothing \ .$$

Выполнение аксиом T_1 и T_3 одновременно определяет регулярные пространства.

$T_{3\,1/2}$: для любого замкнутого множества и точки вне его существует непрерывная числовая функция, равная нулю на множестве и единице – в точке:

$$\forall \overline{M} \in T_{31/2}, \ \forall x \notin \overline{M} \ \exists f(m) = \begin{cases} 0, \forall m \in \overline{M}; \\ 1, \ m = x. \end{cases}$$

Выполнение аксиом T_1 и $\mathbf{T_{31/2}}$ одновременно определяет вполне регулярное или тихоновское пространство.

T_4: для любых двух замкнутых непересекающихся множеств существуют их непересекающиеся окрестности:

$$\forall \overline{M}_1, \overline{M}_2 \in T_4 \ \exists V_{\overline{M}_1}, V_{\overline{M}_2} : \ V_{\overline{M}_1} \cap V_{\overline{M}_2} = \varnothing \ .$$

Выполнение аксиом T_1 и T_4 одновременно задает нормальное пространство (рис.4).

7. Линейные топологические пространства (ЛТП)

Пусть ВП наделено отделимой или хаусдорфовой топологией, которая задается системой окрестностей $\{V_x\}$, $\forall x$. Отделимость означает, что любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности (T_2). Система $\{V_x\}$ описывается свойствами:

1) $\forall V_x \in \{V_x\}, \ x \in V_x$;
2) $V_{x_i} \in \{V_x\}, V_{x_j} \in \{V_x\} \Rightarrow V_{x_i} \cap V_{x_j} \in \{V_x\}$;
3) $V_x \in \{V_x\}, V \supset V_x \Rightarrow V \in \{V_x\}$;
4) $U_x \subset \{V_x\} \Rightarrow \exists V_x \in \{V_x\} : U_x \in \{V_y\} \ \forall y \in \{V_x\}$.

В ЛТП связь между ЛС и ТП отражает свойства непрерывности алгебраических операций над векторами в евклидовом пространстве. ЛТП в функциональном анализе – в основном бесконечномерные. Они имеют новые свойства по сравнению с ВП.

ВП E является ЛТП, если алгебраические операции непрерывны в топологии E ; для алгебраической суммы $\oplus$, определяемой для двух подмножеств как $\forall S, T \subset E, \ S \oplus T = \{x + y \mid x \in S, y \in T\}$ и умножения на скаляр, выполняются свойства:

1) $\forall x, y \in E, \ V_{x+y} \ \exists V_x, V_y : V_x \oplus V_y \subset V_{x+y}$;
2) $\forall x \in E, \lambda, \ V_{\lambda x} \ \exists V_x, \ \delta > 0 : \mu V_x \subset V_{\lambda x}, |\mu - \lambda| < \delta$.

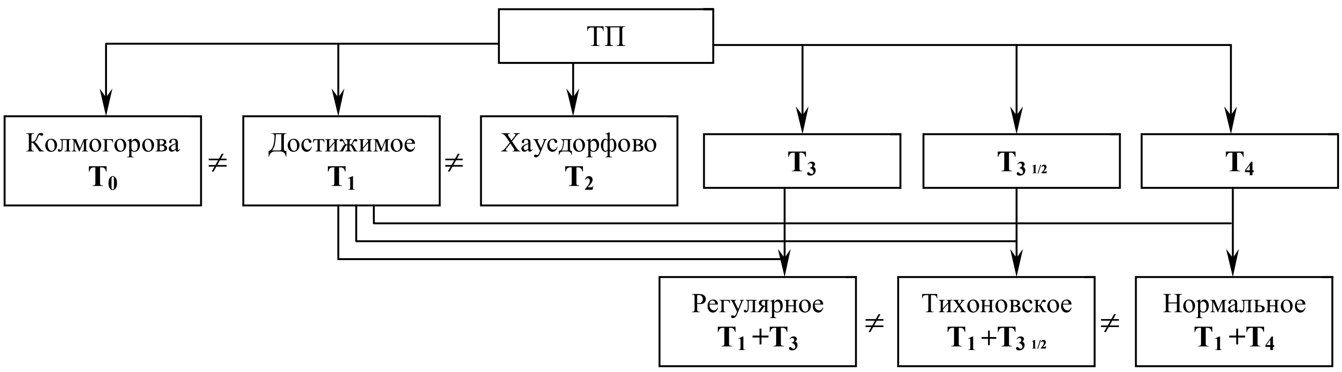


Рис. 4. Классификация ТП

В ЛТП система окрестностей нуля $\{V_{\mathbf{0}}^{(\alpha)}\}$ полностью определяет топологию пространства, а именно: любая окрестность V_x элемента x получается из некоторой окрестности нуля $V_{\mathbf{0}}^{(\alpha)}$ путем ее сдвига на элемент x: $V_x^{(\alpha)} = x \oplus V_{\mathbf{0}}^{(\alpha)}$.

Таким образом, ЛТП определяется как ВП с заданной топологией.

Примеры ЛТП.

1. $\mathbf{R}_n$ – конечномерное евклидово пространство с обычной топологией.

2. $\mathbf{\Lambda}$ – комплексное ЛТП, где топология задается системой окрестностей

$$V_{x_0} = \{x = (\xi_1, \xi_2, ...\xi_n, ...): \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{|\xi_n^0 - \xi_n|}{1 + |\xi_n^0 - \xi_n|} < \varepsilon\}, \varepsilon > 0.$$

3. $C(0,1)$. Система окрестностей функции $x_0(t) \in C(0,1)$ задается как

$$V_{x_0(t)} = \{x(t) \in C(0,1) \mid |x_0(t) - x(t)| < \varepsilon, \forall t \in [0,1], \varepsilon > 0\}.$$

7.1. Метрические пространства

Метрическое пространство – множество X, на котором задана некоторая метрика, расстояние между двумя элементами или точками $x, y \in X$ – действительная числовая функция – $\rho(x, y)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\rho(x, y) \ge 0$; $\rho(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ – свойство симметрии;

3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall x, y, z \in E$ – неравенство треугольника.

На одном и том же множестве метрика может вводиться различным образом.

Например, на плоскости в качестве расстояния между точками A и B с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно можно принять евклидово расстояние (метрику)

$$\rho_1(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

или другое расстояние

$$\rho_2(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

В ВП метрики часто задаются нормами, иногда – с помощью скалярного произведения.

Теоретико-множественный подход к изучению фигур пространств основан на исследовании взаимного расположения составляющих их элементов или частей. Расстояние между точками пространства является одной из фундаментальных характеристик их взаимного расположения. Подход к пространственным отношениям приводит к понятию МП, впервые предложенному в 1906 г. М.Фреше в связи с рассмотрением функциональных пространств [2].

Естественную метрику несут в себе множества объектов различной природы. Как МП могут рассматриваться множества состояний, функций, отображений, подмножества евклидова и гильбертова пространства.

Рассмотрение метрик важно при исследовании сходимости рядов, функций, при решении вопросов аппроксимации.

Каждая метрика ρ на множестве X позволяет ввести на X топологию, тогда МП становится ТП, следующим образом: замыканием $\overline{A}$ множества A в МП X называется совокупность точек y таких, что $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y), y \in A\} = 0$ – расстояние от x до A непрерывная функция от x.

Рассмотрение специальных метрик играет важную роль при исследовании неевклидовой геометрии, в дифференциальной геометрии, механике и физике. Центральное место занимает понятие римановой метрики и риманова пространства (РП).

РП – это такое, в малых областях которого имеет место евклидова геометрия с точностью до малых высшего порядка, хотя в целом это пространство может не быть евклидовым. РП характеризуется тем, что в нем в окрестности каждой точки A могут быть введены координаты $x^1, x^2, ..., x^n$ так, что расстояние между точками X и Y, близкими к A, выражается формулой:

$$s(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x^i)^2} + \varepsilon,$$

где ε таково, что $\dfrac{\varepsilon}{s(X, Y)} \to 0$, когда точки X, Y приближаются к A и расстояние

$$s(X, Y) = \sqrt{(\Delta x^1)^2 + ... + (\Delta x^n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x^i)^2},$$

Δx^i – разности координат точек X, Y.

Римановым называется пространство, в котором в каждой точке задана квадратичная форма, метрическая $\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$. Определение длины как интеграла от линейного элемента соответствует измерению длин бесконечно малыми шагами.

Простейший случай РП представляет ЕП и пространства постоянной кривизны Лобачевского и Римана. Их неевклидова геометрия – частные случаи римановой геометрии, отвечающие вместе с евклидовой случаю наибольшей возможной однородности РП.

Рассматривая линейное МП (ЛМП) как класс ТП, введем на ЛТП расстояние между элементами $\rho(x, y)$, удовлетворяющее аксиомам 1-3. Элементы ЛМП называются точками. ЛС E называется ЛМП, если она метризована так, что алгебраические операции непрерывны в метрике:

1) если $x_n \to x$, то $y_n \to y$, то $x_n + y_n \to x + y$;

2) если $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

Пример ЛМП: в ЛТП s расстояние между элементами $x = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n\}$ можно ввести с помощью формулы

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}.$$

7.1.1. Полнота МП. Пространство Фреше

Последовательность точек $\{x_n\}$ МП E называется фундаментальной или сходящейся в себе, если

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}:\ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ при $m, n > N$.

Если в МП E любая фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу этого же пространства, то E называется полным МП.

Метризуемое полное локально-выпуклое пространство, ЛТП, обладающее фундаментальной системой окрестностей нуля, называется пространством Фреше.

7.2. Нормированные пространства

Введем понятие нормы (длины) вектора

$\forall x \in E\ \ \exists \| x \| \geq 0$:

N_1) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

N_2) $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$ – однородность;

N_3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ – неравенство треугольника.

Расстояние между элементами

$$\rho(x, y) = \| x - y \| = \| y - x \|$$

обладает всеми свойствами метрики.

ВП, наделенное нормой $\| x \|$, $\forall x \in E$, которая индуцирует на E метрику $\rho(x, y) = \| x - y \|$, следовательно, и топологию, совместимую с этой метрикой, называется нормированным пространством (НП) [3].

Нормируемость пространства равносильна существованию выпуклой ограниченной окрестности нуля – теорема Колмогрова.

Примеры ЛНП.

1. Евклидово пространство $\mathbf{R}_n$:

$$x_i = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n),\ \| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}.$$

2. Пространство последовательностей m_n: $x \in \mathbf{R}_n$, $\| x \| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|$.

3. Пространство бесконечных числовых последовательностей $l_p (p \geq 1)$: $x_i = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty,\ \| x \| = \{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\}^{1/p}.$$

4. m (или l_∞, или c): $x_i = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$ с нормой $\| x \| = \sup\limits_i |\xi_i|$.

5. $C(0,1)$:

$$\| x \| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|,\ \rho(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|.$$

6. Функциональное пространство – аналог пространста $l_p (p \geq 1)$) $L_p(0,1), p \geq 1$ – функции, суммируемые с p-й степенью в $[0,1]$: $\int\limits_0^1 |x(t)|^p\, dt < \infty$.

7.2.1. Банаховы пространства

Полное ЛНП называется банаховым. В терминах нормы фундаментальной последовательности это означает, что если $\| x_n - x_m \| \to 0,\ n, m \to \infty$, то $\exists x_0 \in E:\ \| x_n - x_0 \| \to 0,\ n \to \infty$.

Примеры 1-5 из п. 7.2.

8. Абстрактное гильбертово пространство

Рассмотрим векторное пространство H как ЛС с умножением на комплексные числа ($\forall \lambda \in$ C), для каждой пары элементов которой определено комплексное скалярное произведение $(x, y) \in H$, обладающее свойствами:

G_1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (x, x) – вещественно;

G_2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

G_3) $\forall \lambda \in$ C $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$;

G_4) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$

(если H – ЛС с умножением на вещественные числа ($\forall \lambda \in$ R), то скалярное произведение вещественно).

Следствия из аксиом G_1–G_4:

а) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$;

б) $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$;

в) неравенство Буняковского-Шварца

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)}.$$

ВП H можно превратить в ЛНП, если ввести норму по скалярному произведению

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)}.$$

Пространство H называется гильбертовым – комплексным или вещественным, – если оно бесконечномерно и полно по введенной норме.

Гильбертово пространство всегда является банаховым – полным нормированным пространством:

1) пространство $l_p (p \geq 1)$ – банахово;

2) пространство m, или l_∞, или c сходящихся числовых последовательностей;

3) $C[a, b]$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $x = x(t)$ с нормой $\| x \| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|$;

4) $L_p(a, b), p \geq 1$ – пространство функций $x = x(t)$, определенных на $[a, b]$:

$$\int_a^b |x(t)|^p \; dt < \infty\,, \;\; \|x\| = (\int_a^b |x(t)|^p \; dt\,)^{1/p}\,.$$

Предгильбертово пространство H – бесконечномерное, но не полное пространство.

9. Дискретные пространства

Дискретное пространство является основополагающим понятием для научных исследований в областях, связанных с теорией множеств, булевой алгеброй, теорией графов, комбинаторным анализом. Оно оперирует совокупностью двоичных или многозначных n-мерных векторов, представляющих элементы множества или отношения.

Определение. Дискретным называется метрическое геометрическое пространство, в котором метрика определяет расстояние по Хэммингу $d(C_i,C_j)$ между двумя точками, задаваемыми n-мерными векторами (кубами) C_i, C_j. Расстояние равно числу пустых пересечений между их координатами

$$d(C_i, C_j) = \mathrm{card}(C_{ir} \bigcap_{r=1}^{n} C_{jr} = \varnothing)$$

с выполнением условий:

1) $d(C_i, C_j) = 0 \leftrightarrow (C_i = C_j)$;

2) $d(C_i, C_j) = d(C_j, C_i)$;

3) $d(C_i, C_j) + d(C_j, C_r) \geq d(C_i, C_r), \forall \{C_i, C_j, C_r\} \in C$.

Множество кубов C в соответствии с введенной метрикой формирует дискретное – булево или теоретико-множественное пространство, где выполняются все основные операции и процедуры анализа кубических (табличных) моделей цифровых устройств или вычислительных систем [4]. Геометрическая интерпретация дискретного простанства для n=3 представлена на рис. 5. В отличие от n-мерного евклидова пространства, которое является непрерывным, дискретное оперирует явно задаваемыми точками, но виртуальными отрезками, плоскостями, кубами и n-мерными объектами. Куб C_i, имеющий k координат, равных X, называется k-кубом: 1-куб, представляет собой линию, 2-куб – плоскость.

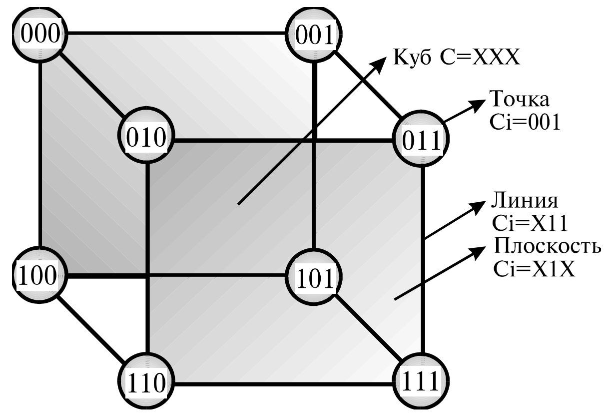


Рис. 5. Трехмерное метрическое геометрическое дискретное булево пространство

10. Заключение

Предложенный анализ моделей пространств позволяет классифицировать их по направлениям: историко-временному развитию, многообразию моделей пространств, определяемых их характеристическими свойствами (рис. 6). Классификация не претендует, естественно, на полноту, но позволяет в совокупности определить палитру используемых типов при выполнении научных исследований.

Литература: 1. *Глушков В.М.* Кибернетика. Вопросы теории и практики. М.: Наука. 1986. 488 с. 2. *Математический* энциклопедический словарь / Гл. ред. А.В. Прохоров // М.: Сов. энциклопедия, 1988. 847с. 3. *Функциональный* анализ / Под общ. ред. С.Г. Крейна. Серия: Справочная математическая библиотека. М.: Наука, 1972. 544с. 4. *Хаханов В.И.* Техническая диагностика элементов и узлов персональных компьютеров. К.: IЗМН. 1997. 308 с. 5. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Теория множеств. М., 1965. 6. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Алгебра: Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М., 1962. 7. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Общая топология: основные структуры. М., 1968. 8. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. М., 1975. 9. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Топологические векторные пространства. М., 1959.

Поступила в редколлегию 21.12.2001

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Бодянский Е.В.

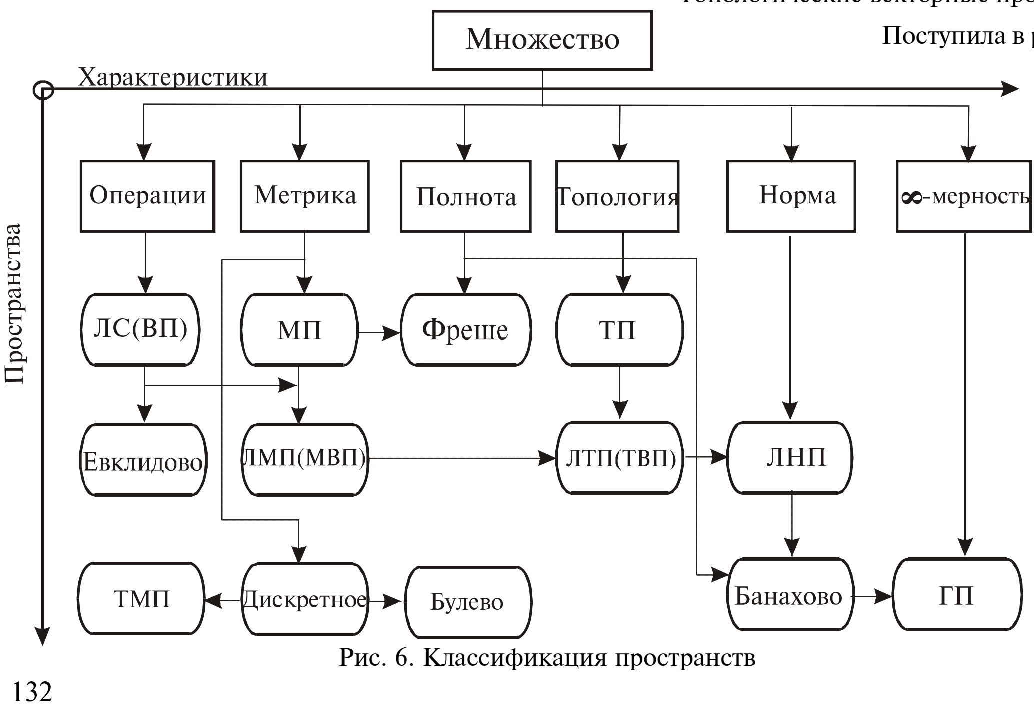


Рис. 6. Классификация пространств

Хаханов Владимир Иванович, д-р техн. наук, профессор кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: техническая диагностика вычислительных систем. Увлечения: баскетбол, футбол, горные лыжи. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-26.

Чумаченко Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: математическая физика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-26.