

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Оцінювання показника Херста
для часового ряду за
допомогою нейронної мережі
(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи ПМм-22-1

Павленко К.О.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність

113 Прикладна математика

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма

Прикладна математика

(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Кіріченко Л.О.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2024 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“06” листопада 2023 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Павленку Кирилу Олексійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Оцінювання показника Херста для часового ряду за допомогою нейронної мережі

затверджена наказом по університету від 2 листопада 2023 р. № 1276 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 січня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи реалізації фрактального броунівського руху

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	6 – 12 листопада 2023 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	13 – 26 листопада 2023 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	27 листопада – 10 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	11 грудня – 24 грудня 2023 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	25 грудня 2023 р. – 9 січня 2024 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2024 р.	виконано

Дата видачі завдання 6 листопада 2023 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Кіріченко Л.О.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 58 с., 3 табл., 7 рис., 1 дод., 27 джерел.

ВЕЙВЛЕТ, ГЛИБОКЕ НАВЧАННЯ, ДАТАСЕТ, МАШИННЕ НАВЧАННЯ, НЕЙРОННА МЕРЕЖА, ОЦІНКА, РЕГРЕСІЯ, СЕРЕДНЄ, СТАНДАРТНЕ ВІДХИЛЕННЯ, ЧАСОВИЙ РЯД.

Об'єкт дослідження – відношення вейвлет-енергій до показника Херста.

Мета роботи – побудувати нейронну мережу для оцінки показника Херста.

Методи дослідження – метод регресії вейвлет-енергій за допомогою глибокого навчання.

У кваліфікаційній роботі розглядається метод оцінки показника Херста, заснований на спектрах вейвлет-енергій. Часовий ряд нормалізується, проходить через різницеве перетворення, та розраховуються його спектр вейвлет-енергій. Цей спектр подається на вхід глибокої нейронної мережі, що проводить регресію. Метод був випробуваний на змодельованих даних. Результат був порівняний зі статистичною вейвлет оцінкою та методом Уїттла. З результатів можна побачити, що даний метод є досить ефективним методом оцінки показника Херста.

ABSTRACT

Introductory note: 58 pages, 3 tables, 7 figures, 1 appendix, 27 sources.

DATASET, DEEP LEARNING, ESTIMATION, MACHINE LEARNING, MEAN, NEURAL NETWORK, REGRESSION, STANDARD DEVIATION, TIME SERIES, WAVELET.

Object of research – the ratio of wavelet energies to the Hurst exponent.

Purpose of work – to build a neural network to estimate the Hurst exponent.

Methods of research – a method of wavelet energy regression using deep learning.

In the qualification work the method of estimating the Hurst index based on wavelet energy spectra is considered. The time series is normalized, passes through a difference transformation, and its spectrum of wavelet energies is calculated. This spectrum is fed to the input of a deep neural network that performs regression. The method was tested on modeled data. The result was compared with statistical wavelet estimation and Whittle's method. It can be seen from the results that this method is an effective method of estimating the Hurst exponent.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	7
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	9
1.1 Аналіз літератури	9
1.2 Показник Херста та методи його оцінки	10
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	13
1.4 Постановка задач дослідження	14
2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання	16
2.1 Самоподібний стохастичний процес	16
2.2 Основні поняття та властивості вейвлет-перетворень	18
2.2.1 Вейвлет-перетворення одновимірної функції	19
2.2.2 Кратномасштабний аналіз і дискретне вейвлет-перетворення	20
2.2.3 Властивості деталізаційних коефіцієнтів	22
2.3 Лінійна регресія та регресія з використанням глибокого навчання	25
Висновки за розділом 2	27
3 Програмна реалізація	28
3.1 Python як інструмент роботи з даними	28
3.2 Алгоритм розв’язання задачі оцінки показника Херста	30
3.3 Опис програми	32
Висновки за розділом 3	33
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	35
4.1 Вхідні дані	35
4.2 Аналіз результатів	36
Висновки за розділом 4	41
Висновки	42
Перелік джерел посилання	43
Додаток А Лістинг програми	46

ВСТУП

Актуальність теми. Нині стало загально визнаним, що багато інформаційних, біологічних, фізичних, технологічних процесів мають складну фрактальну структуру. Зараз фрактальний аналіз використовують для моделювання, аналізу та контролю складних систем у різних галузях науки і техніки: у телекомунікаціях – для запобігання перевантаженню комп’ютерних мереж; у геології – для прогнозування сейсмічної активності та цунамі; у біології та медицині – для діагностики захворювань і фізіологічного стану за записами ЕКГ та ЕЕГ; в економіці – для прогнозування кризових ситуацій та оцінювання ризику за фінансовими рядами; у фізиці – для дослідження турбулентності та термодинамічних процесів.

Незважаючи на безліч публікацій, пов’язаних із оцінюванням параметрів самоподібності, наразі не існує універсального підходу до оцінювання характеристик самоподібності для часових рядів невеликої довжини, заснованого на попередньому дослідженні кореляційної структури процесу. У зв’язку з цим актуальною науково-технічною проблемою слід вважати розроблення методів оцінювання параметрів самоподібних стохастичних процесів для аналізу часових рядів за вибірковими даними невеликих обсягів.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є розробка методу оцінювання показника Херста для часового ряду за допомогою нейронної мережі. Для досягнення поставленої мети під час проходження професійної практики необхідно виконати наступні завдання:

- проаналізувати існуючі рішення для оцінки показника Херста;
- провести огляд та аналіз математичних методів оцінки показника Херста;
- розробити архітектуру системи підтримки прийняття рішень для аналізу та класифікації часових рядів;
- розробити програмний продукт, в якому реалізувати роботу із часовими рядами за допомогою нейронних мереж та вейвлет-перетворення;

– апробувати програмний продукт на згенерованих даних та провести порівняльний аналіз із обґрунтованим вибором кращої моделі та існуючими методами оцінки показника Херста.

Об'єктом дослідження є оцінка показника Херста часових рядів.

Предметом дослідження є самоподібні часові ряди.

Методи дослідження. У роботі використовуються регресійні нейронні мережі та дискретне вейвлет-перетворення.

Публікації. Результати, отримані у роботі, було представлено на 27-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 10-12 травня 2023 р.) [1], II International Scientific & Practical Conference «Learning & Teaching: after War and during Peace» (м. Харків, 10 листопада 2023 р.) [2], IEEE 18th International Conference on Computer Science and Information Technologies (CSIT) (м. Львів, 10-12 листопада 2022 р.) [3].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Аналіз літератури

Однією з основних властивостей біологічних, фізичних, технічних та інформаційних систем є властивість самоподібності (фрактальності). Ця властивість притаманна не тільки самим об'єктам і системам, а й сигналам, які вони генерують, і траєкторіям їх руху, які описуються фрактальними часовими реалізаціями [4, 5, 6, 7]. Основною характеристикою фрактальної реалізації є її ступінь самоподібності, яка називається показником Херста. Різним станам досліджуваної системи відповідають різні значення показника Херста, тому кількісна характеристика самоподібності часто приносить важливу додаткову інформацію [8, 9, 10, 11].

Існує багато підходів і методів оцінки показника Херста з однієї реалізації, які відрізняються між собою точністю і швидкістю оцінювання [7, 12, 13, 14, 15]. Відповідним математичним інструментом для вивчення самоподібних процесів є вейвлет-аналіз, оскільки основною властивістю вейвлет-функції є властивість інваріантності масштабу. Широко відомий розрахунок показника Херста на основі дискретного вейвлет-перетворення, яке має добру швидкість і достатню точність [14, 16, 17]. Однак більшість методів оцінки, включаючи оцінку на основі вейвлетів, мають велику похибку для реалізацій з коротким часом [7].

Одним із перспективних напрямів дослідження фрактальних часових рядів, у тому числі оцінки ступеня самоподібності, є методи машинного навчання [18, 19]. Машинне навчання, зокрема глибокі нейронні мережі, стало популярним інструментом для класифікації, кластеризації та прогнозування часових рядів [20, 21, 22]. Машинне навчання використовувалося для вивчення реалізацій аномальної дифузії в різних фізичних, біологічних і хімічних процесах [23, 24, 25, 26], класифікації ЕЕГ і виявлення DDoS-атак на основі їх фрактальних властивостей [27], а також ряду інших досліджень.

Метою представленої роботи є реалізація вейвлет-орієнтованої оцінки показника Херста за допомогою самоподібних реалізацій за допомогою нейронної мережі та порівняння результатів зі статистичною оцінкою.

1.2 Показник Херста та методи його оцінки

Показник Херста H , або параметр самоподібності, знаходиться в діапазоні $0 < H < 1$ і являє собою ключову міру самоподібності та міру тривалості довгострокової залежності стохастичного процесу

У випадку $0,5 < H < 1$ говорять про персистентну поведінку процесу, або про те, що процес має тривалу пам'ять. Іншими словами, якщо протягом деякого часу в минулому спостерігалися позитивні збільшення процесу, тобто відбувалося збільшення, то і надалі в середньому відбуватиметься збільшення. Інакше кажучи, ймовірність того, що процес на $i+1$ кроці відхиляється від середнього у тому напрямі, як і на i кроці настільки велика, наскільки параметр H близький до 1. Отже, персистентні стохастичні процеси виявляють чітко виражені тенденції зміни за відносно малому шумі.

У разі $0 < H < 0,5$ говорять про антиперсистентний процес. У такому випадку великі значення процесу йдуть за низькими, і навпаки. Іншими словами, ймовірність того, що на $i+1$ кроці процес відхиляється від середнього у протилежному напрямку (стосовно відхилення на i кроці) настільки велика, наскільки параметр H близький до 0.

При $H = 0,5$ відхилення процесу від середнього є дійсно випадковими і не залежать від попередніх значень, що відповідає випадку звичайного броунівського руху.

Для оцінки параметра Херста часового ряду було запропоновано безліч методів: R/S -аналіз (метод нормованого розмаху), зміна дисперсії агрегованого ряду, спектральні методи, розрахунок за допомогою вейвлет-аналізу та ін.

Розглянемо метод нормованого розмаху. У цьому методі для дослідження часового ряду $x(t)$ довжиною τ визначається таке відношення

$$\frac{R(\tau)}{S(\tau)} = R/S = \frac{\max(x^{cum}(t, \tau)) - \min(x^{cum}(t, \tau))}{\sqrt{\frac{1}{\tau-1} \sum_{t=1}^{\tau} (x(t) - \bar{x}(\tau))^2}}, \quad t = \overline{1, \tau},$$

де $R(\tau)$ – розмах кумулятивного ряду $x^{cum}(t, \tau)$;

$S(\tau)$ – середнє квадратичне відхилення вихідного ряду;

$$\bar{x}(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} x(t);$$

$$x^{cum}(t, \tau) = \sum_{i=1}^t (x(i) - \bar{x}(\tau)).$$

Для самоподібного процесу це відношення при великих значеннях τ має наступну характеристику:

$$M \left[\frac{R}{S} \right] \propto \tau^H.$$

Графік залежності $\frac{R(\tau)}{S(\tau)}$ від τ у подвійному логарифмічному масштабі

для самоподібного часового ряду являтиме пряму лінію, апроксимовану методом найменших квадратів. Оцінка показника H обчислюється як тангенс кута нахилу прямої залежності $\log \frac{R(\tau)}{S(\tau)}$ від $\log \tau$.

Перейдемо до методу детрендованого флуктуаційного аналізу (ДФА). У методі ДФА для вихідного часового ряду $x(t)$ будується кумулятивний ряд

$$y(t) = \sum_{i=1}^t x(i),$$

який розбивається на N сегментів довжиною τ і для кожного

сегмента $y(t)$ обчислюється флуктуаційна функція

$$F^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} (y(t) - Y_m(t))^2,$$

де $Y_m(t)$ – локальний m -поліноміальний тренд у межах даного сегмента.

Функція $F(\tau)$, усереднена по всьому ряду $y(t)$, має скейлінгову залежність від довжини сегмента ряду: $F(\tau) \propto \tau^H$. Графік залежності $\log F(\tau)$ від $\log \tau$ у певному діапазоні значень буде прямою лінією, апроксимованою методом найменших квадратів. Оцінка показника H обчислюється як тангенс кута нахилу прямої залежності $\log F(\tau)$ від $\log \tau$.

Тепер розглянемо метод із використанням дискретного вейвлет-перетворення. Метод вейвлет-оцінювання ступеня самоподібності H базується на властивостях деталізуючих вейвлет-коефіцієнтів, отриманих на різних рівнях декомпозиції досліджуваного тимчасового ряду. Основу даного методу становить положення, що впливає із властивостей деталізуючих коефіцієнтів про те, що зміна значень вейвлет-енергії E_j на масштабному рівні j підпорядковується скейлінговому відношенню:

$$E_j \propto 2^{(2H+1)j}.$$

Графік залежності $\log_2 E_j$ від j буде прямою лінією, апроксимовану методом найменших квадратів. Значення параметра H можна знайти, оцінивши тангенс кута прямого нахилу.

Розглянемо оціночну формулу Уїттла. Цей метод відноситься до спектрального оцінювання. У цьому випадку постулюється, що відомий розподіл самоподібного стохастичного процесу з параметром H , який генерує тимчасову послідовність $X(t)$, $t = \overline{1, N}$. Тоді спектральна густина обраного процесу може бути виражена як $S(\omega, H)$, де функція густини відома, але параметр H невідомий. У цьому випадку можна показати, що параметр H

можна оцінити, якщо знайти таке значення H , яке мінімізує наступне вираз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_N(w)}{S(w, H)} dw \xrightarrow{H} \min,$$

$$\text{де } I_N(w) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N X(t) e^{itw} \right|^2, \quad w \in [0, \pi].$$

Перевага такого підходу полягає в тому, що він дозволяє отримати не лише оцінку параметра H , але також ще й вибіркочну дисперсію, що, своєю чергою, дозволяє обчислити величини довірчих інтервалів. Це можливо, оскільки оцінна формула Уїттла є асимптотично нормальною. Незважаючи на те, що даний метод застосовується тільки до процесів з аналітично заданою функцією розподілу, він знайшов застосування в теорії самоподібного телекомунікаційного трафіку.

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Проблема оцінки показника Херста для часового ряду за допомогою нейронної мережі стосується розробки та впровадження надійної методології для оцінки показника Херста, критичного параметра для характеристики тривалої залежності та самоподібності даних часових рядів, використовуючи підхід на основі нейронної мережі.

Основна проблема полягає в притаманній складності та нелінійності даних часових рядів, що робить традиційні методи оцінювання, такі як R/S -аналіз, оцінка Уїттла та методи на основі вейвлетів, чутливими до обмежень у точному охопленні значення дійсного показника Херста. Нейронні мережі, як потужний інструмент у машинному навчанні, пропонують потенціал для вирішення цієї проблеми шляхом вивчення складних моделей і залежностей у даних, таким чином забезпечуючи точнішу оцінку показника Херста.

Задача регресії є типом задачі навчання з учителем машинного навчання.

Задачі навчання з учителем мають таку процедуру:

- отримати набір часових рядів, кожен зі значенням показника Херста;
- часові ряди поділяються на три групи: навчальні дані, дані перевірки та дані тесту;
- навчається ряд моделей на навчальних даних та виявляється, який алгоритм найкраще працює з даними перевірки;
- використовуються дані тесту для визначення продуктивності вибраного алгоритму.

Тобто необхідно розрахувати показник Херста часового ряду $X = [x_1, x_2, \dots, x_T]$, що є впорядкованим набором дійсних значень. Довжина X дорівнює кількості дійсних значень T .

Набір даних $D = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)\}$ – це набір пар (X_i, Y_i) , де X_i – це часовий ряд, а Y_i – це відповідний показник Херста.

Задача регресії складається з тренування нейронної мережі на наборі даних D з метою відображення з простору можливих вхідних даних до розподілу показників Херста.

1.4 Постановка задач дослідження

Метою роботи є дослідження та вдосконалення існуючих методів оцінки показника Херста, розробка програмного забезпечення для інтелектуального аналізу даних, побудова моделей, перевірка їх на адекватність за обраними критеріями та порівняння з існуючими алгоритмами оцінки показника Херста.

В рамках роботи необхідно:

- проаналізувати існуючі рішення для оцінки показника Херста;
- провести огляд та аналіз математичних методів оцінки показника Херста;

- розробити архітектуру системи підтримки прийняття рішень для аналізу та класифікації часових рядів;
- розробити програмний продукт, в якому реалізувати роботу із часовими рядами за допомогою нейронних мереж та вейвлет-перетворення;
- апробувати програмний продукт на згенерованих даних та провести порівняльний аналіз із обґрунтованим вибором кращої моделі та існуючими методами оцінки показника Херста.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Самоподібний стохастичний процес

Стохастичний процес $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ з безперервною змінною часу називається самоподібним у вузькому значенні з параметром H , $0 < H < 1$, якщо для будь-якого дійсного значення $a > 0$ кінцеві розподіли для $X(at)$, $t \in \mathbb{R}$ ідентичні скінченновимірним розподілам $a^{-H} X(at)$, $t \in \mathbb{R}$, тобто, якщо для будь-яких $k \geq 1$, $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ та будь-яких $a > 0$:

$$\text{Law} \{X(t_2), \dots, X(t_k)\} = \text{Law} \{a^{-H} (X(t_1), a^{-H} X(at_2), \dots, a^{-H} X(at_k))\}. \quad (2.1)$$

Коротко рівняння (2.1) можна записати у вигляді:

$$\text{Law} \{X(t)\} = \text{Law} \{a^{-H} X(at), t \in \mathbb{R}\}.$$

Позначення $\text{Law}\{\cdot\}$ означає скінченновимірні закони розподілу випадкового процесу. Параметр H , що називається параметром Херста, є мірою самоподібності стохастичного процесу.

Стохастичний процес $X(t)$ є статистично самоподібним або самоподібним у широкому сенсі, якщо процес $a^{-H} X(at)$ має ті ж статистичні характеристики другого порядку (математичне очікування $M[X(t)]$, дисперсію $D[X(t)]$ та автокореляційною функцією $r_x(t, s)$), що і $X(t)$:

$$M[X(t)] = \frac{M[X(at)]}{a^H},$$

$$D[X(t)] = \frac{D[X(at)]}{a^{2H}},$$

$$r_x(t, s) = \frac{r_x(at, as)}{a^{2H}}.$$

Розглянемо означення самоподібності для процесів із дискретним часом. Нехай $X = (X_1, X_2, \dots)$ – відрізок стаціонарного у широкому сенсі випадкового процесу з дискретним часом $t \in \mathbb{N}$. Припустимо, процес X має автокореляційну функцію наступного виду:

$$r(k) \sim k^{-\beta} L_1(k), \quad k \rightarrow \infty,$$

де $0 < \beta < 1$ і L_1 – функція, що повільно змінюється на нескінченності, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_1(tx)}{L_1(x)} = 1 \quad \text{для всіх } x > 0.$$

Позначимо через $X^{(m)} = (X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \dots)$ – усереднений по блоках довжини m процес X , компоненти якого визначаються рівністю

$$X_t^{(m)} = \frac{1}{m} (X_{m-m+1} + \dots + X_{tm}), \quad m, k \in \mathbb{N}.$$

Такий ряд називається агрегованим. Позначимо через $r_m(k)$ та D_m коефіцієнт кореляції та дисперсію процесу $X^{(m)}$ відповідно. Процес X називається строго самоподібним у широкому значенні з параметром

$$H = \left(1 - \frac{\beta}{2}\right), \quad 0 < \beta < 1, \quad \text{якщо}$$

$$r_m(k) = r(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

тобто процес не змінює свій коефіцієнт кореляції після усереднення по блоках довжини m . Іншими словами, X є самоподібним у широкому сенсі, якщо

агрегований процес $X^{(m)}$ не відрізняється від вихідного процесу X відносно статистичних характеристик другого порядку.

Процес X називається самоподібним у вузькому сенсі з параметром $H = \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)$, $0 < \beta < 1$, якщо справедливий вираз

$$\text{Law}\{m^{1-H} X^{(m)}\} = \text{Law}\{X\}, m \in \mathbb{N}.$$

Важливим класом випадкових процесів, що часто трапляються в різних галузях природознавства і техніки, є випадкові процеси, які мають стаціонарні прирости. Випадковий процес $\{X(t), t \in R\}$, що має стаціонарні прирости, є самоподібним, якщо

$$\text{Law}\{X(t + \Delta t) - X(\Delta t)\} = \text{Law}\{X(t) - X(0)\}, \forall t, m \in R.$$

Такі процеси мають середнє значення, що дорівнює 0, дисперсія визначається як $M[X^2(t)] = \sigma^2 |t|^{2H}$, а кореляційна функція залежить тільки від моментів часу t і s :

$$M\{X(t), X(s)\} = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ |t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H} \right\}.$$

2.2 Основні поняття та властивості вейвлет-перетворень

Найбільш адекватним математичним апаратом для дослідження динаміки та структури процесів, що мають самоподібні властивості, є вейвлет-аналіз. Метод вейвлет-перетворень дозволяє суттєво доповнити характеристики часових рядів, які отримують звичайні статистичні методи, а також розширити

підходи до оцінки скейлінгових параметрів. Вейвлет-перетворення забезпечує аналіз часового ряду одночасно і в часовій, і частотних областях.

2.2.1 Вейвлет-перетворення одновимірної функції

Вейвлет-перетворення одновимірного сигналу – це його представлення у вигляді узагальненого ряду або інтеграла за системою базисних функцій

$$\Psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right),$$

отриманих із материнського вейвлета $\psi(t)$, що володіє певними властивостями, завдяки операціям зсуву в часі b і зміни часового масштабу a . Множник 1 а забезпечує незалежність норми цих функцій від масштабуючого числа a .

Функція $\psi: R \rightarrow L^2$ називається вейвлетом, якщо задовольняє таким умовам: $\psi \in L^2$, $\|\psi\| = 1$,

$$C_\psi = 2\pi \int_{R \setminus \{0\}} \frac{|S_\psi(w)|}{|w|} dw < \infty, \quad (2.2)$$

$$\text{де } S_\psi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cdot e^{-iwt} dt.$$

Для ортонормованих вейвлетів $C_\psi = 1$ Умова (2.2) еквівалентна такій:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \text{ або } S_\psi(0) = 0.$$

Неперервне пряме та зворотнє вейвлет-перетворення функції $X(t)$ має вигляд

$$W(a,b) = \langle X(t), \psi_{ab}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \bar{\psi}_{ab}(t) dt,$$

$$X(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(a,b) \psi_{ab}(t)}{a^2} da db,$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – операція скалярного добутку.

Неперервна зміна параметрів a і b призводить до надлишкового подання вейвлет-спектра $W(a,b)$. Надмірність тягне за собою порівняно невисоку швидкість виконання перетворення. Очевидно, що необхідна дискретизація цих параметрів при збереженні можливості відновлення функції з її перетворення. Дискретизація, як правило, здійснюється через ступені двійки: $a = 2^m$, $b = k \cdot 2^m$, $m, k \in \mathbb{Z}$. У цьому разі базисні функції визначаються таким чином:

$$\psi_{mk}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - k). \quad (2.3)$$

2.2.2 Кратномасштабний аналіз і дискретне вейвлет-перетворення

Дискретне вейвлет-перетворення (ДВП) будують за допомогою кратномасштабного аналізу, основна ідея якого полягає в поданні функції у вигляді сукупності її послідовних наближень. Під ортогональним кратномасштабним аналізом розуміють опис простору L^2 через послідовність ієрархічно вкладених підпросторів $\{V_m\}$, що не перетинаються, об'єднання яких у межі дає описуваний простір. Ця система підпросторів має задовольняти певним умовам: вкладеності, повноти, ортогональності тощо. Однією з умов є

те, що для простору V_0 існує функція $\varphi(t) \in V_0$, цілочисельні зсуви якої за аргументом утворюють ортонормований базис простору V_0 : $\varphi_{0k}(t) = \varphi(t - k)$.

Функція $\varphi(t)$ називається скейлінг-функцією. Вона відповідає умові

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1.$$

З умов, що накладаються на систему $\{V_m\}$, випливає, що якщо підпростір V_0 має ортонормований базис $\varphi_{0k}(t)$, то й усі інші підпростори також мають ортонормовані базиси, які утворюються масштабним перетворенням базису $\varphi_{0k}(t)$:

$$\varphi_{mk}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \varphi(2^{-m}t - k), \quad m, k \in \mathbb{Z}.$$

Підпростір W_m , що є доповненням підпростору V_m до підпростору V_{m-1} , називається деталізувальним, оскільки містить ту додаткову інформацію (яка не перетинається з простором V_m), яка потрібна для підвищення рівня роздільної здатності з V_m на V_{m-1} під час його відновлення. Деталізуючі підпростори $\{W_m\}$ у сукупності також утворюють взаємно ортогональний набір і мають свій ортонормований базис $\psi_{mk}(t)$, який визначається відповідно до формули (2.3). Між скейлінг-функцією $\varphi(t)$ і вейвлет-функцією $\psi(t)$ існують взаємнооднозначні співвідношення.

Кратномасштабний аналіз полягає в розбитті досліджуваного сигналу $X(t)$ на дві складові: апроксимуючу та деталізуючу, з подальшим аналогічним дробленням апроксимуючої до заданого рівня декомпозиції сигналу N . У результаті декомпозиції сигнал $X(t)$ подається у вигляді суми апроксимуючої компоненти $\text{approx}_N(t)$ і деталізуючих компонент $\text{detail}_N(t)$, які відповідають апроксимуючому підпростору V_N і деталізуючим підпросторам $\{W_j, j = 1, 2, \dots, N\}$:

$$X(t) = \text{approx}_N(t) + \sum_{j=1}^N \text{detail}_j(t) = \sum_{j=1}^{N_a} \text{appr}(N, k) \varphi_{Nk}(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{N_j} \text{det}(j, k) \psi_{jk}(t),$$

де N – обраний максимальний рівень розкладання; $\text{appr}(N, k)$ – апроксимуючі вейвлет-коефіцієнти рівня N ; $\text{det}(j, k)$ – деталізуючі вейвлет-коефіцієнти рівня j ; N_j – кількість деталізуючих коефіцієнтів на рівні j ; N_a – кількість апроксимуючих коефіцієнтів на рівні N .

У випадку дискретних сигналів ДВП призводить до такого результату: для початкового набору $\{X(t), t=1, 2, \dots, T\}$ значень ряду ми отримуємо сукупність наборів значень вейвлет-коефіцієнтів

$$\left\{ \left\{ \text{appr}(N, k), k=1, 2, \dots, \lceil T \cdot 2^{-N} \rceil \right\}, \left\{ \left\{ \text{det}(j, k), k=1, 2, \dots, \lceil T \cdot 2^{-j} \rceil \right\} \right\}, j=1, 2, \dots, N \right\},$$

де операція $\lceil \cdot \rceil$ позначає взяття цілої частини. На відміну від надлишкового спектра безперервного перетворення, загальне число отриманих коефіцієнтів дорівнює кількості значень у вихідному ряді.

Величина вейвлет-енергії на заданому рівні вейвлет-розкладання j з кількістю деталізуючих вейвлет-коефіцієнтів N_j визначається як

$$E_j = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \text{det}^2(j, k). \quad (2.4)$$

2.2.3 Властивості деталізаційних коефіцієнтів

Таким чином, головним інструментом для дослідження досліджуваних процесів є обробка вейвлет-коефіцієнтів, отриманих на різних масштабах.

Отриманий у результаті ДВП ряд коефіцієнтів має певні властивості, що дають змогу досліджувати поведінку стохастичних процесів, які мають властивості самоподібності. Аналізуючи властивості вейвлет-коефіцієнтів для самоподібних процесів зі стаціонарними приростами, можна показати застосування властивостей вейвлет-коефіцієнтів для досліджень й інших процесів із довгостроковою залежністю.

Однією з важливих характеристик вейвлет-функції $\psi(t)$ є наявність нульових моментів високого порядку: $\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = \overline{0, p-1}$. Число нульових моментів p характеризує здатність вейвлет-перетворення аналізувати дрібномасштабні флуктуації та особливості високого порядку, ігноруючи регулярні поліноміальні складові ступеня $m < p$.

Властивість 1. Якщо випадковий процес $X(t)$ є самоподібним процесом зі стаціонарними приростами (СПСП), то деталізауючі коефіцієнти $d_x(j, k) = \frac{1}{N_j}$ на кожному рівні розкладання j є самоподібними, що означає рівність законів розподілу для низки вейвлет-коефіцієнтів на кожному рівні розкладання з деяким масштабом:

$$(d_x(j, 0), d_x(j, 1), \dots, d_x(j, N_j - 1)) \doteq 2^{j\left(H + \frac{1}{2}\right)} (d_x(0, 0), d_x(0, 1), \dots, d_x(0, N_j - 1)),$$

де $d_x(j, k)$ – k -й деталізуючий коефіцієнт рівня розкладання j ; N_j – кількість вейвлет-коефіцієнтів на рівні j ; H – показник Херста.

Ця властивість деталізуючих коефіцієнтів впливає із самоподібності процесу, що визначається властивістю масштабування (стиснення/розтягування) самих материнських вейвлетів. Якщо деякий процес є самоподібним, тобто $X(2^j u) \doteq 2^j X(u)$, то:

$$\begin{aligned}
d_X(j, k) &= \int X(u) \psi(2^j u - k) 2^{\frac{j}{2}} du = \int 2^{-\frac{j}{2}} X(2^{-j} u) \psi(u - k) du \doteq \\
&\doteq 2^{-j\left(H+\frac{1}{2}\right)} \int X(u) \psi(u - k) du = 2^{-j\left(H+\frac{1}{2}\right)} d_X(0, k).
\end{aligned}$$

Властивість 2. Вейвлет-коефіцієнти, отримані в результаті декомпозиції процесу зі стаціонарними приростами, є стаціонарними на кожному масштабі 2^j . Ця властивість випливає з властивості вейвлет-функцій $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$, яка гарантує стаціонарність коефіцієнтів для СПСП.

Властивість 3. Якщо існують моменти p -го порядку, то для вейвлет-коефіцієнтів, отриманих у результаті декомпозиції процесу $X(t)$, виконується така рівність:

$$M |d_X(j, k)|^p = M |d_X(0, k)|^p 2^{-jp\left(H+\frac{1}{2}\right)}. \quad (2.5)$$

Як наслідок, для процесів зі скінченною дисперсією, що найчастіше трапляється на практиці, вираз (2.5) перетворюється на таку форму:

$$M |d_X(j, k)|^2 = M |d_X(0, k)|^2 2^{-j(2H+1)}.$$

Властивість 4. У разі, якщо $X(t)$ є СПСП, кореляційна функція вейвлет-коефіцієнтів рівня j спадає відповідно до співвідношення:

$$M(d_X(j, k) d_X(j, k + n)) = n^{2(H-m)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

де m – число нульових моментів материнського вейвлета ψ .

Властивість 5. Для різних рівнів розкладання $j_1 \neq j_2$ кореляція деталізуючих коефіцієнтів цих рівнів $M(d_x(j_1, k)d_x(j_2, k + n)) = 0$ для всіх n .

Властивість 6. Деталізуючі коефіцієнти ДВП на кожному рівні розкладання j мають нормальний розподіл з нульовим математичним очікуванням.

В основі оцінки на основі вейвлетів лежить той факт, що значення енергії вейвлетів на масштабному рівні підкоряються співвідношенню масштабування: $E_j \propto 2^{(2H+1)j}$. З цієї формули випливає, що за наявності самоподібних властивостей показник Херста можна отримати шляхом оцінки нахилу функції $\log_2(E_j)$ на j .

2.3 Лінійна регресія та регресія з використанням глибокого навчання

Лінійна регресія та регресія з глибоким навчанням – це два різні підходи до розв’язання регресійних задач, які передбачають прогнозування неперервної цільової змінної на основі вхідних даних.

Розглянемо особливості підходу лінійної регресії. Лінійна регресія – це проста і зрозуміла модель, яка передбачає лінійний зв’язок між вхідними характеристиками і цільовою змінною. Вона використовує лінійне рівняння для прогнозування.

Лінійна регресія певною мірою покладається на створені вручну ознаки. Необхідно вибрати і попередньо обробити вхідні ознаки, які мають лінійну або майже лінійну залежність від цільової змінної.

Навчання моделі лінійної регресії передбачає пошук найкращої лінії (або гіперплощини у випадку декількох ознак) шляхом мінімізації функції вартості, як правило, середньоквадратичної помилки.

Лінійна регресія схильна до недонавчання, коли зв’язок між ознаками та цільовою змінною є нелінійним, і вона може погано відображати складні закономірності.

Лінійні регресійні моделі добре піддаються інтерпретації, оскільки коефіцієнти ознак безпосередньо вказують на вплив кожної ознаки на цільову змінну.

Лінійна регресія може добре працювати з невеликими наборами даних, за умови, що зв'язок між ознаками і ціллю є відносно простим і лінійним.

Лінійна регресія підходить для задач з лінійними або майже лінійними залежностями.

Тепер розглянемо регресію за допомогою нейронної мережі. Регресійні моделі глибокого навчання, як правило, більш складні і можуть відображати дуже нелінійні зв'язки в даних за допомогою нейронних мереж з декількома прихованими шарами. Ці моделі здатні вивчати складні закономірності в даних.

Моделі глибокого навчання можуть автоматично вивчати релевантні ознаки з необроблених даних, зменшуючи потребу в обширній функціональній інженерії. Вони можуть обробляти широкий спектр типів даних, включаючи текст і зображення.

Навчання регресійних моделей глибокого навчання передбачає зворотне поширення та градієнтний спуск для мінімізації функції втрат. Цей процес може вимагати більше даних і обчислювальних ресурсів.

Моделі глибокого навчання можуть відображати складні взаємозв'язки, але вони більш схильні до перенавчання. Для пом'якшення цієї проблеми часто використовують методи регуляризації.

Моделі глибокого навчання менш інтерпретовані через їхню складну, багаторівневу архітектуру. Розуміння того, як мережа робить прогноз, може бути складним завданням.

Моделі глибокого навчання зазвичай потребують більших наборів даних, щоб ефективно вивчати складні закономірності та уникати надмірної підгонки.

Регресія з глибоким навчанням більше підходить для складних завдань, таких як розпізнавання зображень і мови, обробка природної мови і складних нелінійних регресійних задач.

Висновки за розділом 2

Розглянемо оцінку показника Херста як задачу регресії, тобто необхідно передбачити значення параметра Херста на основі значень спектрів вейвлет-енергій, отриманих із реалізацій. Одним із потужних інструментів побудови регресії є нейронні мережі.

Ми припускаємо, що зв'язок між спектрами вейвлет-енергій і показником Херста є нелінійним. Якщо зв'язок є нелінійним, нейронна мережа може вловлювати складні закономірності та нелінійності, дозволяючи точніше прогнозувати показник Херста, ніж лінійна регресія, що використовується при статистичній оцінці на основі вейвлетів.

Нейронні мережі можуть автоматично вивчати та фіксувати відносини між спектрами вейвлет-енергій і показником Херста. У лінійній регресії потрібно чітко визначити взаємодії, тоді як нейронні мережі можуть виявляти та моделювати ці взаємодії самостійно.

Також є переваги використання сигмоїдної функції активації для оцінки показника Херста. Ця функція активації традиційно була дуже популярною функцією активації для нейронних мереж. Сигмоїдна функція допомагає нормалізувати вихід будь-якого вхідного сигналу між 0 і 1. У нашому випадку це добре узгоджується з діапазоном значень показника Херста.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Python як інструмент роботи з даними

Python – це популярна багатоцільова мова програмування, яка широко використовується завдяки своїй гнучкості, а також великій колекції бібліотек, які є цінними для аналітики та складних обчислень.

Інструменти роботи з даними в Python стали популярними завдяки широкому розповсюдженню комп'ютерної мови та її універсальності, коли справа стосується розробки багатогранних рішень.

Крім того, продуктивність Python набагато вища, ніж інші популярні мови, що використовуються в аналітиці даних, а його сумісність із більшою кількістю інших мов означає, що в більшості випадків він зручніший.

Існує багато спеціальних розширень і бібліотек, які можна використовувати за допомогою Python, які ідеально підходять для обробки даних та машинного навчання. Незважаючи на те, що існують великі можливості, коли мова заходить про використання мови Python, при роботі лише зі стандартними бібліотеками, є також ряд бібліотек, які працюють не тільки з Python, але й допомагають нам з наукою про дані.

Розглянемо декілька різних бібліотек для науки про дані та Python, і побачимо, наскільки добре вони можуть допомогти в даній роботі.

NumPy – один із найбільш фундаментальних пакетів у Python – універсальний пакет для обробки масивів. Він пропонує високопродуктивні об'єкти багатовимірних масивів та інструменти для роботи з масивами. NumPy – це ефективний контейнер універсальних багатовимірних даних.

Основний об'єкт NumPy – це однорідний багатовимірний масив. Це таблиця елементів чи чисел одного типу даних, проіндексована набором натуральних чисел. У NumPy розміри називаються осями, а кількість осей називається рангом. Клас масиву NumPy називається ndarray, він же array.

NumPy використовується для обробки масивів, в яких зберігаються значення одного і того ж типу даних. NumPy полегшує математичні операції над масивами та їх векторизацію. Це значно підвищує продуктивність та, відповідно, прискорює час виконання.

Бібліотека SciPy є одним із ключових пакетів, які складають стек SciPy. SciPy ґрунтується на об'єкті масиву NumPy і є частиною стека, який включає такі інструменти, як Matplotlib, Pandas і SymPy з додатковими інструментами.

Бібліотека SciPy містить модулі для ефективних математичних процедур, таких як лінійна алгебра, інтерполяція, оптимізація, інтеграція, статистика, прості диференціальні рівняння та обробка сигналів. Основний функціонал бібліотеки SciPy побудований на NumPy та його масивах.

Matplotlib є однією з найкращих бібліотек для візуалізації у Python, з якою можна працювати, щоб переконатися, що ми зможемо створювати й обробляти деякі з простих і найпотужніших візуальних елементів у найкоротші терміни. це дійсно потужна частина програмного забезпечення, яка допоможе нам отримати результати, коли виконуємо алгоритми, а потім без зусиль перетворити їх у те, що ми зможемо побачити і зрозуміти легше, ніж раніше.

На додаток до роботи з різними діаграмами та графіками, ми можемо працювати з деякими іншими можливостями, які використовуються в цій мові та цій бібліотеці. Ми можемо використовувати цю бібліотеку та деякі функції, щоб працювати зі створенням сіток, легенд і міток, щоб полегшити форматування наших візуальних елементів.

Scikit-Learn є надійною бібліотекою машинного навчання для Python. Він надає ряд контрольованих та неконтрольованих алгоритмів навчання через узгоджений інтерфейс у Python:

- класифікація: виявлення спаму, розпізнавання зображень;
- кластеризація: вплив лікарських препаратів, ціна акцій;
- регресія: сегментація клієнтів, угруповання результатів експерименту;
- зменшення розмірності: візуалізація, підвищена ефективність;
- вибір моделі: підвищена точність завдяки налаштуванню параметрів;

– попередня обробка: підготовка вхідних даних як тексту для обробки з допомогою алгоритмів машинного навчання.

Scikit Learn фокусується на моделюванні даних, а не маніпулюванні даними.

TensorFlow – це бібліотека, яка допомагає розробникам створювати великомасштабні нейронні мережі з багатьма шарами, використовуючи графіки потоків даних. TensorFlow також полегшує побудову моделей глибокого навчання, просуває сучасну технологію машинного навчання та дозволяє легко розгорнути програми на базі машинного навчання.

TensorFlow досить ефективний, коли справа доходить до класифікації, сприйняття, розуміння, виявлення, прогнозування та створення даних.

Keras – це високорівневий API TensorFlow для створення та навчання коду глибоких нейронних мереж. Це бібліотека нейронних мереж з відкритим кодом на Python. З Keras статистичне моделювання, робота із зображеннями та текстом набагато легше зі спрощеним кодуванням для глибокого навчання.

Keras – це бібліотека для роботи з нейронними мережами, написана мовою Python, а TensorFlow – це бібліотека з відкритим вихідним кодом для різних завдань машинного навчання. TensorFlow надає як високорівневі, так і низькорівневі API, тоді як Keras надає лише високорівневі API. Keras створений для Python і робить його більш зручним, модульним та компонованим, ніж TensorFlow.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі оцінки показника Херста

Алгоритм розв'язання задачі оцінки показника Херста складається з трьох частин: генерація набору даних, навчання нейронної мережі, валідація та застосування.

Розглянемо генерацію набору даних. Вона складається з наступних етапів:

- побудувати часові ряди використовуючи методи моделювання фрактального броунівського руху;
- провести min-max нормалізацію за формулою кожного часового ряду

$$x_{i,norm} = \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}},$$

де $x_{i,norm}$ – нормалізований елемент часового ряду;

x_{\min} – найменший елемент часового ряду;

x_{\max} – найбільший елемент ряду;

x_i – i -й неперетворений елемент ряду;

- побудувати різницеві часові ряди;
- розрахувати спектри вейвлет-енергій часових рядів за формулою (2.4);
- розбити набір даних на навчальний і тренувальний.

Перейдемо до навчання нейронної мережі:

– побудувати архітектуру нейронної мережі. У нашому випадку використовується нейронна мережа, що складається з 5 прихованих шарів із функціями активації ReLu та шару виходу з сигмоїдною функцією активації;

– вказати оптимізатор та функцію втрат. У нашому випадку використовується функція оптимізації Adam та середньоквадратична помилка в якості функції втрат.

У результаті отримуємо модель для прогнозування показник Херста. Останньою стадією є валідація та застосування. Вона складається з наступних етапів:

- перевірка на перенавчання та недонавчання. Якщо нейронна мережа перенавчилася або кінцеве значення середньоквадратичної помилки не є втішним, то провести навчання нейронної мережі змінивши гіперпараметри, поки не отримаємо задовільний результат;
- зберегти задовільну модель;

- провести нормалізацію, різницеве перетворення та розрахування спектрів вейвлет-енергій для шуканих часових рядів;
- застосувати модель на спектр вейвлет-енергій шуканих часових рядів.

3.3 Опис програми

Програма написана мовою програмування Python у середовищах PyCharm, Jupyter Notebook та Kaggle. Метою програми є створення регресійної моделі, яка може оцінити показник Херста часового ряду, спектр вейвлет-енергій якого був поданий до нейронної мережі.

У першій частині роботи були імплементовані алгоритми моделювання фрактального броунівського руху.

У другій частині ми змодельовали сигнали, нормалізували їх, побудували різницеві часові ряди та розрахували вейвлет-енергії цих різницевих рядів. Також в цій частині ми зберігли отримані вейвлет-енергії. Приклад часового ряду та відповідного різницевого ряду на рис. 3.1.

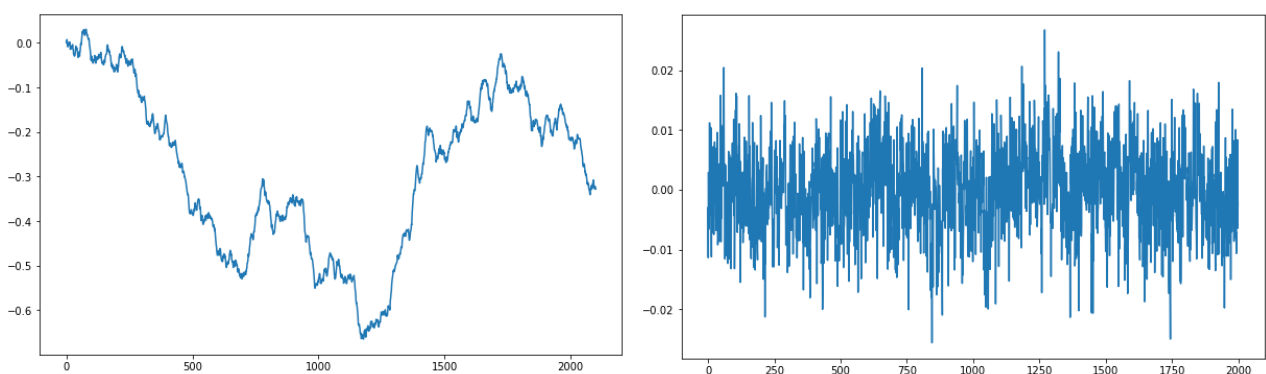


Рисунок 3.1 – Змодельований часовий ряд та його вейвлет-перетворення

У третій частині ми створили нейронну мережі для змодельованих даних, навчили їх та перевірили якість регресії за допомогою середньоквадратичної помилки. Приклад створення нейронної мережі зображено на рис. 3.2.

У четвертій частині ми реалізували алгоритми методів Уіттла та вейвлет-оцінювання показника Херста.

У п'ятій частині були порівняні результати методів Уіттла, вейвлет-оцінювання показника Херста та нейронної мережі за зміщенністю та середньоквадратичним відхиленням оцінок.

```
import tensorflow as tf
from tensorflow.keras.models import Sequential
from tensorflow.keras.layers import Dense, Flatten, GlobalAveragePooling2D
from tensorflow.keras.utils import plot_model

try:
    tpu = tf.distribute.cluster_resolver.TPUClusterResolver.connect()
    print("Device:", tpu.master())
    strategy = tf.distribute.TPUStrategy(tpu)
except:
    strategy = tf.distribute.get_strategy()
print("Number of replicas:", strategy.num_replicas_in_sync)

with strategy.scope():
    input_b = tf.keras.Input(shape=(10,))
    model_b = Dense(512, input_shape=(10, ), activation='relu')(input_b)
    model_b = Dense(512, activation='relu')(model_b)
    model_b = Dense(256, activation='relu')(model_b)
    model_b = Dense(256, activation='relu')(model_b)
    model_b = Dense(256, activation='relu')(model_b)
    model_b = Dense(1, activation='sigmoid')(model_b)

model = tf.keras.Model(inputs=input_b, outputs=model_b)

model.compile(optimizer='adam', loss='mean_squared_error',
              metrics=['mean_squared_error'])
```

Рисунок 3.2 – Приклад створення нейронної мережі

Висновки за розділом 3

Програмна реалізація експерименту виконана у середовищі PyCharm, Jupyter Notebook та Kaggle на мові Python, яка містить багато бібліотек, призначених для реалізації методів машинного навчання та обробки даних.

Програмна реалізація складається з наступних частин: створення набору даних для тренування нейронної мережі, створення і навчання нейронної мережі та порівняння ефективності нейронної мережі, статистичної метода на основі вейвлетів і метода Уіттла для оцінки показника Херста.

На етапі створення набору даних для тренування нейронної мережі реалізована генерація набору даних, що складається з реалізацій фрактального броунівського руху; нормалізація даних; різницеве перетворення; розрахунок спектра вейвлет-енергій.

На етапі створення і навчання нейронної мережі була створена нейронна мережа, оцінена її якість та порівняна з нейронними мережами з іншими архітектурами.

На останньому етапі були імплементовані статистичний методом на основі вейвлетів і метод Уїттла для оцінки показника Херста. Також з цими методами була порівняна нейронна мережа, створена на попередньому етапі.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Вхідні дані

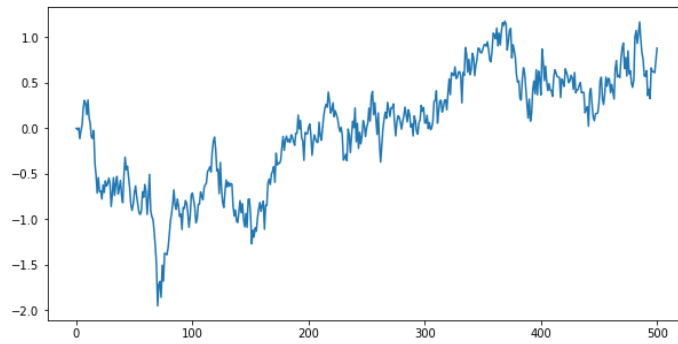
Розглянемо отримання вибірки даних, яка призначена для навчання та тестування нейронної мережі. Вхідними даними є часові реалізації, вихідними даними є відповідні значення показника Херста. Таким чином, вибірка є набором реалізацій фрактального броунівського руху з різними значеннями показника Херста. Оскільки наші дані є модельними, розмір вибірки можна вибрати довільним.

Для створення реалізацій фрактального броунівського руху показник Херста змінювався від 0,05 до 0,95 з кроком 0,01. Довжина реалізації була одним із параметрів і змінювалася в діапазоні від 200 до 2000 значень. Для кожного значення показника Херста було згенеровано набір різних реалізацій з однаковим показником Херста.

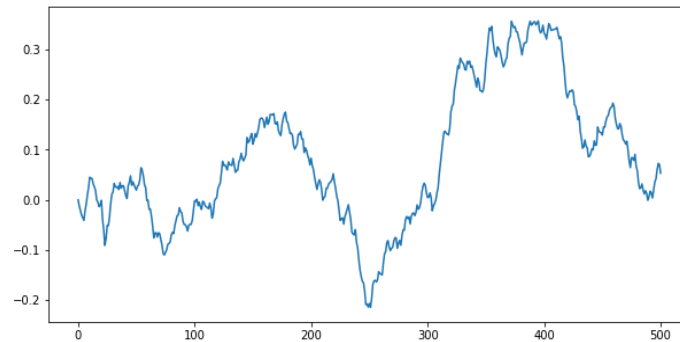
Для кожної реалізації було виконано дискретне вейвлет-перетворення та отримано спектр вейвлет-енергій. Кількість рівнів декомпозиції залежала від довжини реалізації. Вхідними даними для нейронної мережі були значення спектру вейвлет-енергій.

Навчальний набір містив 31850 спектрів вейвлет-енергій, 350 значень для кожного показника Херста. Для отримання спектрів вейвлет-енергій, 31850 реалізацій фрактального броунівського руху було згенеровано. Тестовий набір містив 13650 значень спектрів вейвлет-енергій з різними показниками Херста.

На рис. 4.1 показано реалізації фрактального броунівського руху для значень показників Херста $H = 0,3$ (верхня) і $H = 0,7$ (нижня) довжиною 500 значень.



а)



б)

Рисунок 4.1 – Реалізації фрактального броунівського руху: а) $H = 0,3$; б) $H = 0,7$

Розглянемо точність оцінки показника Херста у нашій моделі регресії. Очевидно, візуальний метод полягає в побудові гістограми оціночних значень показника Херста для деякого вибраного показника Херста. У цьому випадку також буде зручно порівняти з результатами оцінювання статистичним вейвлет-методом та методом Уїттла. Для порівняння методів будуть використані середнє значення та стандартне відхилення оцінок показників Херста для 500 різних реалізацій, та час на розрахування 500 оцінок показника Херста.

4.2 Аналіз результатів

Показник Херста фрактального броунівського руху був розрахований за допомогою статистичної оцінки на основі вейвлетів та метода Уїттла для

реалізацій різної довжини. У таблиці 4.1 наведені значення середніх, стандартних відхилень оцінок параметра Херста для значень $H = 0,3$ і $H = 0,7$ і часу розрахунку для статистичної оцінки на основі вейвлетів, у таблиці 4.2 – для метода Уїтгла. Середнє значення та стандартне відхилення були отримані шляхом усереднення 500 різних реалізацій з однаковим значенням H . Отримані вибіркові значення добре узгоджуються з результатами, представленими в роботах [4, 7, 14].

Таблиця 4.1 – Метрики статистичної оцінки на основі вейвлетів

	Довжина реалізації	
	200	2000
$H = 0,3$		
Середнє	0,242	0,265
Стандартне відхилення	0,111	0,036
Час розрахунку (с)	0,295	0,294
$H = 0,7$		
Середнє	0,587	0,695
Стандартне відхилення	0,100	0,031
Час розрахунку (с)	0,295	0,291

Для отримання оптимальної конфігурації регресійної нейронної мережі було проведено низку експериментів з різними значеннями її параметрів та розмірами навчальної множини. Критерієм оптимізації було значення середньквадратичної похибки (MSE) для валідаційного набору. В результаті була обрана описана вище архітектура нейронної мережі.

Графік зміни значень MSE навчальної та валідаційної множин в залежності від епох навчання наведено на рис. 4.2.

Таблиця 4.2 – Метрики метода Уїттла

	Довжина реалізації	
	200	2000
$H = 0,3$		
Середнє	0,303	0,298
Стандартне відхилення	0,042	0,013
Час розрахунку (с)	27,315	243,916
$H = 0,7$		
Середнє	0,690	0,700
Стандартне відхилення	0,051	0,015
Час розрахунку (с)	24,636	247,723

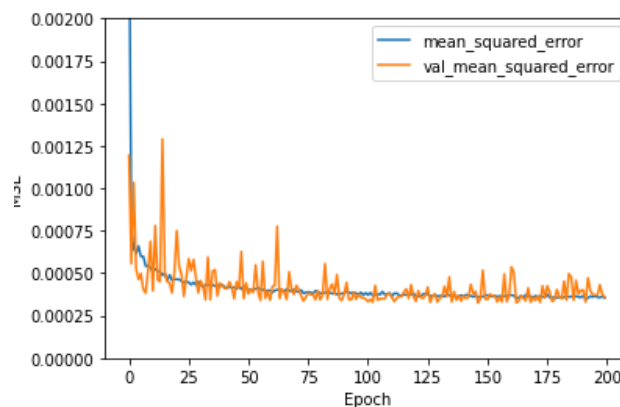


Рисунок 4.2 – MSE для навчального набору (синя лінія) та валідаційного (помаранчева лінія).

У таблиці 4.3 наведені значення середніх, стандартних відхилень оцінок параметра Херста для значень $H = 0,3$ і $H = 0,7$ і часу розрахунку для оцінки з використанням нейронної мережі. Результатом регресійної моделі була оцінка теоретичного значення показника Херста, тобто випадкового значення. Значення випадкової величини правильніше представляти у вигляді вибіркової щільності розподілу. Враховуючи те, що теоретичні значення показника Херста змінювалися з кроком 0,01, доцільно вибрати такий же інтервал для побудови гістограм.

Таблиця 4.3 – Метрики нейронної мережі

	Довжина реалізації	
	200	2000
$H = 0,3$		
Середнє	0,307	0,301
Стандартне відхилення	0,048	0,015
Час розрахунку (с)	20,154	17,376
$H = 0,7$		
Середнє	0,708	0,701
Стандартне відхилення	0,061	0,020
Час розрахунку (с)	20,215	19,096

На рис. 4.3 – 4.5 показано оцінки показника Херста, отримані для реалізацій з показником $H = 0,3$ за допомогою статистичної оцінки на основі вейвлетів, оцінки методом Уїттла та оцінки з використанням нейронної мережі відповідно. Ліворуч показані гістограми оцінок, отриманих статистичним розрахунком, а праворуч – за допомогою нейронної мережі. Гістограми, показані ліворуч, отримані з реалізацій довжиною 200 значень, праворуч – 2000 значень.

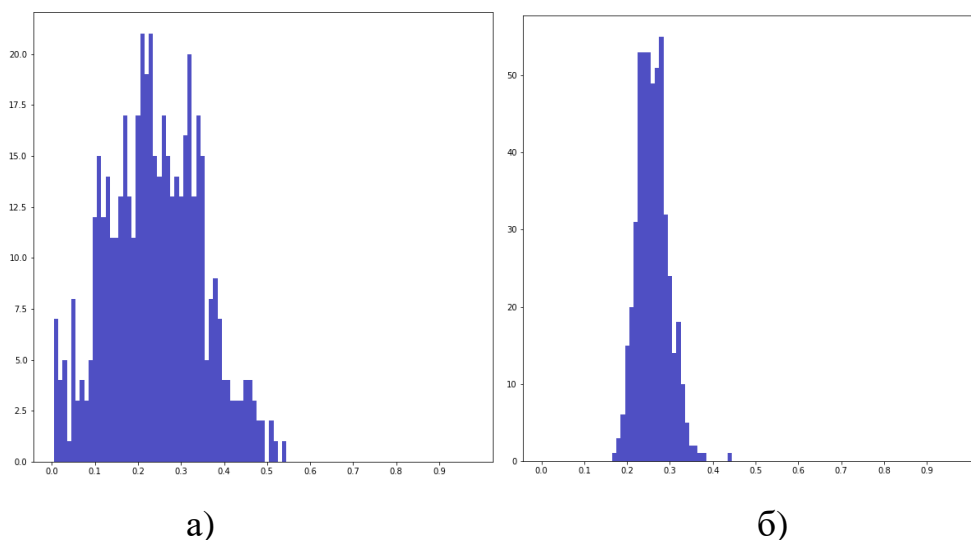


Рисунок 4.3 – Гістограми для статистичної оцінки на основі вейвлетів з довжинами реалізацій а) 200, б) 2000 значень

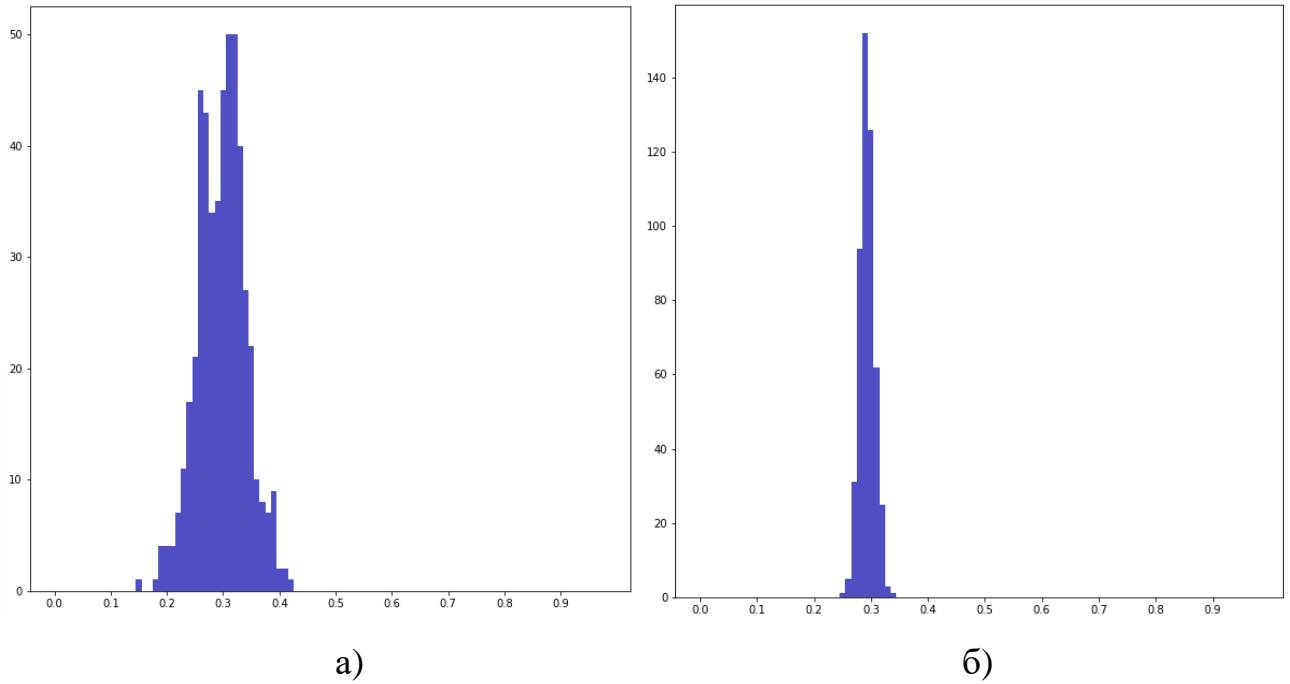


Рисунок 4.4 – Гістограми для оцінки методом Уїтгла з довжинами реалізацій а) 200, б) 2000 значень

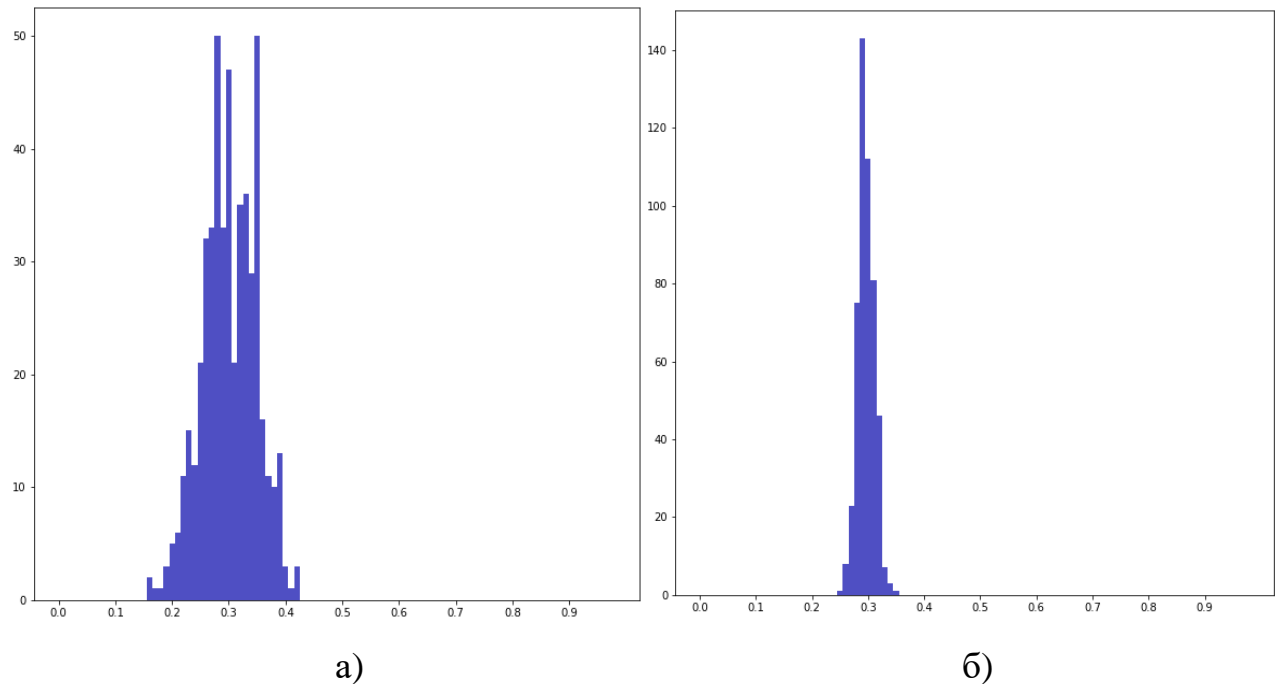


Рисунок 4.5 – Гістограми для статистичної оцінки з використанням нейронної мережі з довжинами реалізацій а) 200, б) 2000 значень

Статистичні оцінки показника Херста на основі вейвлетів, крім достатньо великого стандартного відхилення, мають значне зміщення, яке, як і стандартне

відхилення, зменшується зі збільшенням довжини реалізації. В свою чергу, оцінки показника Херста за методом Уїттла мають мале стандартне відхилення та не є зміщеними, але час розрахунку за методом Уїттла значно довший ніж час розрахунку з використанням нейронної мережі і він росте зі збільшенням довжини реалізації.

Висновки за розділом 4

Було створено 2 вибірки, що складаються зі спектрів вейвлет-енергій і відповідного показника Херста. Для створення спектрів вейвлет-енергій були побудовані реалізації фрактального броунівського руху, для яких показник Херста змінювався від 0,05 до 0,95 з кроком 0,01. Для кожного значення показника Херста було згенеровано набір різних реалізацій з однаковим показником Херста. Для першої вибірки реалізації фрактального броунівського руху мали довжину 200, а для другої – 2000.

Для наборів даних була знайдена найбільш задовільна архітектура нейронної мережі. Точність і час роботи нейронної мережі був порівняний зі статистичною оцінкою на основі вейвлетів і методом Уїттла. Показниками точності є зміщеність та стандартне відхилення. Також побудована візуалізація для порівняння всіх розглянутих методів оцінки показника Херста.

За результатами порівняння виявилось, що статистичні оцінки на основі вейвлетів, на відміну від метода Уїттла та нейронної мережі, є зміщеними при малих довжинах реалізацій фрактального броунівського руху. Також статистичний розрахунок на основі вейвлетів є найшвидшим методом з розглянутих. Стандартне відхилення для оцінок за допомогою нейронної мережі не сильно відрізняється від оцінок, отриманих методом Уїттла, але час виконання метода Уїттла значно збільшується з ростом довжини реалізацій.

ВИСНОВКИ

У роботі проведена оцінка показника Херста реалізацій фрактального броунівського руху на основі розпізнавання відповідних вейвлет-спектрів. До часових реалізацій застосовувалися нормалізація, різницеве перетворення і дискретне вейвлет-перетворення. Перехід від сигналу в часовій області до спектру вейвлет-енергій дозволив виділити інформацію про самоподібність часового ряду. Отримані спектри вейвлет-енергій були оброблені за допомогою регресійної нейронної мережі, у результаті чого отримані оцінки показника Херста.

У роботі розглянута задача регресії, пов'язана із змодельованими реалізаціями фрактального броунівського руху. Для проведення чисельних експериментів було обрано два різних показника Херста і реалізації двох різних довжин. Таким чином, були розглянуті чотири випадки оцінки показника Херста реалізацій фрактального броунівського руху. Оцінка за допомогою нейронної мережі були порівняні зі статистичною оцінкою на основі вейвлетів і методом Уїтгла.

Отримані результати підтверджують, що оцінка реалізацій фрактального броунівського, заснована на регресії спектрів вейвлет-енергій, є точною у порівнянні зі статистичною оцінкою на основі вейвлетів і методом Уїтгла. Запропонований метод оцінки показника Херста є ефективним і компетентним.

Подальші дослідження будуть зосереджені на двох напрямках. Перше: додати до регресійної моделі ознаки, отримані на основі інших методів оцінки, що має призвести до підвищення точності. Друге: розширити навчальний набір реалізацій різноманітних моделей самоподібних процесів, що дасть можливість працювати з реальними часовими рядами.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Павленко К. О. Оцінка показника Херста на основі вейвлетів за допомогою нейронної мережі. *27-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті»* : зб. матеріалів форуму. Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2023. С. 175–176.
2. Pavlenko K. Application of machine learning to estimate the Hurst exponent. *II International Scientific & Practical Conference «Learning & Teaching: after War and during Peace»*. 2023. P. 222.
3. Kirichenko L., Pavlenko K., Khatsko D. Wavelet-Based Estimation of Hurst Exponent Using Neural Network. *2022 IEEE 17th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT)*. 2022. №1. P. 40 – 43.
4. Abry P., Goncalves P., Veitch D. L. Scaling, Fractals and Wavelets. London : John Wiley & Sons, 2013. 464 p.
5. Fractal Analysis - Applications in Physics, Engineering and Technology. URL: <https://www.intechopen.com/books/fractal-analysis-applications-in-physics-engineering-and-technology> (дата звернення: 02.10.2023).
6. Feder J. Fractals. New York : Springer New York, 1988. 284 p.
7. Kirichenko L., Radivilova T. Generalized approach to analysis of multifractal properties from short time series. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2020. № 11 (5). P. 183 – 198.
8. Self-similarity and longrange dependence through the wavelet lens / Abry P., Flandrin P., Taqqu M. S., Veitch D. *Long Range Dependence: Theory and Applications*. 2002. №21. P. 125–160.
9. Fractional Brownian motion with random Hurst exponent: accelerating diffusion and persistence transitions. URL: <https://doi.org/10.48550/arxiv.2206.03818> (дата звернення: 04.10.2023).
10. Ivanisenko I., Kirichenko L., Radivilova T. Investigation of multifractal properties of additive data stream. *2016 IEEE First International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP)*. 2016. P. 305–308.

11. Kirichenko L., Radivilova T. Analyzes of the distributed system load with multifractal input data flows. *2017 14th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM) – 2017*. №. 14. P. 260–264.
12. Identifying diffusive motions in single-particle trajectories on the plasma membrane via fractional time series models. URL: [10.1103/PhysRevE.99.012101](https://arxiv.org/abs/10.1103/PhysRevE.99.012101) (дата звернення: 04.10.2023).
13. Clegg R. G. A practical guide to measuring the Hurst parameter. *International Journal of Simulation. Systems, Science & Technology*. 2006. № 3. P. 3–14.
14. Oswiecimka P., Kwapin J., Drozd S. Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures. *Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2006. № 74. P. 161–203.
15. Fractional Brownian Motion: Approximations and Projections / Banna O., Mishura Yu., Ralchenko K., Shklyar S. London : John Wiley & Sons, 2019. 288 p.
16. Abry P., Veitch D. Wavelet analysis of long-range dependent traffic. *IEEE/ACM Transactions Information Theory* 1. 1998. № 44. P. 2–15.
17. Wavelet Tools for Scaling Processes. Turbulence: measurements and signals. URL: <https://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/Cargese02.pdf> (дата звернення: 13.10.2023).
18. Géron A. Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems. Sebastopol : O'Reilly Media, 2020. 856 p.
19. Granik N. Single-Particle Diffusion Characterization by Deep Learning / Granik N., Weiss L. E., Nehme E. [and others]. *Biophysical Journal*. 2019. №. 33. P. 185–192.
20. Deep learning for time-series analysis. URL: <http://arxiv.org/abs/1701.01887> (дата звернення: 05.10.2023).
21. Deep learning for time series classification: a review / Ismail Fawaz H., Forestier G., Weber J. [and others.]. *Data Mining and Knowledge Discovery*. 2019.

№ 117. P. 917–963.

22. Time series classification with discrete wavelet transformed data / Li D., Bissyande T.F., Klein J., Traon Y.L. *Int. J. Softw. Eng. Knowl. Eng.* 2016. № 26. P. 1361–1377.

23. Measurement of anomalous diffusion using recurrent neural networks. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.010102> (дата звернення: 10.10.2023).

24. Classification of particle trajectories in living cells: machine learning versus statistical testing hypothesis for fractional anomalous diffusion : education manual. / Janczura J., Kowalek P., Loch-Olszewska H. [and others]. College Park : American Physical Society, 2020. 13 p.

25. Classification of diffusion modes in single-particle tracking data: Feature-based versus deep-learning approach. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032410> (дата звернення: 08.10.2023).

26. Muñoz-Gil G., Volpe G., Garcia-March M. A. Objective comparison of methods to decode anomalous diffusion. *Nat Commun.* 2021. № 12. P. 63.

27. Kirichenko L., Zinchenko P., Radivilova T. Classification of time realizations using machine learning recognition of recurrence plots. *Springer.* 2021. № 1246. P. 687–696.