

УДК 621.391:537.86:519

## МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ЭВМ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ РАЗЛИЧНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ

В.М. БЕЗРУК

Рассмотрены методы моделирования случайных процессов, которые получены с использованием различных вероятностных моделей — в виде ортогональных разложений случайных процессов, линейных, периодически коррелированных случайных процессов.

Method of simulating random processes obtained with the help of different probabilistic models — in the form of orthogonal resolutions of random processes, linear, periodically correlated processes are considered.

Важным этапом проектирования любой радиоэлектронной системы является проведение исследований методом статистического моделирования на ЭВМ. При этом математические модели отдельных устройств либо системы в целом реализуются программно на ЭВМ и проводятся статистические испытания на смоделированных выборках сигналов и помех, характерных для решаемой прикладной задачи [1–4]. Как правило, сигналы и помехи имеют случайный характер и для их математического описания используются различные вероятностные модели — классы случайных процессов с определенными вероятностными свойствами. Их моделирование сводится к получению на ЭВМ ансамбля реализаций случайных процессов, статистические характеристики которых близки к заданным характеристикам реальных сигналов и помех.

Моделирование случайных процессов базируется на некоторых функциональных преобразованиях совокупности некоторых базовых случайных величин [1, 4, 5]. Методы моделирования определяются требуемыми вероятностными свойствами процессов и во многом зависят от математической модели, выбранной для описания сигналов и помех. Разнообразие радиоэлектронных систем и решаемых ими прикладных задач определяет актуальную необходимость расширения перечня методов моделирования на ЭВМ случайных процессов с разными вероятностными свойствами.

Для математического описания сигналов могут быть использованы различные вероятностные модели [6–9]. Наряду с классическими математическими моделями случайных сигналов в последние десятилетия рядом ведущих ученых Украины и России были развиты вероятностные модели, которые могут описывать специфические свойства реальных сигналов и помех, характерных для ряда прикладных задач. В частности, это вероятностные модели в виде периодически коррелированных случайных процессов; линейных случайных процессов; марковских и немарковских случайных процессов; разрывных случайных процессов; ортогональных разложений случайных процессов;

смесей распределений и совокупности моментных и кумулянтных функций случайных процессов. Особенности построения и применения вероятностных моделей при обработке сигналов рассмотрены в коллективной монографии [7, 8]. Полученные достижения в области вероятностных моделей составили теоретическую основу для получения новых методов моделирования случайных процессов.

В данной работе рассмотрены некоторые методы моделирования на ЭВМ случайных процессов, которые получены с использованием характерных особенностей ряда указанных вероятностных моделей.

### 1. Основные принципы моделирования на ЭВМ случайных элементов

Основные принципы моделирования на ЭВМ случайных элементов заключаются в следующем [5]:

1) всякий случайный элемент определяется (“конструируется”) как некоторая борелевская функция от простейших, так называемых базовых случайных величин;

2) должно быть обеспечено сходство между оригиналом и его моделью на ЭВМ, состоящее в совпадении (близости) вероятностных законов распределения или числовых характеристик.

Базовая случайная величина (БСВ) получается в результате проведения на ЭВМ простейшего случайного эксперимента, который состоит в бросании наугад точки в полуинтервал  $[0, 1)$ . Математической моделью такого эксперимента является вероятностное пространство  $(\Omega, F, P)$ , где  $\Omega$  — пространство элементарных событий  $\omega \in \Omega$  (каждое событие заключается в том, что координата брошенной точки равна  $\omega$ );  $F$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная полуинтервалами из  $\Omega$ ;  $P(A)$  — вероятностная мера, определенная для подмножеств  $A \in F$  и совпадающая с мерой Лебега, так что  $P([0, x]) = x$ ,  $x \in [0, 1)$ .

Случайная величина, заданная на  $(\Omega, F, P)$  как  $\alpha(\omega) = \omega$ , порождает вероятностное пространство  $(R, B, P_\alpha)$ , где  $R$  — числовая прямая;  $B$  — борелевская

$\sigma$ -алгебра, построенная на полуинтервалах из  $R^1$ ;  $P_\alpha(A) = P(\alpha^{-1}(A))$  — индуцированная вероятностная мера (закон распределения). Случайная величина  $\alpha(\omega)$  имеет равномерную плотность распределения на полуинтервале  $[0, 1)$ .

Реализации такой БСВ могут быть получены с помощью табличного, физического либо программного датчика. На практике наибольшее распространение получили программные датчики БСВ. В программном обеспечении каждой ЭВМ имеется стандартная программа, при последовательном обращении к которой получают независимые реализации случайной величины с равномерной плотностью распределения.

При моделировании на ЭВМ более сложных случайных элементов (случайных величин, векторов, процессов, полей) с требуемыми вероятностными характеристиками рассматривается составной случайный эксперимент, который заключается в повторении  $r \geq 1$  раз независимо друг от друга описанного выше простейшего эксперимента. Составной эксперимент описывается вероятностным пространством  $(\Omega', F', P_r)$ , где  $\Omega' = \Omega \times \dots \times \Omega$  —  $r$ -членное декартово произведение полуинтервалов  $[0, 1)$ ;  $F'$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, построенная на подмножествах множества  $\Omega'$  и содержащая декартово произведение  $F \times \dots \times F$ ;  $P_r(A)$  — вероятностная мера, определяемая соотношением

$$P_r(A) = \prod_{i=1}^r P(A_i), \text{ где } A = A_1 \times \dots \times A_r \in F'.$$

На вероятностном пространстве  $(\Omega', F', P_r)$ , которое будем называть базовым, определяют  $r$  независимых БСВ  $\alpha_i(\omega) = \omega_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ ;  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r) \in \Omega'$ . Согласно первому принципу моделирования всякий сложный случайный элемент  $\Xi(\omega)$  (случайная величина, вектор, процесс, поле) представляется в вероятностном пространстве  $(\Omega', F', P_r)$  в виде борелевской функции  $\varphi(\cdot)$  от  $r$  независимых БСВ  $\Xi(\omega) = \varphi(\alpha_1(\omega), \dots, \alpha_r(\omega))$ .

Число  $r$  и функция  $\varphi(\cdot)$  выбираются такими, чтобы моделируемый случайный элемент  $\Xi(\omega)$  обладал требуемым вероятностным законом распределения. Иногда вместо совпадения законов распределения можно требовать совпадения некоторых числовых характеристик моделируемого случайного процесса и реального сигнала, в частности, математического ожидания, корреляционной функции, энергетического спектра.

Моделирование на ЭВМ случайных процессов и полей строится на определении случайной функции как параметрического семейства случайных величин  $\xi_\alpha(\omega) = \{\xi(\omega, v), \omega \in \Omega, v \in \Theta \leq R^m\}$ . Если параметр  $v$  трактуется как время  $t \in T$ , а  $m=1$  имеет место случайный процесс  $\{\xi_r(\omega, t), r = \overline{1, \rho}\}$  — векторный при  $\rho > 1$  либо скалярный при  $\rho = 1$ . Когда  $m > 1$ , а параметр  $v$  рассматривается как вектор  $v = \vec{q}$ , имеет место случайное поле  $\{\xi_r(\omega, \vec{q}), r = \overline{1, \rho}\}$  — векторное при  $\rho > 1$  либо скалярное при  $\rho = 1$ .

При моделировании на ЭВМ параметрам  $t$  и  $\vec{q}$  придают дискретные значения, поэтому случайные процессы и поля формируются как упорядоченные случайные последовательности. В частности, для случайного процесса формируется последовательность значений случайной функции в точках  $t_j, j = \overline{1, N}$ :  $\xi(\omega, t_1), \xi(\omega, t_2), \dots, \xi(\omega, t_N)$ . При этом фактически моделируется случайный вектор

$$\bar{\xi}(\omega) = (\xi(\omega, 1), \dots, \xi(\omega, N)),$$

функция распределения которого совпадает с функцией распределения соответствующих сечений случайного процесса. Поэтому для моделирования случайных процессов применимы все методы моделирования случайных векторов. При этом для некоторого натурального  $r$  строится вероятностное пространство  $(\Omega', F', P_r)$  и задаются на нем  $r$  независимых БСВ  $\alpha_1(\omega), \dots, \alpha_r(\omega)$ , распределенных по равномерному закону. При независимости сечений случайного процесса каждый отсчет  $\xi(\omega, t_j)$  моделируется отдельно с помощью некоторого функционального преобразования полученных  $r$  БСВ:  $\xi(\omega, t_j) = f_j(\alpha_1(\omega), \dots, \alpha_r(\omega)), j = \overline{1, N}$ . Здесь вид функций  $\{f_1(\cdot), \dots, f_N(\cdot)\}$  и число  $r$  подбираются так, чтобы достичь совпадения или близости законов распределения или числовых характеристик для модели случайного процесса, реализованной на ЭВМ, и реального сигнала. В общем случае моделирование усложняется, поскольку приходится учитывать зависимость значений случайного процесса в разные моменты времени. При больших значениях  $N$  эти алгоритмы могут привести к значительным вычислительным затратам. Поэтому учет при моделировании специальных свойств случайных процессов, характерных каждой вероятностной модели (независимости приращений, марковости, коррелированности, однородности, эргодичности и др.), позволяет получать более простые и эффективные алгоритмы моделирования для каждого класса случайных процессов.

Рассмотрим методы моделирования случайных процессов, полученные с использованием основных типов вероятностных моделей в виде ортогональных разложений, случайных процессов с независимыми приращениями, а также марковских, линейных, и периодически коррелированных случайных процессов [9].

## 2. Моделирование случайных процессов на основе ортогональных разложений

Моделирование случайных процессов с ограниченной энергией может выполняться с использованием ортогональных разложений. При выборе конечного числа членов в ортогональном разложении можно прийти к следующему моделирующему алгоритму [6, 9]:

$$\xi(\omega, k) = \sum_{j=0}^N d_j(\omega) \Psi_j(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Существует несколько типов ортогональных разложений. Для моделирования удобно использовать 1-й и 3-й типы ортогонального разложения, когда базисные функции  $\{\Psi_j(k)\}_{j=1}^N$  ортогональны, а коэффициенты разложения  $d_j(\omega)$  соответственно коррелированные или некоррелированные между собой.

Таким образом, получение на ЭВМ реализаций случайного процесса согласно алгоритму (1) сводится к выбору ортогонального базиса  $\{\Psi_j(k)\}_{j=1}^N$ , числа членов разложения  $N$ , а также моделированию случайного вектора с заданными вероятностными характеристиками.

При использовании для моделирования разных типов ортогональных разложений изменяются способы задания коэффициентов разложения и ортогонального базиса.

*Использование 1-го типа разложений.* При моделировании выбирается произвольный ортогональный базис  $\{\Psi_j(k)\}_{j=1}^N$ . Поскольку коэффициенты разложения  $d_j(\omega)$  в общем случае коррелированы между собой, при этом должна задаваться корреляционная матрица  $R_{\vec{d}}$  для вектора коэффициентов разложения  $\vec{d}(\omega)$  моделируемого процесса в этом базисе.

Моделирование случайного процесса сводится к получению реализаций случайного вектора  $\vec{d}(\omega)$  с заданной корреляционной матрицей и вычислению случайной последовательности согласно алгоритму (1) при выбранном базисе  $\{\Psi_j(k)\}_{j=1}^N$ .

*Использование 3-го типа разложений.* При дополнительном предположении о конечности мощности моделируемого процесса 3-й тип разложений приводит к разложению Карунена-Лоэва с некоррелированными между собой коэффициентами разложения. В этом случае ортогональные базисные функции  $\{\Psi_j(k)\}_{j=1}^N$  и дисперсии коэффициентов разложения  $\sigma^2$  находятся в виде собственных функций и собственных значений из интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Ядром уравнения является корреляционная функция (матрица) моделируемого случайного процесса  $R(k, m)$ . Однако сравнительно несложное решение такого уравнения можно получить аналитически лишь в некоторых специальных случаях, например, для стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плоскостью.

Можно использовать приближенный способ получения базисных функций  $\{\Psi_j(k)\}_{j=1}^N$  и дисперсий  $\sigma^2$  коэффициентов разложения  $\vec{d}(\omega)$  по заданной корреляционной функции  $R(k, m)$  моделируемого случайного процесса. Он сводится к следующим вычислениям [1, 9]:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= R(1,1); \quad \Psi_1(k) = \frac{1}{\sigma_1^2} R(k,1); \\ . &. . . . . \\ \sigma_m^2 &= R(m,m) - \sum_{l=1}^{m-1} \sigma_l^2 \Psi_l^2(k); \\ \Psi_m(k) &= \frac{1}{\sigma_m^2} \left[ R(k,m) - \sum_{l=1}^{m-1} \sigma_l^2 \Psi_l(k) \Psi_l(m), \right], \\ m &= \overline{2,N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2}$$

В ряде случаев базисные функции и дисперсии коэффициентов разложения могут быть найдены численными методами на ЭВМ путем решения соответствующего матричного уравнения

$$\Phi^{tr} R \Phi = \Lambda, \quad (3)$$

где  $\Phi$  — матрица собственных векторов корреляционной матрицы  $R$ ;  $\Lambda$  — диагональная матрица собственных значений корреляционной матрицы  $R$ .

Таким образом, моделирование случайного процесса включает следующие этапы:

вычисление по заданной корреляционной функции  $R(k, m)$  моделируемого процесса базисных функций  $\{\Psi_j(k)\}_{j=1}^N$  и дисперсий коэффициентов разложения  $d_j(\omega)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , которые равны соответствующим собственным значениям  $\sigma_j^2 = \lambda_j$ ;

получение реализаций координат вектора  $\vec{d}(\omega)$  в виде совокупности независимых случайных величин  $d_j(\omega)$ ,  $j = \overline{1, N}$ , с нулевыми математическими ожиданиями и заданными дисперсиями  $\sigma_j^2$ ,  $j = \overline{1, N}$ ;

формирование реализации случайной последовательности  $\xi(\omega, k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  согласно алгоритму (1) при заданных  $\{\Psi_j(k)\}_{j=1}^N$  и полученных реализациях коэффициентов разложения  $d_j(\omega)$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

*Использование ортогональных разложений с традиционными базисами.* Иногда для моделирования случайных процессов удобно использовать ортогональное разложение 3-го типа, в котором собственными функциями являются традиционные координатные функции (гармонические, Уолша, Хаара и др.). В частности, для моделирования стационарных случайных процессов можно применить следующий моделирующий алгоритм [4, 9]:

$$\xi(\omega, k) = \sum_{j=0}^N \left[ v_j(\omega) \cos \frac{j\pi k}{N} + u_j(\omega) \sin \frac{j\pi k}{N} \right], \quad (4)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $v(\omega)$ ,  $u(\omega)$  — некоррелированные между собой случайные величины с нулевым математическим ожиданием и заданной дисперсией  $(0, \sigma^2)$ .

При равенстве дисперсий в парах коэффициентов  $v_j(\omega)$ ,  $u_i(\omega)$  с одинаковым индексом случайный про-

цесс (4) является стационарным в широком смысле, а его корреляционная функция  $R(m)$  представляется в виде разложения в ряд Фурье

$$R(m) = \sum_{j=0}^N \sigma_j^2 \cos \frac{j\pi m}{N}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Если за пределами интервала  $T = N\Delta t$  значения корреляционной функции равны нулю либо пренебрежимо малы, то дисперсии коэффициентов разложения в алгоритме (4) с точностью до множителя совпадают со значениями спектральной плотности  $G(\lambda)$  моделируемого случайного процесса в точках  $\lambda_j = \frac{j\pi}{T}$ .

Когда моделируемый случайный процесс является гауссовским, то распределения случайных коэффициентов разложения  $d_j(\omega)$ ,  $v_j(\omega)$ ,  $u_j(\omega)$  также задаются гауссовскими. При других распределениях соотношения (1), (4) позволяют моделировать случайные процессы только в рамках корреляционных приближений.

### 3. Моделирование однородных случайных процессов с независимыми приращениями

Моделирование на ЭВМ случайных процессов с независимыми приращениями и дискретным временем в общем случае может сводиться к получению одномерных действительных последовательностей сумм [6, 9]

$$\eta(\omega, k) = \sum_{j=0}^k \xi(\omega, j), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где  $\{\xi(\omega, j), j = 0, 1, 2, \dots\}$  — последовательность независимых случайных величин. Случайная последовательность  $\eta(\omega, k), k = 0, 1, 2, \dots$ , имеющая независимые приращения  $\{\eta(\omega, l) - \eta(\omega, l-1)\}$ , может служить удобной моделью процессов с независимыми приращениями и дискретным временем  $t_k = \Delta t k, k = 0, 1, 2, \dots$ . При моделировании начальное значение такого процесса  $\xi(\omega, t_0)$  согласно определению выбирается равным 0. Как следует из выражения (5), текущие отсчеты процесса  $\eta(\omega, t_k), k = 0, 1, 2, \dots$ , можно определить через предыдущие отсчеты из рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} \eta(\omega, t_k) &= \eta(\omega, t_{k-1}) + v(\omega, t_k), \\ t_k &= k\Delta t, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $v(\omega, t_k)$  — независимые случайные величины с заданным распределением.

Если возможен предельный переход при уменьшении временного интервала  $\Delta t$ , на котором берется приращение, то получаемая согласно соотношению (6) случайная последовательность в пределе имеет свойства, близкие к свойствам случайных процессов с независимыми приращениями. Во всяком случае, такая связь может рассматриваться на языке конечных разностей. Одним из характерных процессов с независи-

мыми приращениями является процесс случайного блуждания, который при определенных условиях сводится к стандартному винеровскому процессу.

Рассмотрим особенности моделирования на ЭВМ типичного представителя процессов с независимыми приращениями — пуассоновского случайного процесса, который служит для описания скачкообразно изменяющихся (импульсных) реальных процессов. Реализации пуассоновского процесса  $\pi(\omega, t)$  представляют собой функции, состоящие только из участков постоянства и скачков (приращений), которые происходят в случайные моменты времени.

Для простого пуассоновского процесса скачки равны 1, то есть реализация процесса  $\pi(\omega, t)$  принимает одно из целочисленных значений  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Для однородного пуассоновского процесса приращения  $(\pi(\omega, t_k) - \pi(\omega, t_{k-1}))$  независимы между собой для любых моментов времени и имеют распределение Пуассона

$$P[\pi(\omega, t_k) - \pi(\omega, t_{k-1}) = n] = \frac{\lambda(t_k - t_{k-1})^n}{n!} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})}, \quad (7)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Интервал времени между двумя соседними скачками пуассоновского процесса является случайной величиной с плотностью распределения

$$P_t(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0. \quad (8)$$

При моделировании вычисление случайных моментов времени можно производить согласно рекуррентному соотношению

$$t_k = t_{k-1} + \tau(\omega), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (9)$$

где  $\tau(\omega)$  — случайная величина с показательным распределением (8).

Для моделирования на ЭВМ случайной величины временного сдвига  $\tau(\omega)$  и моделирования случайных значений приращений  $(\pi(\omega, t_k) - \pi(\omega, t_{k-1}))$  с заданными распределениями можно воспользоваться методом обратной функции [1, 4].

Таким образом, моделирование на ЭВМ пуассоновских случайных процессов фактически сводится к получению последовательности случайных моментов времени  $t_k$ , в которых происходят приращения, и формированию самих приращений, равных 1 для простого пуассоновского процесса и принимающих случайные значения для обобщенных пуассоновских процессов. Начальное значение пуассоновского процесса  $\pi(\omega, t_0)$  задается равным 0.

### 4. Моделирование линейных случайных процессов

Моделирование линейных случайных процессов можно проводить на основе их классического представления для дискретного времени [6, 9]

$$\xi(\omega, k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(k, j) v(\omega, j), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

При этом моделирование сводится к формированию отклика линейного в общем случае времяинвариантного фильтра с импульсной характеристикой  $\varphi(k, j)$  на воздействие белого шума с дискретным временем  $v(\omega, j)$ . Импульсная характеристика формирующего фильтра  $\varphi(k, j)$  и вероятностные характеристики порождающего процесса  $v(\omega, j)$  полностью определяют вероятностные свойства моделируемого линейного случайного процесса.

Для моделирования стационарных случайных процессов должен использоваться стационарный формирующий фильтр  $\varphi(k - j)$  и стационарный белый шум  $v(\omega, k)$ . Моделирующий алгоритм в конечномерном случае имеет вид

$$\xi(\omega, k) = \sum_{j=0}^q \varphi(k - j) v(\omega, j), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Отсчеты моделируемого случайного процесса определяются как взвешенная сумма настоящего и прошлых отсчетов белого шума.

Таким образом, моделирование на ЭВМ стационарных линейных случайных процессов включает решение следующих основных задач:

1. Выбирается импульсная характеристика формирующего фильтра, тип и статистические характеристики порождающего процесса, исходя из условия обеспечения требуемых вероятностных характеристик моделируемого процесса.

2. Моделируется порождающий процесс, т. е. формируются реализации белого шума  $v(\omega, k)$  — последовательности независимых между собой случайных величин с заданным распределением.

3. Формируются реализации линейного случайного процесса согласно алгоритму (11) при заданной импульсной характеристике формирующего фильтра.

При выборе параметров моделирующего алгоритма (11) можно воспользоваться соотношениями, которые устанавливают связь математического ожидания, корреляционной функции, спектральной плотности, характеристической функции линейного случайного процесса с импульсной характеристикой формирующего фильтра и вероятностными характеристиками порождающего процесса [6, 9]. Следует отметить, что распределение порождающего процесса можно выбирать любое из класса безгранично делимых (гауссовское, пуассоновское, гамма-распределение, логарифмически нормальное, распределение Коши, Стьюдента, Лапласа и др.).

Частным случаем линейных процессов являются процессы авторегрессии и скользящего среднего. При этом моделирование процесса скользящего среднего  $q$ -го порядка производится алгоритмом (11) при порождающем процессе в виде гауссовского белого шума. Процесс авторегрессии  $p$ -го порядка моделируется как взвешенная сумма прошлых значений процесса и текущего значения гауссовского белого шума

$$\xi(\omega, k) = \sum_{j=1}^p c(j) \xi(\omega, k - j) + v(\omega, k). \quad (12)$$

Моделирование процессов авторегрессии и скользящего среднего производится с использованием следующего рекуррентного соотношения:

$$\xi(\omega, k) = \sum_{j=0}^q a(j) v(\omega, k - j) + \sum_{j=1}^p b(j) \xi(\omega, k - j). \quad (13)$$

Подготовительная работа при моделировании процессов в соответствии с алгоритмами (11)–(13) сводится к вычислению параметров  $\varphi(j)$ ,  $c(j)$ ,  $a(j)$ ,  $b(j)$  для обеспечения требуемых вероятностных свойств моделируемого процесса. В работах [1, 9] приведены аналитические выражения для параметров моделирующих алгоритмов, которые можно использовать при моделировании гауссовских случайных процессов с типовыми корреляционными функциями  $R(k)$  и спектральными плотностями  $G(\lambda)$ . Они получены из условия обеспечения заданной корреляционной функции либо спектральной плотности моделируемого процесса при подаче на вход формирующего фильтра гауссовского белого шума с равномерной спектральной плотностью.

Когда аналитические выражения для корреляционных функций (спектральных плоскостей) моделируемых процессов отличаются от типовых, подготовительная работа усложняется. Частный случай нахождения параметров, когда моделируемый процесс АРСС имеет дробно-рациональную спектральную плотность, рассмотрен в работе [5].

## 5. Моделирование марковских случайных процессов

Рассмотрим особенности моделирования на ЭВМ однородных марковских процессов, которое может производиться путем получения марковских последовательностей либо марковских цепей.

Согласно марковскому свойству  $n$ -мерная плотность вероятности моделируемой случайной последовательности  $\{\xi(\omega, j), j = 0, 1, 2, \dots\}$  полностью определяется одномерной плотностью вероятности  $p(x)$  и плотностью вероятности переходов  $p(x_p)/x_{i-1}$ :

$$p_n(x_1, t_1; \dots, x_n, t_n) = p(x) \prod_{i=1}^n p(x_i)/x_{i-1}. \quad (14)$$

Таким образом, моделирование марковских последовательностей фактически сводится к моделированию последовательности случайных величин с заданной условной плотностью распределения.

Остановимся более подробно на особенностях моделирования однородной цепи Маркова  $\{\xi(\omega, j), j = 0, 1, 2, \dots\}$ , принимающей одно из  $N$  состояний  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  в дискретные моменты времени  $t_k = k\Delta t$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  [5, 9]. Будем считать заданными начальное распределение вероятностей состояний

$$\begin{aligned} P\{\xi(\omega, t_0) = x_i\} &= P_i > 0, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad \sum_{i=0}^{N-1} P_i = 1, \\ P &= [P(i|j)], \quad P(i|j) = P\{\xi(\omega, t_{m+1}) = x_i \setminus \xi(\omega, t_m) = x_j\}, \quad (15) \\ \sum_{j=0}^{N-1} P(i|j) &= 1, \quad i = \overline{0, N-1}. \end{aligned}$$

Моделирование сводится к получению последовательности случайных величин, принимающих дискретные значения с заданными условными вероятностями. При этом моделирующий алгоритм состоит из следующих этапов:

1. Вычисляются вспомогательный вектор

$$\vec{q} = (q_0, \dots, q_{N-1}) = (P_0, P_0 + P_1, \dots, P_0 + P_1 + \dots + P_{N-1}, 1) \quad (16)$$

и матрица

$$Q[q(i \setminus j)], \quad q(i \setminus j) = \sum_{k=0}^j P(i \setminus j), \quad q(i \setminus N-1) = 1, \quad i, j = \overline{0, N-1}. \quad (17)$$

2. Проводится моделирование начального состояния  $\xi(\omega, t_0) = x_i$ , если  $q_{i-1} \leq \alpha_1(\omega) < q_i$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ , где  $\alpha_1(\omega)$  — значение базовой случайной величины.

Пусть  $\xi_0$  — полученная реализация случайной величины, а  $i_0$  — значение соответствующего индекса состояния.

3. Выполняется моделирование переходов

$$\xi(\omega, t_0) \Rightarrow \xi(\omega, t_1) \Rightarrow \xi(\omega, t_2) \dots \xi(\omega, t_N) = x_i, \quad (18)$$

если  $q(i_0/i-1) \leq \alpha_2(\omega) < q(i_0/i)$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ .

Здесь  $\xi(\omega, t_1)$  — случайная величина, которая принимает дискретные значения с вероятностями, задаваемой строкой с номером  $i_0$  в матрице  $P$ . Пусть  $\xi_1$  — полученная реализация случайной величины  $\xi(\omega, t_1)$ , а  $i_1$  — соответствующий индекс состояния.

4. С помощью БСВ  $\alpha_3(\omega)$  аналогично предыдущему моделируется случайная величина  $\xi(\omega, t_2)$  с распределением, задаваемым строкой с номером  $i_1$  матрицы  $P$ .

5. Указанные процедуры повторяются, пока не будет получено заданное число отсчетов  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  цепи Маркова.

## 6. Моделирование периодически коррелированных случайных процессов

Моделирование периодически коррелированных случайных последовательностей может производиться на основе их представления через стационарные компоненты [7, 9]

$$\xi(\omega, k) = \sum_{p=0}^{N-1} \exp(i \frac{2\pi}{N} pk) \xi_p(\omega, k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

где  $[\xi_p(\omega, k), k = 0, 1, 2, \dots, p = 0, 1, \dots, N-1]$  —  $N$ -мерные стационарные случайные последовательности с заданным видом корреляционной функции;  $N$  — период коррелированности последовательности  $\xi(\omega, k)$ .

Корреляционная матрица  $R(k, j)$  является периодической с периодом  $N$ :  $R(k+N, l+N) = R(k, l)$ . Важным свойством моделируемой последовательности (19) является то, что множество ее значений, взятых через период коррелированности  $N$  при произвольной начальной фазе  $j = 0, 1, \dots, N$ , образует стационарную

случайную последовательность  $\xi(\omega, k) = \xi(\omega, j + kN)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Поэтому совокупность всех  $N$  таких стационарных последовательностей образует векторную стационарную последовательность.

Таким образом, моделирование периодически коррелированных случайных последовательностей с периодом  $N$  включает следующие этапы:

1. Моделирование векторных стационарных случайных последовательностей  $[\xi_p(\omega, k), k = 0, 1, 2, \dots, p = 0, 1, \dots, N-1]$  с заданным видом корреляционной функции.

2. Получение периодически коррелированной случайной последовательности  $[\xi(\omega, k), k = 0, 1, 2, \dots]$  согласно соотношению (19).

Аналогично, но несколько сложнее производится моделирование полипериодически коррелированных случайных последовательностей. Для этого используется соответствующее представление таких последовательностей в виде

$$\xi(\omega, k) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp(i \lambda_p k) \xi_p(\omega, k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

где  $\lambda_p = \sum_{l=1}^M k_{pl} \Lambda_l$  — показатели, представимые по целочисленному теоретико-числовому базису;  $\Lambda_l$  — действительные несоизмеримые числа;  $k_{pl}$  — целые числа.

При моделировании полипериодически коррелированных последовательностей согласно представлению (20) приходят к конечным суммам. Моделирование включает выбор представления показателей  $\lambda_p$  и получение стационарных последовательностей  $\xi(\omega, k)$  с заданными вероятностными характеристиками. Кратность моделируемой последовательности  $\xi(\omega, k)$  определяется значением числа  $M$  в представлении для  $\lambda_p$ , а соответствующие периоды коррелированности — значениями  $\Lambda_l, l = \overline{1, M}$  из соотношений  $T_l = \frac{2\pi}{\Lambda_l}$ . При  $M = 2$  получают бипериодически коррелированную случайную последовательность, а при  $M = 1$  имеет место моделирование периодически коррелированной случайной последовательности согласно соотношению (19).

## 7. Выводы

Моделирование на ЭВМ случайных процессов основано на некотором функциональном преобразовании совокупности БСВ, в котором учитываются характерные особенности вероятностной модели, выбранной для описания реальных сигналов и помех. Предложены методы моделирования на ЭВМ случайных процессов на основе вероятностных моделей в виде ортогональных разложений, марковских и линейных случайных процессов, однородных процессов с независимыми приращениями и периодически коррелированных случайных процессов.

Некоторые из рассмотренных методов моделирования случайных процессов использованы для получения выборок модельных сигналов и помех с целью исследования методом статистического моделирования рабочих характеристик решения различных задач распознавания сигналов. В частности, это задачи распознавания видов модуляции радиосигналов, действующих на фоне гауссовского белого шума [10]; селекции и распознавания заданных видов радиосигналов при наличии неизвестных сигналов [11]; распознавания заданных гауссовских коррелированных сигналов при наличии класса неизвестных сигналов [12].

Для более широкого использования предложенных методов моделирования случайных процессов при проектировании радиоэлектронных систем необходимо создание специальных пакетов программ, реализующих эти методы моделирования на ЭВМ.

**Литература.** 1. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1976. — 326 с. 2. Борисов Ю.П., Цветнов В.В. Математическое моделирование радиосистем и устройств. — М.: Радио и связь, 1985. — 176 с. 3. Моделирование в радиолокации / А.И. Леонов, В.Н. Васеев, Ю.И. Гайдуков. — М.: Сов. радио, 1979. — 264 с. 4. Шалыгин А.С., Палагин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования. — Л.: Машиностроение, 1986. — 324 с. 5. Харин Ю.С., Степанова М.Д. Практикум на ЭВМ по математической статистике. — Минск: Университетское, 1987. — 304 с. 6. Марченко Б.Г., Омельченко В.А. Вероятностные модели случайных сигналов и полей в прикладной ста-

тистической радиофизике. — К.: УМК ВО, 1988. — 176 с. 7. Прикладна теорія випадкових процесів та полів / Колективна монографія під ред. Я.П.Драгана, В.А.Омельченко. — Харків — Львів — Тернопіль: АН України, 1993. — 248 с. 8. Прикладная теория случайных процессов и полей / Коллективная монография под ред. К.К.Васильева, В.А.Омельченко (2-е изд.). — Ульяновск: УлГТУ, 1995. — 256 с. 9. Імовірнісні моделі сигналів та полів у прикладах та задачах / В.О. Омельченко, В.М. Безрук, Я.П. Драган та інші. — К.: ІСДО, 1995. — 376 с. 10. Безрук В.М., Евсеев К.К., Чеботов А.В. Метод распознавания видов модуляции радиосигналов, описываемых вероятностной моделью в виде смеси распределений // Прикладная радиоэлектроника. — 2003. — №1. — С. 26–31. 11. Омельченко В.А., Безрук В.М., Коваленко Н.П. Распознавание заданных радиосигналов при наличии неизвестных сигналов на основе авторегрессионной модели // Радиотехника. — 2001. — Вып. 123. — С. 195–199. 12. Безрук В.М., Коваленко Н.П. Синтез и анализ алгоритмов распознавания гауссовских случайных сигналов при наличии класса неизвестных сигналов на основе авторегрессионной модели // АСУ и приборы автоматики. — 2000. — Вып. 111. — С. 115–120.

Поступила в редколлегия 16.10.2003 г.



**Безрук Валерий Михайлович**, канд. техн. наук, доцент кафедры сетей связи Харьковского национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов: моделирование и многокритериальная оптимизация систем обработки сигналов.