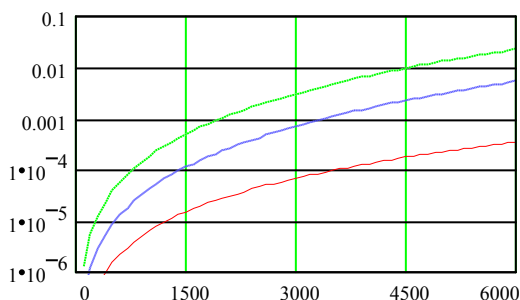


где γ – вероятность интерференциального подавления сигнала [6]; λ_0 – интенсивность помехи; τ – длительность импульса сигнала. Принимая за пуассоновское распределение вероятностей появления импульсов помехи в интервале совпадения $\tau_c = 2\tau$, равном разрешающей способности дешифратора, можно записать

$$P_{01} = [1 - \exp(-\lambda_0 \tau_c)]^n; P_{1r} = [1 - \exp(-\lambda_0 \tau_c)]^{n-1}.$$

На рисунке представлены результаты расчета вероятности стирания информации при $n=2$ и $N=128$, $K=2$ (сплошная), $N=512$, $K=4$ (штриховая) $N=512$, $K=8$ (штрихпунктирная).



Вероятности расчета стирания информации

Как следует из приведенных зависимостей, вероятность стирания информации существенно зависит от плотности помехи, значности используемых кодов и от объема передаваемой информации. Приведенные расчеты показывают, что для практической

реализации передачи принятой информации в пункт совместной обработки в синхронных сетях рассредоточенных систем первичной локации достаточно использования двухзначных кодов.

Необходимо отметить, что благодаря передаче всего блока принятых сигналов в одном цикле связи на пункте совместной обработки возможно осуществление межпериодной обработки принимаемых сигналов, что позволяет существенно повысить достоверность передачи принятых сигналов.

Литература: 1. Ямпольский Э.М., Толстов Г.Б. Использование многочастотных сигналов для одновременной связи и локации // Методы и устройства обработки сигналов в радиотехнических системах. 1988. С. 48–52. 2. Обод И.И. Синхронные сети получения и обработки информации рассредоточенных систем первичной и вторичной локации. Рукопись деп. в УкрИНТЭИ. N192-Уі97 от 25.02.97. 3. А.с. 1510555 СССР. Устройство вычисления ВКФ. Обод И.И. // Открытия. Изобретения. 1989. №46. С. 184. 4. А.с. 1552199 СССР. Устройство вычисления ВКФ. Обод И.И. // Открытия. Изобретения. 1990. N 11. С. 173. 5. А.с. 1616379 СССР. Устройство вычисления ВКФ. Обод И.И. // Открытия. Изобретения. 1990, N 42. С. 158. 6. Ярлыков М.С., Черняков М.В. Оптимизация асинхронных адресных систем радиосвязи. М.: Связь, 1979. 215с.

Поступила в редколлегию 23.03.98

Обод Иван Иванович, канд. техн. наук, старший научный сотрудник, докторант кафедры № 34 ХВУ. Научные интересы: получение, обработка и передача информации в синхронных сетях разнесенных систем первичной и вторичной локации. Адрес: 310166, Украина, Харьков, ул. Коломенская, 27, кв.1.

УДК 537.87; 621.371

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ПОВТОРЯЮЩИМИСЯ ИМПУЛЬСНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ ПАРАМЕТРОВ БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЫ

НЕРУХ А.Г., РЫБИН О.Н., ЩЕРБАТКО И.В.

Рассмотрено преобразование плоской монохроматической электромагнитной волны серией повторяющихся изменений параметров среды во временной области. Изменение состоит в модуляции диэлектрической проницаемости и проводимости по закону прямоугольного импульса. Получены выражения, описывающие эволюцию электрического поля на всей положительной временной полуоси.

Распространение электромагнитных волн в средах с изменяющимися во времени параметрами описывается уравнениями Максвелла с переменными коэффициентами. Исследованию такого распространения посвящен ряд работ [3–9]. Как теоретический, так и практический интерес представляет повторяющееся во времени изменение параметров [9]. Практическая реализация такого изменения характеризуется его ограниченностью во времени. Исследуем преобразование плоской гармонической волны

повторяющимися импульсными изменением диэлектрической проницаемости $\varepsilon(t)$ и проводимости $\sigma(t)$ безграничной среды

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \sum_{k=1}^N \{ \theta(t - (k-1)T) - \theta(t - \tau_1 - (k-1)T) \}, \quad \sigma(t) = \sigma_1 \sum_{k=1}^N \{ \theta(t - (k-1)T) - \theta(t - \tau_1 - (k-1)T) \},$$

которые представляют собой скачкообразные одновременные изменения диэлектрической проницаемости и проводимости до значений ε_1 и σ_1 . Новые значения держатся в течение времени τ_1 и затем скачком возвращаются к исходным значениям $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\sigma = 0$. Длительность периода равна T , а всего таких периодов – N .

Из эволюционного подхода [7] для поперечной составляющей вектора электрического поля следует интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$E(t, x) = E_0(t, x) + \int_0^t \int_{x'} K(t, t', x, x') E(t', x') dt' dx' \quad (1)$$

Здесь $E_0(t, x)$ – первичное поле, существующее в среде до начала серий; $K(t, t', x, x')$ – ядро интегрального уравнения

$$K(t, t', x, x') = -(1/a^2(t'))\delta(v_0(t - t') - |x - x'|) \times \\ \times \left\{ \bar{\sigma}(t') + \frac{1}{2}(1 - \bar{a}^2(t')) \frac{\partial}{\partial t} \right\},$$

где c – скорость света в вакууме; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Уравнение (1) удобно решать методом резольвенты [2], согласно которому

$$R(t, t', x, x') = K(t, t', x, x') + \int_0^\infty dt'' \int dx'' K(t, t'', x, x'') R(t'', t', x'', x'). \quad (2)$$

Здесь $R(t, t', x, x')$ – резольвента задачи, явное выражение для которой легко получить для постоянных значений параметров путем решения интегрального уравнения

$$R(t, t', x, x') = K(t, t', x, x') + \int_0^\infty dt'' \int dx'' K(t, t'', x, x'') R(t'', t', x'', x'). \quad (3)$$

Для решения данной задачи разобьем временную ось на интервалы, в которых параметры среды остаются постоянными. Тогда из [3] следует записать, что составляющая вектора электрического поля на n -м временном интервале разбиения рекуррентными соотношениями

$$\left. \begin{aligned} E_n(t, x) &= \int_{t_{n-1}}^t dt' \int_{-\infty}^\infty dx' R_n(t, t', x, x') F_n(t', x') + \\ &+ F_n(t, x), \\ F_n(t, x) &= \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt' \int_{-\infty}^\infty dx' K_i(t, t', x, x') E_i(t', x') + \\ &+ E_0(t, x). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В этих соотношениях как структура резольвенты, так и структура ядра инвариантны относительно периода изменения параметров. Из уравнения (3) для скачка диэлектрической проницаемости и проводимости в момент времени $t = 0$ следует

$$\left. \begin{aligned} K_i(t, t', x, x') &= K(t, t', x, x'), \quad i = 1, \dots, N, \\ (i-1)T < t < \tau_1 + (i-1)T; \\ K_i(t, t', x, x') &= 0, \quad \tau_1 + (i-1)T < t < iT, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} R_i(t, t', x, x') &= -\frac{1}{2v_1} \left\{ (1 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\bar{\sigma}_1 \frac{\partial}{\partial t} \right\} \times \\ &\times \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{\frac{(p - \bar{\sigma}_1)(t - t') - |x - x'|}{v_1} \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2}}, \\ i &= 1, \dots, N, \quad \alpha > \bar{\sigma}_1, \quad (i-1)T < t < \tau_1 + (i-1)T; \\ R_i(t, t', x, x') &= 0, \quad \tau_1 + (i-1)T < t < iT, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $a = \sqrt{\epsilon_0/\epsilon_1}$, $\bar{\sigma}_1 = 2\pi\sigma_1/\epsilon_1$, $v_1 = c/\sqrt{\epsilon_1}$,

$$\text{Re} \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2} > 0.$$

Пусть $E_0(t, x) = e^{i(\omega t - kx)}$, где $k = \omega/v_0$. Тогда, подставляя формулы (5) и (6) в выражения (4), с помощью метода математической индукции получаем выражения для электрического поля на произвольном периоде изменения параметров среды:

$$E(t, x) = \left(C_k^+ + D_k^+ \right) e^{-\bar{\sigma}_1 t} e^{i(\Omega t - kx)} + \\ + \left(C_k^- + D_k^- \right) e^{-\bar{\sigma}_1 t} e^{-i(\Omega t + kx)}, \quad \Omega^2 = \sqrt{a^2 \omega^2 - \bar{\sigma}_1^2}, \quad (7) \\ (k-1)T < t < \tau_1 + (k-1)T, \quad k = 2, \dots, N.$$

Далее имеем

$$E(t, x) = A_k e^{i(\omega t - kx)} + B_k e^{-i(\omega t + kx)}, \\ \tau_1 + (k-1)T < t < kT, \quad k = 2, \dots, N. \quad (8)$$

Здесь

$$C_k^\pm = a^2 A_{k-1} \frac{(a^2 - 1)\omega - 2\bar{\sigma}_1(\bar{\sigma}_1 \pm i\Omega)}{2i\Omega(i(\omega \pm \Omega) \pm \bar{\sigma}_1)} e^{(k-1)(\bar{\sigma}_1 \pm i\Omega\tau_1)T},$$

$$D_k^\pm = a^2 B_{k-1} \frac{(a^2 - 1)\omega - 2\bar{\sigma}_1(\bar{\sigma}_1 \pm i\Omega)}{2i\Omega(i(\omega \pm \Omega) \pm \bar{\sigma}_1)} e^{(k-1)(\bar{\sigma}_1 \pm i\Omega\tau_1)T}.$$

$$A_k = -\frac{e^{-(\bar{\sigma}_1 + i\omega)\tau_1}}{2i\Omega} \left\{ \bar{\sigma}_1 + (1 - a^2) \frac{i\omega}{2} \right\} \times \\ \times \left\{ A_{k-1} \left(\frac{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega + \omega)}{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega - \omega)} e^{i\Omega\tau_1} - \frac{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega - \omega)}{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega + \omega)} e^{-i\Omega\tau_1} \right) + \right. \\ \left. + 2iB_{k-1} e^{-2i\omega(k-1)T} \sin(\Omega\tau_1) \right\},$$

$$B_k = -\frac{e^{-(\bar{\sigma}_1 - i\omega)\tau_1}}{2i\Omega} \left\{ \bar{\sigma}_1 - (1 - a^2) \frac{i\omega}{2} \right\} \times \\ \times \left\{ B_{k-1} \left(\frac{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega - \omega)}{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega + \omega)} e^{i\Omega\tau_1} - \frac{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega + \omega)}{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega - \omega)} e^{-i\Omega\tau_1} \right) + \right. \\ \left. + 2iA_{k-1} e^{2i\omega(k-1)T} \sin(\Omega\tau_1) \right\},$$

На первом периоде возбуждения среды поле определяется отличными от (7) выражениями

$$E(t, x) = C_1^+ e^{-\bar{\sigma}_1 t} e^{i(\Omega t - kx)} + \\ + C_1^- e^{-\bar{\sigma}_1 t} e^{-i(\Omega t + kx)}, \quad 0 < t < \tau_1. \quad (9)$$

$$E(t, x) = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + B_1 e^{-i(\omega t + kx)}, \quad \tau_1 < t < T. \quad (10)$$

Здесь $C_1^\pm = E_0 a^2 C_i^\pm \frac{(a^2 - 1)\omega - 2\bar{\sigma}_1(\bar{\sigma}_1 \pm i\Omega)}{2i\Omega(i(\omega \pm \Omega) \pm \bar{\sigma}_1)}$. Также

$$A_1 = -\frac{e^{-(\bar{\sigma}_1 + i\omega)\tau_1}}{2i\Omega} \left\{ \bar{\sigma}_1 + (1 - a^2) \frac{i\omega}{2} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega + \omega)}{\bar{\sigma}_1 - i(\Omega - \omega)} e^{i\Omega\tau_1} - \frac{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega - \omega)}{\bar{\sigma}_1 + i(\Omega + \omega)} e^{-i\Omega\tau_1} \right\}.$$

Кроме того,

$$B_1 = -\frac{e^{-(\bar{\sigma}_1 - i\omega)\tau_1}}{\Omega} \left\{ \bar{\sigma}_1 - (1 - a^2) \frac{i\omega}{2} \right\} \sin(\Omega\tau_1).$$

Как видно из (7) – (10), поле на любом временном интервале постоянства параметров среды представляет собой суперпозицию двух плоских волн: прямой (первые слагаемые в формулах (7) – (10), которая распространяется в направлении первичной, и обратной (вторые слагаемые в формулах (7) – (10), которая распространяется в противоположном направлении. В случае возбужденного состояния пространства ($\sigma(t) = \sigma_1$, $\varepsilon(t) = \varepsilon_1$) частоты этих волн отличаются, а волновые числа совпадают с соответствующими параметрами первичной волны, амплитуды убывают во времени по экспоненциальному закону вследствие наличия проводимости в пространстве. В период невозбужденного состояния ($\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$) фазовые характеристики прямой и обратной волн совпадают с соответствующими параметрами первичной волны. Если ввести приведенные амплитуды $a_k = A_k e^{ikT}$, $b_k = B_k e^{-ikT}$, уравнения (7) – (10) можно переписать более компактно:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f - h^* \\ -h & f^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, \quad a_1 = f^* e^{-iT}, \quad b_1 = -h e^{iT}. \quad (11)$$

Здесь введены параметры, не зависящие от номера периода:

$$f = (e^{-(s+i)\tau_1} + iT/2q) \left\{ 2q \cos(q\tau_1) + i(1+a^2) \sin(q\tau_1) \right\},$$

$$h = (e^{-(s-i)\tau_1} - iT/2q) \left\{ 2s - i(1-a^2) \right\} \sin(q\tau_1),$$

$$s = \frac{\bar{\sigma}_1}{\omega}, \quad q = \sqrt{a^2 - s^2}.$$

Из рекуррентного соотношения (11) следует [1]

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = R^k \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\text{где } R^k = u_{k-1}(Re(f)) \begin{pmatrix} f - h^* \\ -h & f^* \end{pmatrix} - u_{k-2}(Re(f))I.$$

Здесь $u_k(\alpha)$ – многочлен Чебышева порядка k ;

I – единичная матрица. Из (12) нетрудно получить амплитуды прямой и обратной волн в случае невозбужденного состояния среды:

$$A_{k+1} = e^{-ikT} \left\{ (f^2 + |h|^2 e^{2iT}) u_{k-1}(Re(f)) - u_{k-2}(Re(f)) f \right\}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (13)$$

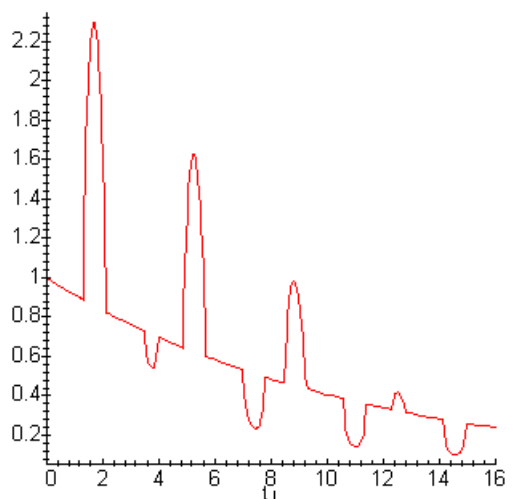
$$B_{k+1} = -h e^{ikT} \left\{ (f + f^* e^{2iT}) u_{k-1}(Re(f)) - e^{2iT} u_{k-2}(Re(f)) \right\}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Дополнительные аналитические исследования формул (13) и (14) показали, что амплитуда прямой волны A_k по модулю всегда больше амплитуды обратной волны B_k .

Численный анализ формулы (13) показал резонансный характер амплитуды прямой волны в зависимости от изменения длительности возбуждающих импульсов. На рисунке подан график изменения отношения приведенной амплитуды a_{k+1} прямой

волны на $(k+1)$ -м периоде изменения параметров среды к приведенной амплитуде a_k прямой волны на k -м периоде (ось ординат) в зависимости от изменения длительности возбуждающих импульсов t_1 (ось абсцисс) с использованием безразмерных параметров

$$a, s = \bar{\sigma}_1/\omega, t_1 = \omega\tau_1, t = \omega T.$$



Зависимость a_{k+1}/a_k от изменения t_1
при $a = 2,7$, $s = 0,09$, $t = 16$

Заключение. В работе показано, что возбуждение безграничной среды синхронными сериями одинаковых импульсов диэлектрической проницаемости и проводимости приводит к трансформации плоской электромагнитной волны, в результате которой поле на любом временном интервале представимо в виде суперпозиции прямой и обратной плоских волн. При этом в случае невозбужденного состояния среды фазовые характеристики этих волн и первичной волны совпадают. Также показано, что амплитуда напряженности электрического поля имеет резонансный характер в зависимости от периода изменения параметров среды.

Литература: 1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 719 с. 2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с. 3. Nerukh A.G., Scherbatko I.V., Nerukh D.A. Using evolutionary recursion to solve an electromagnetic problem with time-varying parameters // Microwave and Optical Technology Letters. 1997. Vol. 14, N1. P. 31–36. 4. Аверков С.И., Болдин В.П. Волны в недиспергирующих неоднородных средах // Изв. вузов Радиофизика. 1980. Т.23, N9. С. 1060–1066. 5. Борисов В.В. Неустановившиеся электромагнитные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 240 с. 6. Борисов В.В. Трансформация электромагнитного поля при изменении проводимости среды во времени // Геомагнетизм и аэронавтика. 1989. Т.29, N5. С. 730–737. 7. Нерух А.Г., Хижняк Н.А. Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Х.: НПО Тест-Радио. 1991. 280 с. 8. Нерух А.Г., Шаворыкина И.Ю. Расщепление электромагнитного импульса при скачке проводимости ограниченной среды // ЖТФ. 1992. Т.62, N5. С. 108–118. 9. Harfoush F.A., Taflove A. Scattering of electromagnetic waves by a material half-space with a time-varying conductivity // IEEE Trans. on Antennas and Propag. 1991. Vol.39, N7. P. 898–906.

Поступила в редколлегию 12.03.98

Нерух Александр Георгиевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: нестационарная электродинамика. Адрес: 310726, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-93-72.

Рыбин Олег Николаевич, аспирант кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: распространение

электромагнитных волн в нестационарных средах. Адрес: 310726, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-93-72.

Щербатко Игорь Владимирович, доцент кафедры высшей математики ХТУРЭ. Научные интересы: нестационарная электродинамика. Адрес: 310726, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-93-72.

УДК 537.87; 621.371

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА ВРЕМЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ СРЕДЫ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

РЫБИН О.Н., САХНЕНКО Н.К.

Рассмотрено преобразование электромагнитного импульса, вызванное скачкообразным изменением во времени параметров ограниченной среды. Изменение представляет собой прямоугольные импульсы диэлектрической проницаемости и проводимости произвольной длительности и амплитуды. Получены и проанализированы выражения для электрического поля во всем пространстве.

1. Введение

Распространение электромагнитных волн в нестационарных средах описывается уравнениями Максвелла с зависящими от времени параметрами. Как правило, такие задачи приходится решать численными методами [1, 2]. Однако основные особенности эволюции преобразования электромагнитных сигналов нестационарными средами можно получить аналитическим путем [3-9].

Наиболее простым с точки зрения аналитического исследования является случай трансформации поля при скачкообразном изменении диэлектрической проницаемости или проводимости среды. Однако, как правило, рассматривается изменение только одного параметра. В настоящей работе исследуется воздействие на электромагнитный импульс синхронного импульсного изменения диэлектрической проницаемости $\varepsilon(t)$ и проводимости $\sigma(t)$ среды, которое происходит в области полупространства $x \geq 0$. Изменение во времени этих параметров описывается формулами

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \varepsilon_0[\theta(-t) + \theta(t - \tau)] + \varepsilon_1[\theta(t) - \theta(t - \tau)], \\ \sigma(t) &= \sigma_1[\theta(t) - \theta(t - \tau)],\end{aligned}$$

где ε_0 – диэлектрическая проницаемость невозмущенной среды; ε_1 и σ_1 – диэлектрическая проницаемость и проводимость среды в полупространстве $x \geq 0$ на временном интервале $t \in (0, \tau)$; $\theta(t)$ – единичная функция Хевисайда. Среда в полупространстве $x < 0$ все время остается непроводящей и имеет диэлектрическую проницаемость ε_0 .

Предположим, что первичное поле падает по нормали на границу области полупространства $x \geq 0$, имеет только составляющую, не зависящую от поперечных координат.

Если $E_0(t, x)$ – первичное поле в невозмущенной среде, то электрическое поле в нестационарной области описывается интегральным уравнением Вольterra второго рода [1, 2, 6]:

$$E(t, x) = E_0(t, x) + \int_0^t dt' \int_0^\infty dx' K(t, t', x, x') E(t', x'), \quad (1)$$

Здесь $K(t, t', x, x')$ – ядро интегрального уравнения,

$$\begin{aligned}K(t, t', x, x') &= -\left(\delta(v_0(t - t') - |x - x'|) / \bar{a}^2(t')\right) \times \\ &\times \left\{ \bar{\sigma}(t') + \frac{1}{2}(1 - \bar{a}^2(t')) \frac{\partial}{\partial t} \right\},\end{aligned} \quad (2)$$

где v_0 – скорость света в вакууме; δ – дельта-функция Дирака.

В области $x < 0$ поле определяется с помощью того же соотношения (1), которое в этом случае представляет собой квадратурную формулу, выражающую внешнее поле через внутреннее.

Решение уравнения (1) в областях $x \geq 0$ записывается через резольвенту $R(t, t', x, x')$:

$$E(t, x) = E_0(t, x) + \int_0^t dt' \int_0^\infty dx' R(t, t', x, x') E_0(t', x'), \quad (3)$$

которая может быть найдена из уравнения

$$\begin{aligned}R(t, t', x, x') &= K(t, t', x, x') + \\ &+ \int_0^\infty dt'' \int_0^\infty dx'' K(t, t'', x, x'') R(t'', t', x'', x').\end{aligned} \quad (4)$$

В случае, если $\varepsilon(t) = \varepsilon_1$, $\sigma(t) = \sigma_1$, резольвента представляется с помощью обратного преобразования Лапласа

$$R(t, t', x, x') = e^{-\bar{\sigma}_1 \tau} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{p\tau} [S_1(p) + S_2(p)]. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned}S_1(p) &= \frac{a\sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2}}{2v_0} \left(\frac{p - \bar{\sigma}_1}{p + \bar{\sigma}_1} - \frac{1}{a^2} \right) e^{-\frac{|x-x'|}{v_1} \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2}}, \\ S_2(p) &= \frac{a\sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2}}{2v_0} \left(\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{p - \bar{\sigma}_1}{p + \bar{\sigma}_1}} \right) e^{-\frac{x+x'}{v_1} \sqrt{p^2 - \bar{\sigma}_1^2}},\end{aligned}$$