$$P(x_K) = P(x_l) \equiv P_K = P_l\,. \qquad (25)$$

Отсюда с учетом (2)

$$p_{K1}a_1 + ... + p_{Kn}a_n = p_{l1}a_1 + ... + p_{ln}a_n\,. \qquad (26)$$

После преобразований, аналогичных (15) – (18), получим

$$b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + ... + b_{1n}\,a_n = 0, \qquad (27)$$

где все обозначения аналогичны введенным выше.

Если имеется информация, позволяющая сформировать d равенств (25), общая модель примет вид

$$\begin{aligned}
&b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + ... + b_{1n}a_n = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&b_{d1}a_1 + b_{d2}a_2 + ... + b_{dn}a_n = 0, \qquad (28)\\
&-1 \le b_{ij} \le 1;\ i = \overline{1,d};\ j = \overline{1,n},\\
&a_j \ge 0;\ a_j \ge 1;\ \sum_{j=1}^{n} a_j = 1.
\end{aligned}$$

В общем случае экспертная информация позволяет построить некоторую композицию неравенств и равенств. Окончательная общая модель определения весовых коэффициентов a_i будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + ... + b_{1n}a_n \le 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&b_{m1}a_1 + b_{m2}a_2 + ... + b_{mn}a_n \le 0,\\
&b_{m+1}a_1 + b_{m+1}a_2 + ... + b_{m+1}a_n = 0, \qquad (29)\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&b_N a_1 + b_N a_2 + ... + b_N a_n = 0,\\
&-1 \le b_{ij} \le 1;\ i = \overline{1,N};\ i = \overline{1,n},\\
&a_i \ge 0;\ a_i \le 1;\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.
\end{aligned}$$

Задача заключается в том, чтобы определить матрицу относительных весовых коэффициентов A на основе модели (29). Все соотношения, входящие в (29), линейны относительно искомых неизвестных a_i и в силу этого представляют собой полуплоскости (неравенства) и плоскости (равенства), ограничивающие в n-мерном пространстве некоторый выпуклый [5] многогранник, который является множеством допустимых значений W матрицы A.

Литература: 1. *Петров Э.Г.* Организационное управление городом и его подсистемами. Методы и алгоритмы. Х.: Вища шк. 1986. 144 с. 2. *Ларичев О.И.* Объективные модели и субъективные решения. М.: Наука, 1987. 134 с. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П., Шаронова Н.В.* Компараторная идентификация лингвистических объектов. К.: ИСИО, 1993. 116 с. 4. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация: методы получения и анализа. М.: Радио и связь, 1982. 184 с. 5. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967. 460 с.

Поступила в редколегию 05.06.98

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Шаронова Н.В.

Овезгельдыев Атагелды Оразгельдыевич, канд. техн. наук, докторант ХТУРЭ. Научные интересы: организационные системы, системный анализ. Увлечения: путешествия. Адрес: 310726, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-93-06.

Петров Константин Эдуардович, канд. техн. наук, ст. преподаватель УниВД. Научные интересы: теория принятия решений, нечеткие множества. Увлечения: горные лыжи, футбол. Адрес: 310080, Украина, Харьков, пр. 50-летия СССР, 27, тел. (0572) 50-30-67.

УДК 519.6:514.1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ С УЧЕТОМ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

СЫСОЕВА Ю.А.

Предложены математическая модель и метод решения оптимизационной задачи размещения правильных многоугольников в полосе с учетом погрешностей исходных данных, основанные на применении нового приложения [8-11] интервального анализа [12-14] в геометрии.

1. Постановка задачи

Имеется конечное множество ориентированных правильных многоугольников с одинаковым числом сторон и полоса, исходные данные о которых заданы с определенными погрешностями. Необходимо разместить данное множество многоугольников в полосе с учетом погрешностей исходных данных так, чтобы длина занятой части полосы была минимальной.

Формализуем множество исходных данных Q следующим образом: $J_k = \{1,2,...,k\}$ - индексное множество; Ω – полоса ширины w и длины l (под длиной полосы понимается длина занятой ее части как результат какого-либо размещения); XOY – собственная система координат полосы Ω; ν_w^0 – исходная погрешность ширины полосы Ω по оси OY (полагаем, что $\nu_w^0 \ge 0$); ν_l^0 – исходная погрешность длины полосы Ω по оси OX (полагаем, что $\nu_l^0 \ge 0$);

n – число размещаемых многоугольников; S_i, $i \in J_n$ – i-й многоугольник поставленной задачи; m – число сторон многоугольника S_i; XO_iY, $i \in J_n$ – собственная система координат многоугольника S_i (в дальнейшем O_i – полюс многоугольника S_i); R_i, $i \in J_n$ – радиус окружности, описанной около многоугольника S_i; $\nu_{x_i}^0, \nu_{y_i}^0$, $i \in J_n$ – исходные погрешности задания многоугольника S_i соответственно по осям O_iX и O_iY (полагаем, что $\nu_{x_i}^0 \ge 0$, $\nu_{y_i}^0 \ge 0$).

Введем дополнительные переменные: ν_l – погрешность длины занятой части полосы Ω; ν_{R_i}, $i \in J_n$ – погрешность радиуса R_i ($\nu_{R_i} = \theta\,(\nu_{x_i}^0, \nu_{y_i}^0)$, где θ – отображение, которое определяется особенностями математического моделирования геометрических объектов арифметического евклидового пространства R^2 с учетом погрешностей исходных данных в интервальных пространствах); x_i, y_i, $i \in J_n$ – координаты полюса O_i в системе координат XOY; ν_{x_i}, ν_{y_i}, $i \in J_n$ – погрешности координат полюса O_i в системе координат XOY.

Замечание 1. В данном исследовании полагаем, что погрешности исходных данных должны удовлетворять условиям: $\nu_w^0, \nu_l^0 \le \nu^*$; $\nu_{x_i}^0, \nu_{y_i}^0 \le \nu^*$, $i \in J_n$ (ν^*=const – максимально допустимая погрешность).

В качестве математических моделей материальных объектов, обладающих переменными метрическими характеристиками, которые порождаются погрешностями исходных данных, предлагаются интервальные, рассматриваемые как точечные множества интервальных пространств. Этот подход к учету погрешностей исходных данных при моделировании объектов размещения (области размещения и размещаемых объектов) основан на использовании элементов интервальной геометрии [8-11].

2. Математические модели объектов размещения в интервальном виде

Зададим соответствие δ между элементами множества исходных данных Q и элементами пространства R^2 следующим образом:

$$\delta(\nu_{x_i}^0)=(0,\nu_{x_i}^0),\ \delta(\nu_{y_i}^0)=(0,\nu_{y_i}^0),\ i \in J_n;\ \delta(\nu_l^0)=(0,\ \nu_l^0),$$

$$\delta(\nu_w^0)=(0,\ \nu_w^0),\ \delta(w,\ \nu_w^0)=(w,\ \nu_w^0). \qquad (1)$$

Учитывая гомеоморфизм h [8] пространств R^2 и $\mathbf{I}_s(R)$, где $\mathbf{I}_s(R)=\{\langle U\rangle=\langle u,\nu_u\rangle \mid u=(c+d)/2 \in R^1, \nu_u=(d-c)/2 \in R^1, [c,d] \subset R^1\}$ – расширенное пространство центрированных интервалов [8], получаем следующие соотношения:

$$h((0,\ \nu_{x_i}^0))=\langle 0,\nu_{x_i}^0\rangle,\ h((0,\ \nu_{y_i}^0))=\langle 0,\nu_{y_i}^0\rangle,\ i \in J_n,$$

$$h((0,\ \nu_l^0))=\langle 0,\nu_l^0\rangle,\ h((0,\ \nu_w^0))=\langle 0,\nu_w^0\rangle,$$

$$h((w,\ \nu_w^0))=\langle w,\nu_w^0\rangle. \qquad (2)$$

Пусть имеется система неравенств [8,10]:

$$\begin{cases} a_1\varphi(\langle X\rangle)+b_1\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c_1,\nu_{c_1}\rangle \ge \langle 0\rangle, \\ a_2\varphi(\langle X\rangle)+b_2\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c_2,\nu_{c_2}\rangle \ge \langle 0\rangle, \\ \dots \\ a_m\varphi(\langle X\rangle)+b_m\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c_m,\nu_{c_m}\rangle \ge \langle 0\rangle, \end{cases} \qquad (3)$$

которая определяет некоторое множество $\mathbf{S} \subset \mathbf{I}_s^2(R)$, где $\mathbf{I}_s^2(R)=\mathbf{I}_s(R)$ x $\mathbf{I}_s(R)$ [10]. В (3) использовано обозначение:

$$\lambda\varphi(\langle U\rangle)=\begin{cases} \lambda\langle U\rangle, & \text{если } \lambda \ge 0, \\ \lambda\overline{\langle U\rangle}, & \text{если } \lambda < 0, \end{cases}$$

$\lambda \in R^1$; $\overline{\langle U\rangle}=\langle u,-\nu_u\rangle$ – интервал, сопряженный интервалу $\langle U\rangle$ [8].

Внутренность множества **S** описывается следующей системой интервальных неравенств:

$$\begin{cases} a_1\varphi(\langle X\rangle)+b_1\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c_1,\nu_{c_1}^*\rangle > \langle 0\rangle, \\ a_2\varphi(\langle X\rangle)+b_2\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c_2,\nu_{c_2}^*\rangle > \langle 0\rangle, \\ \dots \\ a_m\varphi(\langle X\rangle)+b_m\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c_m,\nu_{c_m}^*\rangle > \langle 0\rangle, \end{cases} \qquad (4)$$

где $\nu_{c_j}^*=-a_j\nu_x-b_j\nu_y$, $j \in J_m$.

Из системы (3) следует, что множество **S** имеет непустое пересечение с интервальными прямыми [10] $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2,\dots,\mathbf{L}_m$, заданными соответственно интервальными уравнениями [10]:

$$\begin{aligned} &a_1\varphi(\langle X\rangle)+b_1\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c_1,\nu_{c_1}\rangle = \langle 0\rangle, \\ &a_2\varphi(\langle X\rangle)+b_2\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c_2,\nu_{c_2}\rangle = \langle 0\rangle, \\ &\dots \qquad \dots \\ &a_m\varphi(\langle X\rangle)+b_m\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c_m,\nu_{c_m}\rangle = \langle 0\rangle. \end{aligned} \qquad (5)$$

Если положить, что интервальные прямые составляют некоторое упорядоченное множество, множеству **S** принадлежат интервальные отрезки [11]:

$$[\langle A_1,A_2\rangle] \subset \mathbf{L}_1,\ \dots\ ,\ [\langle A_{m-1},A_m\rangle] \subset \mathbf{L}_{m-1},$$

$$[\langle A_m,A_1\rangle] \subset \mathbf{L}_m\ , \qquad (6)$$

где $\langle A_1\rangle=\mathbf{L}_m \cap \mathbf{L}_1$, $\langle A_j\rangle$, $j \in \{2,\dots,m\}$ – точка пересечения интервальных прямых $\mathbf{L}_{j-1}$ и $\mathbf{L}_j$.

Таким образом, интервальные отрезки (6) образуют интервальную линию, которая может быть описана некоторым интервальным уравнением вида

$$\mathbf{F}(\langle X\rangle,\langle Y\rangle)=\langle 0\rangle. \qquad (7)$$

Определение 1. Объединение множеств точек, удовлетворяющих системе (4) и уравнению (7), называется выпуклым интервальным m-угольником [11] **S***, если на подпространстве $R_{xy}^2 \subset \mathbf{I}_s^2(R)$ система неравенств (3) определяет выпуклый m-угольник, а на подпространстве $R_{\nu_x\nu_y}^2 \subset \mathbf{I}_s^2(R)$ система интервальных неравенств

$$\begin{cases} a_1\varphi(\langle X\rangle)+b_1\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c_1,\nu_{c_1}^{**}\rangle \ge_r \langle 0\rangle, \\ a_2\varphi(\langle X\rangle)+b_2\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c_2,\nu_{c_2}^{**}\rangle \ge_r \langle 0\rangle, \\ \dots \\ a_m\varphi(\langle X\rangle)+b_m\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c_2,\nu_{c_m}^{**}\rangle \ge_r \langle 0\rangle, \end{cases} \qquad (8)$$

где $\nu_{c_i}^{**}=\nu_c\,\mathrm{sign}\,(\nu_{c_i})$, $\nu_c=\max\{|\nu_{c_1}|,|\nu_{c_2}|,\dots,|\nu_{c_m}|\}$,

$$\mathrm{sign}\,(\nu_{c_i})=\begin{cases} 0, & \text{если } \nu_{c_i}=0, \\ 1, & \text{если } \nu_{c_i}>0, \\ -1, & \text{если } \nu_{c_i}<0, \end{cases}\ ,\ i \in J_m\ ,$$

$r(\langle U\rangle)=\nu_u$, также определяет выпуклый m-угольник.

Множество точек, удовлетворяющих уравнению (7), называется интервальной границей выпуклого интервального m-угольника **S*** и обозначается **frS***

[11]. При этом интервальные отрезки $[\langle A_1, A_2\rangle],\ldots,$ $[\langle A_{m-1}, A_m\rangle]$, $[\langle A_m, A_1\rangle]$ называются сторонами выпуклого интервального m-угольника, а точки $\langle A_1\rangle, \langle A_2\rangle, \ldots, \langle A_{m-1}\rangle, \langle A_m\rangle$ – вершинами выпуклого интервального m-угольника **S*** [11].

Замечание 2. Выпуклый интервальный m-угольник **S*** является ни открытым, ни замкнутым множеством в $\mathbf{I}_s^2(R)$ в силу того, что **frS*** $\subset$ fr**S***.

Определение 2. Выпуклый интервальный четырехугольник называется интервальным прямоугольником [11], если на подпространствах R^2_{xy} и $R^2_{\nu_x\nu_y}$ системы интервальных неравенств (3) и (8) соответственно определяют прямоугольники.

Определение 3. Выпуклый интервальный m-угольник называется правильным интервальным m-угольником, если на подпространствах R^2_{xy} и $R^2_{\nu_x\nu_y}$ системы интервальных неравенств (3) и (8) соответственно определяют правильные m-угольники.

Основываясь на определениях 2,3 и учитывая исходные данные поставленной задачи, аналитическое описание интервальной полосы Ω можно представить как

$$\Omega = \mathrm{int}\ \Omega \cup \mathbf{fr}\ \Omega, \qquad (9)$$

где

$$\mathrm{int}\,\mathbf{\Omega} = \begin{cases} \langle X\rangle + \langle 0, -\nu_x\rangle > \langle 0\rangle, \\ \langle Y\rangle + \langle 0, -\nu_y\rangle > \langle 0\rangle, \\ -\overline{\langle X\rangle} + \langle l, \nu_x\rangle > \langle 0\rangle, \\ -\overline{\langle Y\rangle} + \langle w, \nu_y\rangle > \langle 0\rangle, \end{cases}$$

$$\mathbf{fr}\,\Omega = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \langle X\rangle + \langle 0, \nu_l^0\rangle = \langle 0\rangle, \\ \langle Y\rangle + \langle 0, \nu_w^0\rangle \ge \langle 0\rangle, \\ -\overline{\langle Y\rangle} + \langle w, \nu_w^0\rangle \ge \langle 0\rangle, \end{cases} \\ \begin{cases} \langle Y\rangle + \langle 0, \nu_w^0\rangle = \langle 0\rangle, \\ \langle X\rangle + \langle 0, \nu_l^0\rangle \ge \langle 0\rangle, \\ -\overline{\langle X\rangle} + \langle l, \nu_l^0\rangle \ge \langle 0\rangle, \end{cases} \\ \begin{cases} \langle X\rangle + \langle -l, -\nu_l^0\rangle = \langle 0\rangle, \\ \langle Y\rangle + \langle 0, \nu_w^0\rangle \ge \langle 0\rangle, \\ -\overline{\langle Y\rangle} + \langle w, \nu_w^0\rangle \ge \langle 0\rangle, \end{cases} \\ \begin{cases} \langle Y\rangle + \langle -w, -\nu_w^0\rangle = \langle 0\rangle, \\ \langle X\rangle + \langle 0, \nu_l^0\rangle \ge \langle 0\rangle, \\ -\overline{\langle X\rangle} + \langle l, \nu_l^0\rangle \ge \langle 0\rangle, \end{cases} \end{array}\right.$$

а аналитическое описание правильного интервального многоугольника $\mathbf{S}_i$ – как

$$\mathbf{S}_i = \mathrm{int}\ \mathbf{S}_i \cup \mathbf{fr}\ \mathbf{S}_i\ , \qquad (10)$$

где

$$\mathrm{int}\ \mathbf{S}_i = \begin{cases} a^{(1)}\varphi(\langle X\rangle) + b^{(1)}\varphi(\langle Y\rangle) + \langle c_i, \nu_c^{(1)}\rangle > \langle 0\rangle, \\ a^{(2)}\varphi(\langle X\rangle) + b^{(2)}\varphi(\langle Y\rangle) + \langle c_i, \nu_c^{(2)}\rangle > \langle 0\rangle, \\ \ldots \\ a^{(m)}\varphi(\langle X\rangle) + b^{(m)}\varphi(\langle Y\rangle) + \langle c_i, \nu_c^{(m)}\rangle > \langle 0\rangle, \end{cases}$$

$$\mathbf{fr}\,\mathbf{S}_i = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^{(1)}\varphi(\langle X\rangle) + b^{(1)}\varphi(\langle Y\rangle) + \langle c_i, \nu_{c_i}\rangle = \langle 0\rangle, \\ a^{(2)}\varphi(\langle X\rangle) + b^{(2)}\varphi(\langle Y\rangle) + \langle c_i, \nu_{c_i}\rangle \ge \langle 0\rangle, \\ a^{(m)}\varphi(\langle X\rangle) + b^{(m)}\varphi(\langle Y\rangle) + \langle c_i, \nu_{c_i}\rangle \ge \langle 0\rangle, \end{cases} \\ \begin{cases} a^{(2)}\varphi(\langle X\rangle) + b^{(2)}\varphi(\langle Y\rangle) + \langle c_i, \nu_{c_i}\rangle = \langle 0\rangle, \\ a^{(3)}\varphi(\langle X\rangle) + b^{(3)}\varphi(\langle Y\rangle) + \langle c_i, \nu_{c_i}\rangle \ge \langle 0\rangle, \\ a^{(1)}\varphi(\langle X\rangle) + b^{(1)}\varphi(\langle Y\rangle) + \langle c_i, \nu_{c_i}\rangle \ge \langle 0\rangle, \end{cases} \\ \ldots \\ \begin{cases} a^{(m)}\varphi(\langle X\rangle) + b^{(m)}\varphi(\langle Y\rangle) + \langle c_i, \nu_{c_i}\rangle = \langle 0\rangle, \\ a^{(1)}\varphi(\langle X\rangle) + b^{(1)}\varphi(\langle Y\rangle) + \langle c_i, \nu_{c_i}\rangle \ge \langle 0\rangle, \\ a^{(m-1)}\varphi(\langle X\rangle) + b^{(m-1)}\varphi(\langle Y\rangle) + \langle c_i, \nu_{c_i}\rangle \ge \langle 0\rangle, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$a^{(p)} = -\cos\frac{\pi(2p-1)}{m}, \qquad b^{(p)} = -\sin\frac{\pi(2p-1)}{m},$$

$$\nu_c^{(p)} = -a^{(p)}\nu_x - b^{(p)}\nu_y\ , \qquad p \in J_m; \qquad c_i = R_i\cos\frac{\pi}{m}\ ,$$

$$\nu_{c_i} = \nu_{R_i}\cos\frac{\pi}{m},\ \nu_{R_i} = \sqrt{(\nu^0_{x_i})^2 + (\nu^0_{y_i})^2}\ .$$

Таким образом, задачу размещения правильных многоугольников $S_i \subset R^2$, $i \in J_n$ в полосе $\Omega \subset R^2$ с учетом погрешностей исходных данных можно представить как задачу размещения правильных интервальных многоугольников $\mathbf{S}_i \subset \mathbf{I}_s^2(R)$, $i \in J_n$ (10) в интервальной полосе $\Omega \subset \mathbf{I}_s^2(R)$ (9).

3. Математическая модель задачи

Теоретико-множественная модель поставленной задачи имеет вид

$$\begin{cases} \mathbf{S}_i \cap \mathbf{\Omega} = \mathbf{S}_i,\ i \in J_n, \\ \mathrm{cl}\,\mathbf{S}_i \cap \mathrm{cl}\,\mathbf{S}_j = \varnothing,\ i, j \in J_n,\ i \ne j. \end{cases} \qquad (11)$$

3.1. Условия размещения правильного интервального многоугольника в интервальной полосе.

Используя понятие интервального касания, введенное в работе [11], условия размещения многоугольника $\mathbf{S}_i$ в полосе Ω можно представить в виде структуры [2] интервальных неравенств:

$$\sigma'(\mathbf{F}_i((\langle Z_i\rangle),\langle L\rangle),\Delta^1,4), \qquad (12)$$

где $\mathbf{F}_i((\langle Z_i\rangle),\langle L\rangle)=\mathbf{F}_i((\langle X_i\rangle,\langle Y_i\rangle),\langle l,\nu_l\rangle)$ — набор интервальных неравенств вида

$$\langle X_i\rangle+\langle -2\nu_l^0-k_1R_i,\nu_l^0-k_1\nu_{R_i}\rangle\ge\langle 0\rangle,$$
$$-\overline{\langle X_i\rangle}+\langle l-2\nu_l-R_i,\nu_l-\nu_{R_i}\rangle\ge\langle 0\rangle,$$
$$\langle Y_i\rangle+\langle -2\nu_w^0-k_2R_i,\nu_w^0-k_2\nu_{R_i}\rangle\ge\langle 0\rangle,$$
$$-\overline{\langle Y_i\rangle}+\langle w-2\nu_w^0-k_2R_i,\nu_w^0-k_2\nu_{R_i}\rangle\ge\langle 0\rangle\,;$$

$$k_1=\begin{cases}1,\text{если } m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2),\\ \cos\dfrac{\pi}{m},\ \text{если } m\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\end{cases}$$

$$k_2=\begin{cases}1,\ \text{если } m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 4),\\ \sin\dfrac{2\pi[m/4]}{m},\ \text{если } m\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4),\\ \cos\dfrac{\pi}{m},\ \text{если } m\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 4),\\ \sin\dfrac{2\pi([m/4]+1)}{m},\ \text{если } m\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4).\end{cases}$$

3.2. Условия взаимного непересечения правильных интервальных многоугольников.

Условия взаимного непересечения многоугольников $\mathbf{S}_i$ и $\mathbf{S}_j$ в случае, если m — четное, описываются структурой интервальных неравенств:

$$\sigma''(\mathbf{F}_{ij}((\langle Z_i\rangle),(\langle Z_j\rangle)),\Delta^0,m), \qquad (13)$$

где $\mathbf{F}_{ij}((\langle Z_i\rangle),(\langle Z_j\rangle))=\mathbf{F}_{ij}((\langle X_i\rangle,\langle Y_i\rangle),(\langle X_j\rangle,\langle Y_j\rangle))$ — набор интервальных неравенств вида

$$-a^{(p)}\varphi(\langle X_j\rangle)-b^{(p)}\varphi(\langle Y_j\rangle)+\langle c_{ij}^{(p)},\nu_{c_{ij}}^{(p)}\rangle\ge\langle 0\rangle,\ p\in J_m;$$

$$c_{ij}^{(p)}=a^{(p)}x_i+b^{(p)}y_i-R_{ij}\cos\frac{\pi}{m},$$

$$\nu_{c_{ij}}^{(p)}=a^{(p)}\nu_{x_i}+b^{(p)}\nu_{y_i}-\nu_{R_{ij}}\cos\frac{\pi}{m},$$

$$R_{ij}=R_i+2\nu_{R_i}+R_j\ ,\ \nu_{R_{ij}}=\nu_{R_i}+\nu_{R_j}.$$

В случае же, когда m нечетное — структурой интервальных неравенств:

$$\sigma''(\mathbf{F}_{ij}((\langle Z_i\rangle),(\langle Z_j\rangle)),\Delta^0,2m), \qquad (14)$$

где $\mathbf{F}_{ij}((\langle Z_i\rangle),(\langle Z_j\rangle))=\mathbf{F}_{ij}((\langle X_i\rangle,\langle Y_i\rangle),(\langle X_j\rangle,\langle Y_j\rangle))$ — набор интервальных неравенств вида

$$-\tilde a^{(r)}\varphi(\langle X_j\rangle)-\tilde b^{(r)}\varphi(\langle Y_j\rangle)+\langle \tilde c_{ij}^{(r)},\tilde\nu_{c_{ij}}^{(r)}\rangle\ge\langle 0\rangle,\ r\in J_m,$$

$$-\hat a^{(q)}\varphi(\langle X_j\rangle)-\hat b^{(q)}\varphi(\langle Y_j\rangle)+\langle \hat c_{ij}^{(q)},\hat\nu_{c_{ij}}^{(q)}\rangle\ge\langle 0\rangle,\ q\in J_m;$$

$$\tilde a^{(r)}=-\cos\frac{\pi(2r-1)}{m},\ \hat a^{(q)}=-\cos\frac{2\pi q}{m},$$

$$\tilde b^{(r)}=-\sin\frac{\pi(2r-1)}{m},\ \hat b^{(q)}=-\sin\frac{2\pi q}{m},$$

$$\tilde c_{ij}^{(r)}=\tilde a^{(r)}x_i+\tilde b^{(r)}y_i-d_{ij}\cos(\frac{\pi}{m}-\gamma_{ij}^{(1)}),$$

$$\hat c_{ij}^{(q)}=\hat a^{(q)}x_i+\hat b^{(q)}y_i-d_{ij}\cos\gamma_{ij}^{(1)},$$

$$\tilde\nu_{c_{ij}}^{(r)}=\tilde a^{(r)}\nu_{x_i}+\tilde b^{(r)}\nu_{y_i}-\nu_{d_{ij}}\cos(\frac{\pi}{m}-\gamma_{ij}^{(2)}),$$

$$\hat\nu_{c_{ij}}^{(q)}=\hat a^{(q)}\nu_{x_i}+\hat b^{(q)}\nu_{y_i}-\nu_{d_{ij}}\cos\gamma_{ij}^{(2)},$$

$$d_{ij}=\sqrt{(R_i^*)^2+R_j^2+2R_i^*R_j\cos\frac{\pi}{m}},$$

$$R_i^*=R_i+2\nu_{R_i},\nu_{d_{ij}}=\sqrt{\nu_{R_i}^2+\nu_{R_j}^2+2\nu_{R_i}\nu_{R_j}\cos\frac{\pi}{m}}\ ,$$

$$\gamma_{ij}^{(1)}=\frac{\pi}{2m}-\mathrm{arctg}(\frac{R_i^*-R_j}{R_i^*+R_j}\mathrm{tg}\frac{\pi}{2m}),$$

$$\gamma_{ij}^{(2)}=\frac{\pi}{2m}-\mathrm{arctg}(\frac{\nu_{R_i}-\nu_{R_j}}{\nu_{R_i}+\nu_{R_j}}\mathrm{tg}\frac{\pi}{2m}).$$

Принимая во внимание (11)—(14), математическая модель рассматриваемой задачи в общем случае будет иметь вид

$$\arg\min\langle L\rangle, \qquad (15)$$
$$((\langle Z\rangle)_n,\langle L\rangle)\in\mathbf{D}\subset\mathbf{I}_s^{2n+1}(R)$$

$$\mathbf{D}:\ [\bigcap_{i=1}^{n}\sigma'(\mathbf{F}_i((\langle Z_i\rangle),\langle L\rangle),\Delta^1,4)]\cap$$
$$\cap[\bigcap_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}\sigma''(\mathbf{F}_{ij}((\langle Z_i\rangle),(\langle Z_j\rangle)),\Delta^0,k)], \qquad (16)$$

где $(\langle Z\rangle)_n=((\langle Z_1\rangle),(\langle Z_2\rangle),\ldots,(\langle Z_n\rangle))\in\mathbf{I}_s^{2n}(R)$,

$$k=\begin{cases}m\,,\ \text{если } m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2),\\ 2m\,,\ \text{если } m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2).\end{cases}$$

Замечание 3. При $\nu_w^0=0$, $\nu_l^0=0$; $\nu_{x_i}^0=0$, $\nu_{y_i}^0=0$, $i\in J_n$ математическая модель (15), (16) совпадает с математической моделью идеализированной оптимизационной задачи размещения правильных многоугольников в полосе [7].

4. Представление математической модели в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{4n+2}$

В силу сложности математической модели (15), (16), решение рассматриваемой задачи непосредственно в интервальном виде сопряжено с большими трудностями.

В целях использования в дальнейшем существующих методов решения оптимизационных задач размещения [3,7] перейдем от интервальных пространств $\mathbf{I}_s^g(R)$ к изометричным им евклидовым пространствам R^{2g}, $g\in J_n$ [8,10].

Пусть имеется отображение $\xi:\mathbf{I}_s^g(R)\to R^{2g}$ такое, что $\xi((\langle u_1,\nu_{u_1}\rangle,\langle u_2,\nu_{u_2}\rangle,\ldots,\langle u_g,\nu_{u_g}\rangle))=$

$=(u_1,\nu_{u_1},u_2,\nu_{u_2},\dots,u_g,\nu_{u_g})$. Рассмотрим один из элементов математической модели (15), (16) – интервальное множество $\mathbf{D}\subset\mathbf{I}_s^{2n+1}(R)$, описывающее область ее допустимых решений.

Осуществим отображение $\xi(\mathbf{D})$=ID, воспользовавшись при этом отношением порядка, введенным в пространстве $\mathbf{I}_s^2(R)$ [8,10].

Любое интервальное неравенство вида $a\varphi(\langle X\rangle)+b\varphi(\langle Y\rangle)+\langle c,\nu_c\rangle\ge\langle 0\rangle$ представимо [8,10] как совокупность

$$\left[\begin{array}{l} ax+by+c>0,\\ \begin{cases} ax+by+c=0,\\ a\nu_x+b\nu_y+\nu_c\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Тогда очевидно, что структура интервальных неравенств (12), участвующая в формировании множества **D**, сводится к системе совокупностей

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} x_i-2\nu_l^0-k_1R_i>0,\\ \begin{cases} x_i-2\nu_l^0-k_1R_i=0,\\ \nu_{x_i}+\nu_l^0-k_1\nu_{R_i}\ge 0,\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} -x_i+1-2\nu_l-R_i>0,\\ \begin{cases} -x_i+1-2\nu_l-R_i=0,\\ -\nu_{x_i}+\nu_l-\nu_{R_i}\ge 0,\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} y_i-2\nu_w^0-k_2R_i>0,\\ \begin{cases} y_i-2\nu_w^0-k_2R_i=0,\\ \nu_{y_i}+\nu_w^0-k_2\nu_{R_i}\ge 0,\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} -y_i+w-2\nu_w^0-k_2R_i>0,\\ \begin{cases} -y_i+w-2\nu_w^0-k_2R_i=0,\\ -\nu_{y_i}+\nu_w^0-k_2\nu_{R_i}\ge 0,\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \qquad (17)$$

структура интервальных неравенств (13) – к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} a^{(1)}(x_i-x_j)+b^{(1)}(y_i-y_j)-k_3R_{ij}>0,\\ \begin{cases} a^{(1)}(x_i-x_j)+b^{(1)}(y_i-y_j)-k_3R_{ij}=0,\\ a^{(1)}(\nu_{x_i}-\nu_{x_j})+b^{(1)}(\nu_{y_i}-\nu_{y_j})-k_3\nu_{R_{ij}}\ge 0,\end{cases}\\ \dots\\ a^{(m)}(x_i-x_j)+b^{(m)}(y_i-y_j)-k_3R_{ij}>0,\\ \begin{cases} a^{(m)}(x_i-x_j)+b^{(m)}(y_i-y_j)-k_3R_{ij}=0,\\ a^{(m)}(\nu_{x_i}-\nu_{x_j})+b^{(m)}(\nu_{y_i}-\nu_{y_j})-k_3\nu_{R_{ij}}\ge 0,\end{cases}\end{array}\right. \qquad (18)$$

а структура (14) – к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \tilde a^{(1)}(x_i-x_j)+\tilde b^{(1)}(y_i-y_j)-k_{ij}^{(1)}d_{ij}>0,\\ \begin{cases} \tilde a^{(1)}(x_i-x_j)+\tilde b^{(1)}(y_i-y_j)-k_{ij}^{(1)}d_{ij}=0,\\ \tilde a^{(1)}(\nu_{x_i}-\nu_{x_j})+\tilde b^{(1)}(\nu_{y_i}-\nu_{y_j})-k_{ij}^{(2)}\nu_{d_{ij}}\ge 0,\end{cases}\\ \dots\\ \tilde a^{(m)}(x_i-x_j)+\tilde b^{(m)}(y_i-y_j)-k_{ij}^{(1)}d_{ij}>0,\\ \begin{cases} \tilde a^{(m)}(x_i-x_j)+\tilde b^{(m)}(y_i-y_j)-k_{ij}^{(1)}d_{ij}=0,\\ \tilde a^{(m)}(\nu_{x_i}-\nu_{x_j})+\tilde b^{(m)}(\nu_{y_i}-\nu_{y_j})-k_{ij}^{(2)}\nu_{d_{ij}}\ge 0,\end{cases}\\ \hat a^{(1)}(x_i-x_j)+\hat b^{(1)}(y_i-y_j)-k_{ij}^{(3)}d_{ij}>0,\\ \begin{cases} \hat a^{(1)}(x_i-x_j)+\hat b^{(1)}(y_i-y_j)-k_{ij}^{(3)}d_{ij}=0,\\ \hat a^{(1)}(\nu_{x_i}-\nu_{x_j})+\hat b^{(1)}(\nu_{y_i}-\nu_{y_j})-k_{ij}^{(4)}\nu_{d_{ij}}\ge 0,\end{cases}\\ \dots\\ \hat a^{(m)}(x_i-x_j)+\hat b^{(m)}(y_i-y_j)-k_{ij}^{(3)}d_{ij}>0,\\ \begin{cases} \hat a^{(m)}(x_i-x_j)+\hat b^{(m)}(y_i-y_j)-k_{ij}^{(3)}d_{ij}=0,\\ \hat a^{(m)}(\nu_{x_i}-\nu_{x_j})+\hat b^{(m)}(\nu_{y_i}-\nu_{y_j})-k_{ij}^{(4)}\nu_{d_{ij}}\ge 0,\end{cases}\end{array}\right. \qquad (19)$$

где $k_3=\cos\dfrac{\pi}{m}$, $k_{ij}^{(1)}=\cos(\dfrac{\pi}{m}-\gamma_{ij}^{(1)})$,

$k_{ij}^{(2)}=\cos(\dfrac{\pi}{m}-\gamma_{ij}^{(2)})$, $k_{ij}^{(3)}=\cos\gamma_{ij}^{(1)}$, $k_{ij}^{(4)}=\cos\gamma_{ij}^{(2)}$.

Обозначим множество, описываемое системой (17), через χ_i, а множества, описываемые совокупностями (18),(19), — через $\chi_{ij}^{(m)}$ и $\chi_{ij}^{(2m)}$ соответственно. С учетом введенных обозначений образ ID интервального множества **D** в пространстве R^{4n+2} примет вид ID: $[\bigcap_{i=1}^{n}\chi_i]\cap[\bigcap_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}\chi_{ij}^{(k)}]$.

Отметим некоторые особенности множества ID.

1. Множество ID$\subset R^{4n+2}$.

2. Все соотношения, участвующие в описании множества ID, линейны, а следовательно, граница ID кусочно-линейна.

3. Множество χ_i (17) является ни открытым, ни замкнутым, выпуклым.

4. Множества $\chi_{ij}^{(m)},\chi_{ij}^{(2m)}$ (18), (19) являются ни открытыми, ни замкнутыми, неограниченными, невыпуклыми.

5. Множество ID при n≥2 в общем случае невыпукло – оно лежит в пересечении n выпуклых (17) и $2C_n^2$ невыпуклых (18), (19) множеств.

6. Множество ID, ID≠int ID, ID≠cl ID, лежит в пересечении n+$2C_n^2$ ни открытых, ни замкнутых множеств.

Элементом математической модели (15), (16) является также функция цели. При переходе от интервальных пространств к евклидовым в качестве функции цели выберем величину l.

Тогда, в результате указанного перехода, математическая модель (15), (16) примет вид:

$$\arg\min l, \quad (20)$$

$$((Z)_n, l, \nu_l) \in ID;$$

$$ID: \left[\bigcap_{i=1}^{n} \chi_i\right] \cap \left[\bigcap_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \chi_{ij}^{(k)}\right], \quad (21)$$

где $(Z)_n = (x_1, \nu_{x_1}, y_1, \nu_{y_1}, \ldots, x_n, \nu_{x_n}, y_n, \nu_{y_n}) \in R^{4n}$.

5. Метод решения

При решении задачи (20), (21) предлагается использовать модификацию метода ветвей и границ, предназначенную для решения класса оптимизационных геометрических задач [3,7].

Определение 4. Множество $E_s \subset R^s$ называется псевдомногогранным множеством размерности s, если оно задано произвольной структурой ψ^* линейных неравенств (как строгих, так и нестрогих).

Обозначим через T* набор уравнений, которые соответствуют всем неравенствам ψ^*.

Определение 5. Точка $x \in Cr\, E_s$ называется псевдовершиной E_s, если ее координаты являются решением системы не менее чем s уравнений набора T*, среди которых s линейно независимых.

Теорема. Если линейная функция цели f достигает своего глобального минимума в некоторой точке $x_0 \in E_s$, то x_0 — псевдовершина E_s.

Доказательство. Очевидно, что линейная функция цели f не может достигать минимума на int E_s, т.е. она достигает его на fr E_s. Граница E_s состоит из конечного числа множеств E_{s-1}, описание каждого из которых получается путем замены неравенства ψ^* соотвествующим уравнением набора T*. Пусть минимум достигается на одном из таких E_{s-1}. Поскольку сужение линейной функции f на линейное многообразие размерности s−1, содержащее E_{s-1}, остается линейной функцией, то ее минимум вновь не может достигаться на int E_{s-1}, т.е. достигается на fr E_{s-1}. Продолжая эти рассуждения, получаем, что f не может достигать минимума на int E_1. Описание E_1 получается путем замены s−1 неравенств ψ^* соответствующими уравнениями набора T*.

Итак, минимум f может достигаться лишь на fr E_1. Данная граница представляет собой конечный набор точек, каждая из которых описывается системой s линейно независимых уравнений набора T*. Из условия теоремы видно, что точка $x_0 \in E_s$. Значит, точка $x_0 \in Cr\, E_s$, т.е. является псевдовершиной E_s.

Следствие. Функция цели l задачи (20), (21) достигает глобального минимума в псевдовершинах ID.

Обозначим через $T=\{t_j\}, j=1,2,\ldots,(4kC_n^2+8n)$ набор уравнений, которые соответствуют неравенствам, участвующим в описании ID. Как показывает следствие, для решения (20), (21) можно применить стратегию построения систем уравнений из набора T, описывающих все псевдовершины области ID.

5.1. Построение дерева решений

Структура дерева решений в нашем случае обладает некоторой спецификой, обусловленной особенностями уравнений, входящих в набор T. А именно, как видно из (17)—(19), уравнения, содержащие переменные x_i, y_i, $i \in J_n$; l, и уравнения, включающие переменные ν_{x_i}, ν_{y_i}, $i \in J_n$; ν_l, жестко связаны между собой, так как образуют системы. Учитывая это, алгоритм построения дерева решений описывается следующим образом.

Поставим в соответствие корню дерева решений пространство R^{4n+2}.

Каждой вершине i-го уровня ($i \le 2n-1$, i — нечетное) соответствует линейное многообразие L_i размерности 4n-2i+2, полученное как пересечение линейного многообразия L_{i-1} с двумя гиперплоскостями, уравнения которых связаны между собой и содержат переменную x_i и переменную ν_{x_i} с ненулевыми коэффициентами соответственно. А всякой вершине j-го уровня ($j \le 2n$, j — четное) отвечает линейное многообразие L_j размерности 4n-2j+2, полученное как пересечение линейного многообразия L_{j-1} с двумя гиперплоскостями, уравнения которых связаны между собой и содержат переменную y_j и переменную ν_{y_j} с ненулевыми коэффициентами соответственно.

На последнем — (2n+1)-м — уровне дерева каждая его вершина соответствует точке пространства R^{4n+2}. Эта точка получена как пересечение некоторого линейного многообразия L_{2n} с двумя гиперплоскостями, уравнения которых связаны между собой и содержат переменную l и переменную ν_l с ненулевыми коэффициентами соответственно. Каждая вершина 2n-го уровня имеет n потомков [15], так как каждая из переменных l и ν_l с ненулевыми коэффициентами входит в n уравнений набора T.

Заметим, что при определенных значениях индексов p,r,q некоторые из коэффициентов $a^{(p)}, \tilde{b}^{(r)}, \hat{b}^{(q)}$ обращаются в ноль, а именно: $a^{(p)}=0$ при p=[m/4]+1 или p=m-[m/4], если $m \equiv 2 \pmod 4$; $\tilde{b}^{(r)}=0$ при r=[m/2]+1 и $\hat{b}^{(q)}=0$ при q=m. С учетом этого число систем уравнений, построенных на (2n+1)-м уровне, равно величине

$$k^* = \begin{cases} n\,[m\,(n-1)+2]^{2n}, \text{ если } m \equiv 0 \pmod 4, \\ n\,[(m-2)(n-1)+2]^n [m\,(n-1)+2]^n, \\ \quad \text{если } m \equiv 2 \pmod 4, \\ n\,[2m\,(n-1)+2]^n [(2m-2)(n-1)+2]^n, \\ \quad \text{если } m \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

5.2. Построение набора правил отсечения

В процессе решения задачи (20), (21) происходит исключение тех систем уравнений, решения которых не удовлетворяют условиям размещения в области (17); условиям взаимного непересечения (18), (19); либо увеличивают значение функции цели (20). Оценочное значение функции цели переопределяется в результате решения каждой из упомянутых выше систем, построенных при прохождении дерева решений. Для сокращения числа систем уравнений, которые необходимо решать на последнем — (2n+1)-м — уровне (а также на более высоких уровнях), предложен эффективный набор правил отсечения бесперспективных вершин дерева решений, базирующийся на правилах отсечения, приведенных в работах [3,7], и особенностях математической модели (20), (21).

В дальнейшем удобно использовать следующие обозначения:

$$s_i^{(1)} = \begin{cases} x_i - 2\nu_l^0 - k_1 R_i = 0, \\ \nu_{x_i} + \nu_l^0 - k_1 \nu_{R_i} = 0, \end{cases}$$

$$s_i^{(2)} = \begin{cases} -x_i + l - 2\nu_l - R_i = 0, \\ -\nu_{x_i} + \nu_l - \nu_{R_i} = 0, \end{cases}$$

$$s_i^{(3)} = \begin{cases} y_i - 2\nu_w^0 - k_2 R_i = 0, \\ \nu_{y_i} + \nu_w^0 - k_2 \nu_{R_i} = 0, \end{cases}$$

$$s_i^{(4)} = \begin{cases} -y_i + w - 2\nu_w^0 - k_2 R_i = 0, \\ -\nu_{y_i} + \nu_w^0 - k_2 \nu_{R_i} = 0, \end{cases}$$

$$s_v^{(h)}(i,j) = \begin{bmatrix} s_{ij}^{(p)}, \text{ если } v = 1 \ (h = p), \\ \tilde{s}_{ij}^{(r)}, \text{ если } v = 2 \ (h = r), \\ \hat{s}_{ij}^{(q)}, \text{ если } v = 3 \ (h = q), \end{bmatrix}$$

где

$$s_{ij}^{(p)} = \begin{cases} a^{(p)}(x_i - x_j) + b^{(p)}(y_i - y_j) - k_3 R_{ij} = 0, \\ a^{(p)}(\nu_{x_i} - \nu_{x_j}) + b^{(p)}(\nu_{y_i} - \nu_{y_j}) - k_3 \nu_{R_{ij}} = 0, \end{cases}$$

$$\tilde{s}_{ij}^{(r)} = \begin{cases} \tilde{a}^{(r)}(x_i - x_j) + \tilde{b}^{(r)}(y_i - y_j) - k_{ij}^{(1)} d_{ij} = 0, \\ \tilde{a}^{(r)}(\nu_{x_i} - \nu_{x_j}) + \tilde{b}^{(r)}(\nu_{y_i} - \nu_{y_j}) - k_{ij}^{(2)} \nu_{d_{ij}} = 0, \end{cases}$$

$$\hat{s}_{ij}^{(q)} = \begin{cases} \hat{a}^{(q)}(x_i - x_j) + \hat{b}^{(q)}(y_i - y_j) - k_{ij}^{(3)} d_{ij} = 0, \\ \hat{a}^{(q)}(\nu_{x_i} - \nu_{x_j}) + \hat{b}^{(q)}(\nu_{y_i} - \nu_{y_j}) - k_{ij}^{(4)} \nu_{d_{ij}} = 0, \end{cases}$$

$p \in J_n$, $r \in J_n$, $q \in J_n$.

Правило отсечения 1. Если на g-м уровне в системе, определяющей вершину дерева решений, содержится менее чем g-n-1 подсистем вида $s_v^{(h)}(i,j)$, то данная вершина является концевой.

Правило отсечения 2. Если на некотором нечетном уровне дерева решений выбрана подсистема $s_v^{(h)}(i,j)$, то на следующем уровне подсистемы $s_v^{(h)}(i,j)$ с теми же индексами i и j не выбираются.

Правило отсечения 3. Если построенная в некоторой вершине дерева решений система содержит подсистему вида

$$\begin{cases} s_v^{(h)}(i_1, i_2), \\ s_v^{(h)}(i_2, i_3), \\ s_v^{(h)}(i_3, i_1), \end{cases}$$

где $h_t \in J_m$, $v_t \in \{2,3\}$, $i_t \in J_n$, $i_t \neq i_s$, $t,s \in J_3$, то данная вершина является концевой.

Правило отсечения 4. Если построенная в некоторой вершине дерева решений система содержит подсистему вида

$$\begin{cases} s_l^{(h_1)}(i_1, i_2), \\ s_l^{(h_2)}(i_2, i_3), \\ s_l^{(h_3)}(i_3, i_1) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} s_{v_1}^{(h_1)}(i_1, i_2), \\ s_{v_2}^{(h_2)}(i_2, i_3), \\ s_{v_3}^{(h_3)}(i_3, i_1), \end{cases}$$

где $h_t \in J_m$, $v_t \in \{2,3\}$, $i_t \in J_n$, $i_t \neq i_s$, $t,s \in J_3$, и эта подсистема определяет внутреннюю точку области ID, то данная вершина является концевой.

Правило отсечения 5. Если на 2n-м уровне в системе, определяющей вершину дерева решений, отсутствует подсистема $s_i^{(1)}$ или $s_j^{(3)}$, то данная вершина является концевой.

Правило отсечения 6. Если на первых уровнях дерева решений (до 2n включительно) в систему, определяющую вершину, включены подсистемы $s_i^{(2)}$, то на (2n+1)-м уровне эти подсистемы в формировании системы не участвуют и соответствующие подсистемы не рассматриваются.

Прежде чем перейти к формулировке правила отсечения 7, рассмотрим вопрос о нахождении точных нижней и верхней оценок оптимального решения задачи (20), (21). Для этого введем дополнительные обозначения. Будем полагать, что Ω^0 — полоса Ω без учета погрешностей ($\nu_w^0=0$, $\nu_l^0=0$): $\Omega^0=\{(x,y)\in R^2 \mid x\in[0;l],\ y\in[0;w]\}$; Ω^- — полоса Ω с минимально допустимыми размерами: $\Omega^- =\{(x,y)\in R^2 \mid x\in[0+\nu_l^0;l], y\in[0+\nu_w^0;w-\nu_w^0]\}$; Ω^+ — полоса Ω с максимально допустимыми размерами: $\Omega^+=\{(x,y)\in R^2 \mid x\in[0-\nu_l^0;l],\ y\in[0-\nu_w^0;w+\nu_w^0]\}$; S_i^0, $i\in J_n$ — многоугольник S_i без учета погрешностей; R_i^0, $i\in J_n$ — радиус окружности, описанной около многоугольника S_i^0 ($\nu_{R_i}=0$); S_i^-, $i\in J_n$ — многоугольник S_i с минимально допустимыми размерами; R_i^-, $i\in J_n$ — радиус окружности, описанной около многоугольника S_i^- ($R_i^-=R_i-\nu_{R_i}$); S_i^+, $i\in J_n$ — многоугольник S_i с максимально допустимыми размерами; R_i^+, $i\in J_n$ — радиус окружности, описанной около многоугольника S_i^+ ($R_i^+=R_i+\nu_{R_i}$).

Если в качестве исходных данных в задаче оптимального размещения правильных ориентированных многоугольников в полосе без учета погрешностей [7] выбрать: 1) Ω^0 и S_i^0, $i\in J_n$; 2) Ω^+ и S_i^-, $i\in J_n$; 3) Ω^- и S_i^+, $i\in J_n$, то в первом случае определяется точное решение l^0 для идеализированного случая, во втором — точная нижняя оценка l^- оптимального решения задачи (20), (21), в третьем — точная верхняя оценка l^+ оптимального решения задачи (20), (21).

Правило отсечения 7. Если построенная в вершине g-го уровня дерева решений система уравнений может быть решена (количество уравнений совпадает с количеством неизвестных), но $\max\limits_{i\in J_s}(x_i+R_i) \notin [l^-, l^+]$ (s=g/2, если g - четное; s=[g/2]+1, если g - нечетное; s=[g/2], если g=2n+1) или найденные решения не удовлетворяют условиям (17)—(19), то данная вершина является концевой.

6. Численные эксперименты

В качестве тестового примера рассмотрим следующие исходные данные: $w=20$; $\nu_w^0=0{,}08$; $\nu_l^0=0{,}05$; $m=6$; $n=7$; $R_1=3$; $R_2=4{,}1$; $R_3=2{,}7$; $R_4=3{,}7$; $R_5=2{,}2$; $R_6=1{,}8$; $R_7=2$; $\nu_{x_1}^0=0{,}09$; $\nu_{x_2}^0=0{,}1$; $\nu_{x_3}^0=0{,}05$; $\nu_{x_4}^0=0{,}12$; $\nu_{x_5}^0=0{,}01$; $\nu_{x_6}^0=0{,}02$; $\nu_{x_7}^0=0{,}03$; $\nu_{y_1}^0=0{,}03$; $\nu_{y_2}^0=0{,}14$; $\nu_{y_3}^0=0{,}06$; $\nu_{y_4}^0=0{,}07$; $\nu_{y_5}^0=0{,}04$; $\nu_{y_6}^0=0{,}05$; $\nu_{y_7}^0=0{,}05$.

Применяя к решению поставленной задачи изложенный выше метод, получаем следующий результат: точное решение задачи (20), (21) равно: $l=10{,}8577$. Для сравнения, точное решение для идеализированного случая равно: $l^0=10{,}503$, а точные нижняя и верхняя оценки оптимального решения задачи (20), (21) равны соответственно: $l^-=9{,}657$, $l^+=11{,}1442$. Справедливо неравенство $l^-<l^0<l<l^+$, причем предложенный в работе алгоритм позволяет улучшить верхнюю оценку l^+ на 0,0965.

Литература: 1. *Стоян Ю.Г., Гиль Н.И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. К.: Наук. думка, 1976. 248с. 2. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук.думка, 1986. 286с. 3. *Новожилова М.В.* Решение задачи поиска глобального экстремума линейной функции цели на структуре линейных неравенств. Харьков, 1988. 48с. / (Препр./ АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; №292). 4. *Milencovic V., Daniels K., Li Zh.* Placement and compaction of nonconvex polygons for clothing manufacture // Paper for forth Canadian conference on computational geometry. St. John's, Newfoundland, Canada. 1992. P.10-18. 5. *Dowsland K.A., Dowsland W.B.* Solution approaches to irregular nesting problems // Europ. Journ. Oper. Res. 1995. 84. P.506-521. 6. *Элементы теории геометрического проектирования* / Под ред. В.Л.Рвачева. К.: Наук. думка, 1995. 244с. 7. *Сысоева Ю.А.* Математическая модель и метод решения задачи размещения правильных ориентированных многоугольников в полосе. Харьков, 1996. 19с. Рукопись представлена Ин-том проблем машиностроения НАН Украины. Деп. в ВИНИТИ 22 января 1996 г. №242В-96. 8. *Стоян Ю.Г.* Метрическое пространство центрированных интервалов // Докл. НАН Украины. 1995. №7. С.23-25. 9. *Стоян Ю.Г.* Интервальные отображения // Докл. НАН Украины. 1996. №10. С.57-63. 10. *Стоян Ю.Г.* Интервальное пространство $I_S^2(R)$. Интервальные уравнения. Харьков, 1996. 19с. (Препр./ НАН Украины. Ин-т проблем машиностроения; №392). 11. *Стоян Ю.Г.* Интервальные множества. Харьков, 1997. 27с. (Препр./ НАН Украины. Ин-т проблем машиностроения; № 400). 12. *Moore R.E.* Interval analysis. Prentice Hall, 1966. 400p. 13. *Kaucher E.* Interval analysis in the extended interval space IR // Comp.Suppl. 1980. P.33-49. 14. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 356с. 15. *Ахо А., Хопкфорт Дж, Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979. 536с.

Поступила в редколегию 20.06.98

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Чудинович И.Ю.

Сысоева Юлия Анатольевна, ассистент кафедры естественных наук ХТУРЭ. Научные интересы: оптимизационные методы геометрического проектирования. Адрес: 310726, Украина, Харьков, пр.Ленина, 14, тел. 30-09-03.

УДК 519.21

ФОКУСИРУЮЩИЕ ФАКТОРЫ. БАЗИСЫ ФОКУСИРОВКИ И СТАБИЛИЗАЦИИ

ДИКАРЕВ В.А.

Введены понятия меры фокусировки, базиса фокусировки и базиса стабилизации. Приведены примеры их применения при рассмотрении реальных процессов, которые могут быть описаны системами уравнений Колмогорова.

Рассмотрим задачи, связанные с процессами фокусировки и стабилизации [1—4]. Фокусировка и стабилизация имеют место в системах,эволюция которых может быть описана с помощью марковских процессов с непрерывным временем и конечным числом состояний. Явления фокусировки и стабилизации состоят в том, что при определенных воздействиях на процесс его основные характеристики (вероятности состояний, переходные вероятности и др.) с изменением времени все менее отличаются от наперед заданых значений. Эти воздействия можно выбрать так, что промежуток времени, необходимый для фокусировки и стабилизации, можно сделать сколь угодно малым. В статье основное внимание уделено именно этому случаю. Общий случай, когда время, необходимое для фокусировки и стабилизации, произвольно, рассматривается аналогично.

В [1,2] показано, что фокусировка в точке t_0 может иметь место, если элементы $\lambda_{ij}(t)$ инфинитезимальной матрицы $\Lambda(t)$ (все или их часть) при $t\uparrow t_0$ быстро возрастают. Возникающие при этом в точке t_0 разрывы функций $\lambda_{ij}(t)$ должны быть неинтегрируемы (случай точной фокусировки) или почти неинтегрируемы (случай s-фокусировки). Если кроме этого выполняются некоторые условия (см. [2,4]), то при $t\uparrow t_0$:

а) для случая точной фокусировки

$$P_j(S_0,t)\to\pi_j; \qquad (1)$$

б) для случая s-фокусировки

$$\varlimsup_{t\uparrow t_0} P_j(S_0,t)\in(\pi_j-\sigma,\pi_j+\sigma),$$
$$\varliminf_{t\uparrow t_0} P_j(S_0,t)\in(\pi_j-\sigma,\pi_j+\sigma). \qquad (2)$$

Здесь индексом j нумеруются состояния $\pi_j>0$, $\sum_j\pi_j=1$, (1) и (2) должны выполнятся для всех состояний; величина s в (2) является нижней гранью по всем $\tilde\sigma$, для которых условия (2) имеют место. Случай точной фокусировки связан с бесконечными энергозатратами и является некоторой идеализацией, позволяющей наиболее полно исследовать про-