ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СТРАХОВОГО ЗАПАСА НА ОСНОВЕ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ О ПОТОКАХ МАТЕРИАЛОВ

Н. В. Святская

Киев

В условиях бурно развивающейся промышленности возникают определенные трудности своевременного выполнения заказов различных предприятий. Например, довольно часты случаи несвоевременных поставок, а это ведет к убытку предприятий. Нередко недостающие материалы или сырье заменяются более дорогостоящими, или, напротив, более низкого качества. Все это снижает рентабельность предприятия и ухудшает качество выпускаемой продукции.

Встречаются и другие крайности,— учитывая опыт прошлых лет, руководство предприятий стремится к недопустимо большому увеличению запасов того или иного вида сырья. В этом случае происходит замораживание оборотных средств и увеличение стоимости хранения сырья. В настоящее время материально-техническое снабжение большинства предприятий определяется из расчета планового спроса на рассматриваемый вид сырья (из опыта предыдущих лет) плюс некоторый страховой запас. Необходимо определить разумные границы страхового запаса. Существуют различные модели материально-технического снабжения, общим для которых является обеспечение минимальных суммарных затрат, связанных с заготовками, хранением материалов и потерями из-за неудовлетворенного спроса (простой предприятий).

В настоящей работе анализируется модель, предусматривающая несвоевременную поставку материалов при ритмичном непрерывном спросе постоянной интенсивности.

Сделаем некоторые допущения.

1. Рассматривается модель для одного из видов складируемого сырья.
2. Спрос непрерывен и имеет постоянную интенсивность λ.
3. Сырье поступает в дискретные моменты времени; заказ должен быть сделан на T единиц времени раньше поставки.
4. Момент выписки сырья определяется критическим уровнем запасов Q_1, который будем называть точкой заказа.
5. Сырье поступает со скоростью $v = \infty$ (мгновенное поступление)
6. Издержки содержания запасов сырья пропорциональны интегралу по времени положительного уровня запасов.
7. Размеры заказов постоянны во времени.
8. Интервалы времени между моментами поступления случайны подчиняются закону распределения вероятностей с плотностью p_t.

Такая модель часто встречается при малом времени корреляции функции спроса (возможность ввода предположения относительно спроса постоянной интенсивности) по сравнению со средним временем между точкой выдачи заказа и прибытием партии на склад.

Рассмотрим модель, изображенную на рис. 1, где λ — интенсивность потребления (величина спроса в единицу времени).

Введем условные обозначения:

$q = \lambda T_x$ — размер страхового запаса;

T_x — время расхода страхового запаса;

$f(t)$ — функция спроса рассматриваемого вида сырья;

Q_1 — критический уровень запасов;

Q_0 — размер партии;

p_t — плотность распределения вероятностей поставок;

T_0 — математическое ожидание момента прибытия заказа;

h — величина убытка от простоя в единицу времени;

c — стоимость хранения единицы сырья в единицу времени.

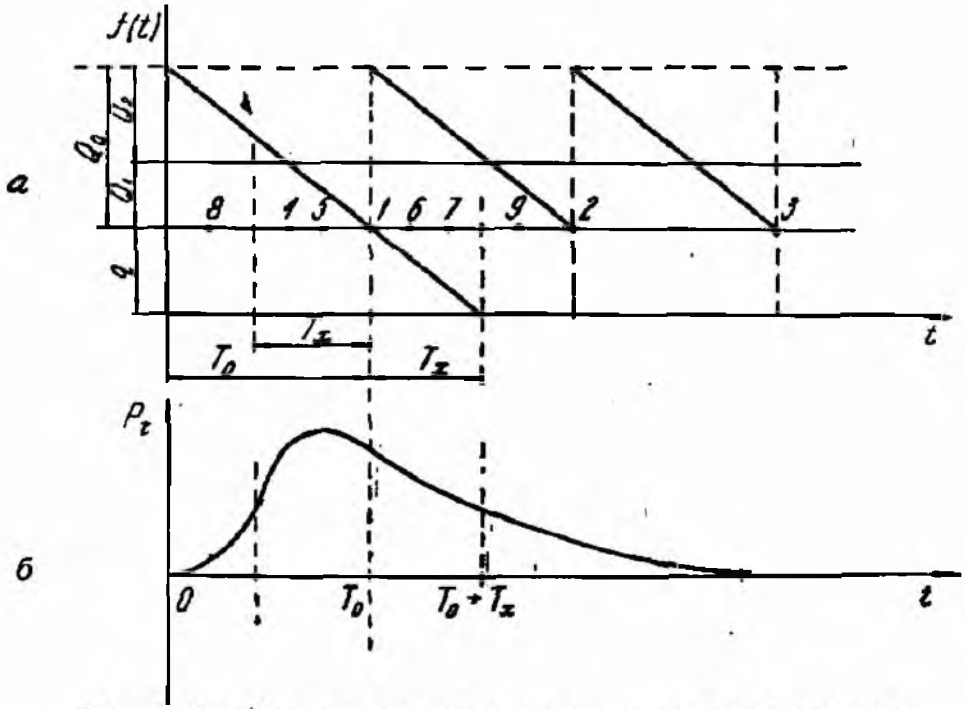


Рис. 1. Вид функции спроса при переменном времени поставок.

Интервалы времени между моментами поступления носят случайный характер.

На рис. 1 точкам *1, 2, 3* соответствует T_0; *4, 5, 8* — более ранняя поставка, по сравнению с T_0; *6, 7, 9* — задержка поставки.

Стоимость хранения страхового запаса в течение рассматриваемого времени (например, года) $T_г$ может быть представлена как произведение

$$cqT_г = c\lambda T_x T_г. \tag{1}$$

Величину убытка от возможного простоя можно выразить интегралом

$$h\frac{T_г}{T_0}\int_{T_0+T_x}^{\infty}(t - T_0 - T_x)\,p_t dt, \tag{2}$$

где $\frac{T_г}{T_0}$ — число поставок в течение $T_г$.

Определим минимальную суммарную стоимость издержек хранения в убытка от неудовлетворенного спроса

$$\min\left\{c\lambda T_x T_г + h\frac{T_г}{T_0}\int_{T_0+T_x}^{\infty}(t - T_0 - T_x)\,p_t dt\right\}. \tag{3}$$

Для нахождения оптимального страхового запаса $q = \lambda T_x$ минимизируем выражение (3), приравняв к нулю его дифференциал по T_x,

$$\frac{dF}{dT_x} = c\lambda + \frac{h}{T_0}\left(\int_{T_0+T_x}^{\infty}(t - T_0 - T_x)\,p_t dt\right)'_{T_x} = 0;$$

$$\frac{c\lambda T_0}{h} + \left(\int_{T_0+T_x}^{\infty} tp_t dt\right)'_{T_x} - T_0\left(\int_{T_0+T_x}^{\infty} p_t dt\right)'_{T_x} - \int_{T_0+T_x}^{\infty} tp_t dt -$$

$$- T_x\left(\int_{T_0+T_x}^{\infty} p_t dt\right)'_{T_x} = 0;$$

$$\frac{c\lambda T_0}{h} - \left(\int_{T_0}^{T_0+T_x} tp_t dt\right)'_{T_x} + T_0\left(\int_{T_0}^{T_0+T_x} p_t dt\right)'_{T_x} +$$

$$+ T_x\left(\int_{T_0}^{T_0+T_x} p_t dt\right)'_{T_x} - 0{,}5 + \int_{T_0}^{T_0+T_x} p_t dt = 0.$$

В результате того, что $f_1(t) = tp_t$ и $f_2(t) = p_t$ — непрерывные функции, можно применить правило дифференцирования интеграла, являющегося функцией верхнего предела,

$$\frac{c\lambda T_0}{h} - (T_0 + T_x)\,p_{(T_0+T_x)} + T_0 p_{(T_0+T_x)} + T_x p_{(T_0+T_x)} -$$

$$- 0{,}5 + \int_{T_0}^{T_0+T_x} p_t dt = 0;$$

$$\int_{T_0}^{T_0+T_x} p_t dt = 0{,}5 - \frac{c\lambda T_0}{h}. \qquad (4)$$

Из выражения (4) легко найдем T_x.

Рассмотрим частный случай, когда распределение моментов поставок подчиняется закону Рэлея.

В этом случае

$$p_t = \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}};$$

$$\int_{T_0}^{T_0+T_x} \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 0{,}5 - \frac{c\lambda T_0}{h}.$$

С другой стороны,

$$\int_{T_0}^{T_0+T_x} \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = -e^{-\frac{(T_0+T_x)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{T_0^2}{2\sigma^2}}.$$

$$e^{-\frac{T_0^2}{2\sigma^2}} = 0{,}5.$$

Следовательно, выражение (4) в случае закона распределения Рэлея принимает следующий вид:

$$e^{-\frac{(T_0+T_x)^2}{2\sigma^2}} = \frac{c\lambda T_0}{h},$$

или

$$T_x = \sigma\sqrt{2\ln\frac{h}{c\lambda T_0}} - T_0. \qquad (5)$$

Рассмотрим характер суммарных затрат на простом числовом примере со следующими соотношениями:

$$T_0 = 24;\ \sigma = 20;\ h = 10^4;\ c = 1;\ \lambda = 1.$$

Стоимость хранения страхового запаса

$$c\lambda T_x = 1 \cdot 1 \cdot T_x.$$

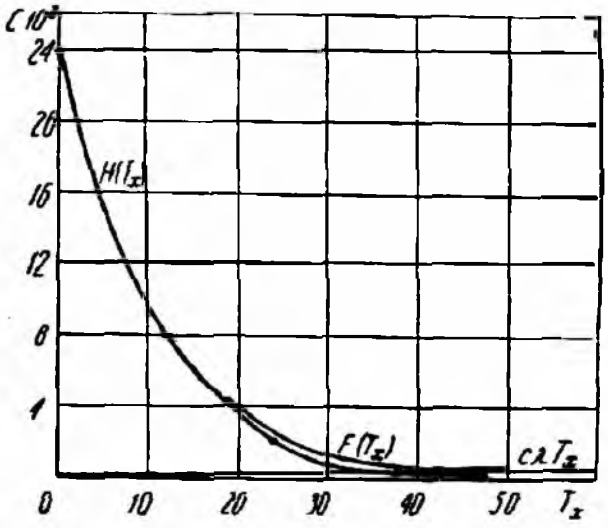


Рис. 2. График суммарных затрат для рассматриваемого числового примера

Убыток от возможного простоя

$$H(T_x) = \frac{h}{T_0}\int_{T_0+T_x}^{\infty}(t - T_0 - T_x)\,p_t dt =$$

$$= \frac{h}{T_0}\int_{T_0+T_x}^{\infty}\frac{t^2}{\sigma^2}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt - e^{-\frac{(T_0+T_x)^2}{2\sigma^2}}h\left(1+\frac{T_x}{T_0}\right) =$$

$$= \frac{h}{T_0}\int_{T_0+T_x}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt = \frac{h}{T_0}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma - \frac{h}{T_0}\int_0^{T_0+T_x}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Табулированная функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \frac{1}{2},$$

поэтому

$$\frac{h\sigma}{T_0}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{h\sigma}{T_0}\int_0^{\frac{T_0+T_x}{\sigma}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx;$$

$$x = \frac{t}{\sigma}$$

$$F(T_x) = \frac{h\sigma}{T_0}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{h\sigma}{T_0}\sqrt{2\pi}\left(\Phi(x) - \frac{1}{2}\right).$$

Найдем $\Phi(x)$ для нескольких точек рассматриваемого числового примера. Расчеты функции $F(T_x)$ представлены в таблице, а также даны в виде графика на рис. 2.

Из графика следует, что оптимальная величина

$$q = \lambda T_x = 1 \cdot 46 = 46.$$

При помощи выражения (5) найдем

$$T_x = 20\sqrt{2\ln\frac{10^4}{1 \cdot 1 \cdot 24}} - 20 = 46.$$

$$q = 1 \cdot 46 = 46.$$

Определение суммарных издержек хранения и неудовлетворенного спроса для числового примера

t	x	$\Phi(x)$	$\Phi(x) - \frac{1}{2}$	$\frac{h\sigma}{T_0}\sqrt{2\pi}\left(\Phi(x) - \frac{1}{2}\right)$	$F(T_x)$
0	1,2	0,88	0,38	$0{,}76\ 10^4$	2400
12	1,8	0,96	0,46	$0{,}92\ 10^4$	800
24	2,4	0,99	0,49	$0{,}98\ 10^4$	200
36	3,0	0,998	0,498	$0{,}996\ 10^4$	40
46	3,5	0,99938	0,49976	$0{,}99952\ 10^4$	4,8
48	3,6	0,99984	0,49984	$0{,}99968\ 10^4$	3,2
60	4,2	0,99998	0,49998	$0{,}99996\ 10^4$	0,4
72	4,8	0,999999	0,499999	$0{,}999998\ 10^4$	0,02

Анализ специфики статистических данных для каждого промышленного предприятия и использование изложенного материала помогут определить наиболее рациональные с экономической точки зрения размеры страховых запасов складируемых материалов.