

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _____ Комп'ютерних наук _____

(повна назва)

Кафедра _____ Програмної інженерії _____

(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА

Пояснювальна записка

рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Назва теми атестаційної роботи магістра

Дослідження матричних обчислень для вивчення еволюції динамічних систем

Виконав: студент 2 курсу, групи ПЗМ-18-2 _____

Корнієнко К.М.

(прізвище, ініціали)

спеціальності 121 – Інженерія програмного забезпечення

(код і повна назва спеціальності)

Освітньо-наукової програми

Інженерія програмного забезпечення

(повна назва освітньої програми)

Керівник _____ проф. Власенко Л.А. _____

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри, проф. _____ З.В.Дудар

2020 р.

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

Факультет Комп'ютерних наукКафедра Програмної інженерії

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність 121 – Інженерія програмного забезпечення

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-наукова програмаОсвітня програма Інженерія програмного забезпечення

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри _____

(підпис)

« _____ » _____ 20 ____ р.

ЗАВДАННЯ**НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ**студентові Корнієнко Ксенії Михайлівні

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Дослідження матричних обчислень для вивчення еволюції динамічних систем.

затверджена наказом університету від “ ____ ” _____ 20 ____ р. No _____

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії
травня 2020 р.

3. Вихідні дані до роботи алгоритми обробки матричних обчислень, алгоритми, кодування матричних обчислень, пояснювальна записка. Використовувати ОС Windows, середовище об'єктно-орієнтованого проектування

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі *мета роботи, аналіз проблемної галузі і постановка задачі, огляд досліджень матричних обчислень*

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка *
1	Аналіз предметної галузі	20 квітня 2020	
2	Огляд існуючих методів	28 квітня 2020	
3	Методи матричних обчислень для вивчення еволюції матричних систем	1 травня 2020	
4	Підготовка пояснювальної записки	4 травня 2020	
5	Підготовка презентації та доповіді	19 травня 2020	
6	Попередній захист	20 травня 2020	
7	Нормоконтроль, рецензування	21 травня 2020	
8	Занесення диплома в електронний архів	21 травня 2020	
9	Допуск до захисту у зав. кафедри	25 травня 2020	

Дата видачі завдання _____ 2020 р.

Студент _____

(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Власенко Л.А. _____

(підпис)

(посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Атестаційна робота магістра: 53 с., 19 рис., 7 джерел.

ДИНАМІЧНА СИСТЕМА, МАТРИЧНА ЕКСПОНЕНТА, ЗАКОН ЕВОЛЮЦІЇ, C#, ДЕСКТОПНИЙ ДОДАТОК, ЯВНІ ФОРМУЛИ.

Метою роботи є дослідження матричних обчислень для вивчення еволюції динамічних систем, а також особливості програмної реалізації явних формул для деяких матричних експонент при дослідженні динамічних систем.

Методи розробки програмного продукту базуються на інструментах розробки десктопного додатку на платформі C# з використанням спеціальних бібліотек (Drawing2D).

В результаті роботи розглянуто методи дослідження матричних експонент, методі дослідження динамічних систем.

DYNAMIC SYSTEM, MATRIX EXPONENT, LAW OF EVOLUTION, C #, DESKTOP APPENDIX, EXPRESS FORMULAS, EXPONENTIALITY.

The aim of the work is to study matrix calculations to study the evolution of dynamical systems, as well as the features of software implementation of explicit formulas for some matrix exponents in the study of dynamical systems.

Software development methods are based on desktop application development tools on the C # platform using special libraries (Drawing2D).

As a result of work methods of research of matrix exponents, a method of research of dynamic systems are considered.

ЗМІСТ

Вступ.....	6
1 Аналіз предметної області.....	8
1.1 Огляд наукової і патентної літератури.....	8
1.2 Аналіз стану розв'язання проблеми.....	9
1.3 Формулювання задачі.....	10
2 Опис проведених досліджень.....	11
2.1 Дослідження експоненти загальної матриці 2×2	11
2.2 Дослідження експоненціальності матриць $n * n$, що виставляється квадратичним поліноміалом.....	16
3 Технології та етапи розробки.....	21
3.1 Вибір технологій	21
3.2 Етапи розробки.....	22
4 Програмна реалізація	25
Висновки.....	36
Перелік джерел посилання.....	37
Додаток А Програмний код.....	38
Додаток Б Слайди презентації.....	39

ВСТУП

В останній час увага до математичних методів, які дозволяють якісно проаналізувати досліджувану динамічну систему дуже підвищилась. Ця увага обумовлена проблемами, які виникають при моделюванні складних систем, які вимагають чисельного дослідження за умовою виявлених особливостей існуючої системи з використанням сучасних обчислювальних засобів (наприклад, паралельних). Отже, програмна реалізація математичних методів при дослідженні динамічних систем – актуальна задача.

Під терміном динамічна система розуміють будь-який об'єкт (механічний, фізичний, хімічний або біологічний) або процес (обчислювальний або процеси перетворення інформації), для якого однозначно визначено поняття стану як сукупність деяких величин в даний момент часу і заданий закон, який описує зміну початкового стану з плином часу. Цей закон – закон еволюції, саме він дозволяє за початковим станом прогнозувати майбутній стан динамічної системи. Описи динамічних систем для завдання закону еволюції також різноманітні: за допомогою диференціальних рівнянь, дискретних відображень, теорії графів, теорії марковських ланцюгів і тощо.

Експонента матриці - матрична функція від квадратної матриці, аналогічна звичайній експоненційної функції. Матрична експонента встановлює зв'язок між алгеброю Лі матриць і відповідний групою Лі. Саме експоненціала матриці відіграє важливу роль у лінійних системах управління та звичайних диференціальних рівняннях. Однак теоретичний аналіз та чисельні обчислення все ще вивчаються.

Пошук надійних і точних методів для обчислення матричної експоненти досить триває і також є предметом значних сучасних досліджень в області

математики і чисельного аналізу. Є деякі застосунки і програми, які частково обчислюють матричні експонент, до таких застосунків можливо віднести Matlab, GNU Octave і SciPy. Усі перелічені програмні продукти використовують апроксимант Пада.

Метою роботи є дослідження матричних обчислень для вивчення еволюції динамічних систем, а також особливості програмної реалізації явних формул для деяких матричних експонент при дослідженні динамічних систем.

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ

1.1 Огляд наукової і патентної літератури

На сьогоднішній час наукової літератури щодо теми явних формул для матричних експонент при дослідженні динамічних систем на українській мові дуже мало, переважно уся існуюча література, яка відноситься до теми на англійській мові.

Перший приклад стаття «Цікавий метод експоненти деяких спеціальних матриць» Цзін Чена та Гонффен Зуу в книзі *Systems Science & Control Engineering* від компанії Taylor & Francis. В статті було описано центральну роль експоненціальної матриці у теорії лінійної системи та управління. Ними був розроблений метод для обчислення точного рішення для матричної експоненти з припущенням, що матриця, яка була використана має власне значення, на прикладах було показано ефективність запропонованого засобу.

Другий яскравий приклад – стаття Хунгуо Сюя «Два результати щодо матричної експоненти» в якій розглядається дві проблеми, які виникають внаслідок лінійних систем управління, саме до яких і відносяться деякі матричні експоненціальні задачі (більшість відкритих проблем було сформовано Бернштейном).

І останньою наведеною науковою працею буде стаття Деніса Бернштейна та Вазіна Со «Деякі явні формули для матричного експоненціалу», мета якої складається в тому, щоб представити явні формули для полегшення використання динамічних систем. Саме ця стаття була першою спробою зібрати якомога більше явних формул в одному місці для дослідження динамічних систем. З теорії лінійних систем ці формули повинні бути корисними у майбутніх дослідженнях щодо матричної експоненти.

Незважаючи на те, що теоретичні та обчислюванні властивості матричної експоненціальної функції вже широко використовуються, матрична експонента має численні властивості, які ще в процесі вивчення та дослідження.

Отже, враховуючі перелічені наукові праці та існуючі дослідження можливо проаналізувати актуальний стан розв'язання виділеної проблеми.

1. 2 Аналіз стану розв'язання проблеми

Як було зазначено в попередньому підрозділі Деніс Бернштейн та Вазін Со в своїй праці зібрали найбільше явних формул для полегшення дослідження динамічних систем. Однак так як матричні експоненти все ще вивчаються та все ще виникають проблеми при моделюванні складних систем проблема все ще залишається невирішеною.

На сьогоднішній день програмної реалізації явних формул для деяких матричних експонент при дослідженні динамічних систем не достатньо, є декілька онлайн сервісів, які аналізують явні формули, але не всі вони враховують процес еволюції.

Отже, проведеного аналізу сучасного стану проблему достатньо для того, щоб сформулювати основні задачі.

1.3 Формулювання задачі

Для вирішення описаної проблеми необхідно сформулювати наступні задачі:

- а) провести теоретичні дослідження;
- б) проаналізувати результати досліджень та сформулювати їх подальший розвиток;
- в) на основі отриманих даних сформулювати вимоги до майбутнього програмного продукту;
- г) на основі вимог до програмного продукту обрати технології та середовища, які краще усього їм відповідають;
- д) розділити процес розробки програмного продукту на відповідні логічні етапи;
- е) розробити програмний продукт згідно з вимогами та обраними технологіями;
- є) протестувати розроблений програмний продукт.

В результаті цього підрозділу були сформовані задачі і на основі попередніх розділів та відображених задач можливо перейти до теоретичних досліджень.

2 ОПИС ПРОВЕДЕНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

2.1 Дослідження експоненти загальної матриці 2 x 2

Згідно з темою магістерської роботи та аналізу існуючої літератури були проведені наступні теоретичні дослідження існуючої явної формули:

Нехай є матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Розглянемо 2 випадки:

$$1) \text{ якщо } a = d, \text{ тоді } e^A = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \text{ якщо } a \neq d, \text{ тоді } e^A = e^a \begin{pmatrix} e^a & b(e^a - e^d)/(a - d) \\ 0 & e^d \end{pmatrix}$$

Результати спеціалізуються на тому випадку, коли e^A – реальна матриця. Наступний результат характеризує його з точки зору власних значень.

Нехай μ та λ позначать власні значення $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Також розглянемо 2 випадки:

$$1) \text{ якщо } \mu = \lambda, \text{ тоді } e^A = e^\lambda [(1 - \mu)I + A]$$

$$2) \text{ якщо } \mu \neq \lambda, \text{ тоді } e^A = \frac{\mu e^{\lambda} - \lambda e^{\mu}}{\mu - \lambda} I + \frac{e^{\mu} - e^{\lambda}}{\mu - \lambda} A$$

Доказ:

Так як $\mu \neq \lambda$, існує обернена матриця X , така що $A = X \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} X^{-1}$.

Отже, $e^A = X \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\mu} \end{pmatrix} X^{-1}$.

Тоді $\begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\mu} \end{pmatrix} = \frac{(\mu e^{\lambda} - \lambda e^{\mu})}{(\mu - \lambda)} I + (e^{\mu} - e^{\lambda}) / (\mu - \lambda) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ з другого виразу.

Нехай є матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Розглянемо 2 випадки:

$$1) \text{ якщо } (a - d)^2 + 4bc = 0, \text{ тоді } e^A = e^{(a+d)/2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{a-d}{2} & b \\ c & 1 - \frac{a-d}{2} \end{pmatrix}$$

2) якщо $(a - d)^2 + 4bc \neq 0$, тоді:

$$e^A = e^{(a+d)/2} \begin{pmatrix} e^a \cosh(\Delta) + \frac{(a-d) \sinh(\Delta)}{2\Delta} & b \frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} \\ c \frac{\sinh(\Delta)}{\Delta} & \cosh(\Delta) - \frac{(a-d) \sinh(\Delta)}{2\Delta} \end{pmatrix},$$

$$\text{де } \Delta = \frac{1}{2}\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}.$$

Доказ: власні значення A - $\mu = (a+d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc})/2$ та $\lambda = (a+d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc})/2$. Тож $\mu = \lambda$ лише в випадку $(a-d)^2 + 4bc = 0$.

Розглянемо випадок, коли A – реальна:

$$\text{Нехай } \epsilon \text{ матриця } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}.$$

Розглянемо 3 випадки:

$$1) \text{ якщо } (a-d)^2 + 4bc = 0, \text{ тоді } e^A = e^{(a+d)/2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{a-d}{2} & b \\ c & 1 - \frac{a-d}{2} \end{pmatrix}$$

2) якщо $(a-d)^2 + 4bc > 0$, тоді:

$$e^A = e^{(a+d)/2} \begin{pmatrix} \cosh(\delta) + \frac{(a-d) \sinh(\delta)}{2\delta} & b \frac{\sinh(\delta)}{\delta} \\ c \frac{\sinh(\delta)}{\delta} & \cosh(\delta) - \frac{(a-d) \sinh(\delta)}{2\delta} \end{pmatrix},$$

$$\text{де } \delta = \frac{1}{2}\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}.$$

3) якщо $(a-d)^2 + 4bc < 0$, тоді:

$$e^A = e^{(a+d)/2} \begin{pmatrix} \cos(\delta) + \frac{(a-d) \sin(\delta)}{2\delta} & b \frac{\sin(\delta)}{\delta} \\ c \frac{\sin(\delta)}{\delta} & \cos(\delta) - \frac{(a-d) \sin(\delta)}{2\delta} \end{pmatrix},$$

$$\text{де } \delta = \frac{1}{2} \sqrt{|(a-d)^2 + 4bc|}.$$

Доказ: для 1) та 2) аналогічна як і з попереднім доказом, а стосовно 3) можливо помітити, що $\Delta = \delta i$. Тоді, $\cosh(\delta) = \cos(\delta)$ та $\sinh(\Delta)/\Delta = \sin(\delta)/\delta$.

Приклад № 1:

Нехай A – це дійсна матриця $\begin{pmatrix} \beta & \mu \\ -\mu & \beta \end{pmatrix}$, тоді

$$e^{At} = e^{\beta t} \begin{pmatrix} \cos \mu t & \sin \mu t \\ -\sin \mu t & \cos \mu t \end{pmatrix}.$$

Приклад № 2:

Нехай A – це дійсна матриця $\begin{pmatrix} \beta & \mu \\ \mu & -\beta \end{pmatrix}$, тоді

$$e^A = \begin{pmatrix} \cosh(\delta) + \frac{\beta \sin(\delta)}{\delta} & \frac{\mu \sinh(\delta)}{\delta} \\ \frac{\mu \sinh(\delta)}{\delta} & \cosh(\delta) - \frac{\beta \sinh(\delta)}{\delta} \end{pmatrix}, \text{ де}$$

$$\delta = \sqrt{\mu^2 + \beta^2}$$

В якості слідства попереднього дослідження розглянемо механічне рівняння вібрації другого порядку:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0,$$

де m , c та k – дійсні. Якщо $m \neq 0$ тоді можливо записати це рівняння у вигляді системи:

$$\dot{z} = Az,$$

$$\text{де } z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}.$$

Отже, потрібно отримати значення e . Випадок коли $k = 0$ є найпростішим оскільки A приводиться до трикутної форми. У цьому випадку можливо використати попередні дослідження:

Випадок 1) Якщо $k = 0$ та $c = 0$ тоді

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Випадок 2) Якщо $k = 0$ та $c \neq 0$ тоді

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{c}(1 - e^{-ct/m}) \\ 0 & e^{-ct/m} \end{pmatrix}$$

У наступному кроці потрібно зосередитись на випадку коли $m > 0$, $c \geq 0$ та $k > 0$. У цьому випадку:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \rho = \frac{c}{2\sqrt{mk}},$$

де ω_n позначає незатухаючу природну частоту вібрації та позначає коефіцієнт демпування. Тепер A можливо записати як:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\rho\omega_n \end{pmatrix}.$$

Також потрібно зазначити, що $\omega_n > 0$ та $\rho \geq 0$.

Отже, можливо виділити наступні випадки:

Випадок 3) коли $k > 0$ та $\rho = 0$ тоді

$$e^{At} = e^{\beta t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_n t) & \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \\ -\omega_n \sin(\omega_n t) & \cos(\omega_n t) \end{pmatrix}.$$

Випадок 4) коли $k > 0$ та $0 < \varrho < 1$

$$e^{At} = e^{-\varrho \omega_n t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_d t) + \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \sin(\omega_d t) & \frac{1}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \\ \frac{-\omega_d}{1-\varrho^2} \sin(\omega_d t) & \cos(\omega_d t) - \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \sin(\omega_d t) \end{pmatrix},$$

$$\text{де } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \varrho^2}$$

Випадок 5) коли $k < 0$ та $\varrho = 1$, тоді

$$e^{At} = e^{-\omega_n t} \begin{pmatrix} 1 + \omega_n t & t \\ -\omega_n^2 t & 1 - \omega_n t \end{pmatrix}.$$

Випадок 6) коли $k > 0$ та $\varrho > 0$ тоді

$$e^{At} = e^{-\varrho \omega_n t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_d t) + \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \sin(\omega_d t) & \frac{1}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \\ \frac{-\omega_d}{1-\varrho^2} \sin(\omega_d t) & \cos(\omega_d t) - \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} \sin(\omega_d t) \end{pmatrix},$$

$$\text{де } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \varrho^2}.$$

2.2 Дослідження експоненціальності матриць $n \times n$, що виставляється квадратичним поліноміалом

Для дослідження матричних обчислень необхідно отримати формулу для матриці $n \times n$, яка задовольняє квадратичний многочлен. Ці дослідження можливо провести з використанням теоретичних досліджень [3] для матриць $n \times n$. Оскільки за теоремою Кейлі-Гамільтона цей клас включає всі матриці 2×2 , результати досліджень, які були описані в попередньому підрозділі відносяться до особливого випадку. Крім того, ці результати застосовуються до певних матриць $n \times n$, таких як рангових або ідентифікуючих матриць.

Розглянемо наступну лему:

Нехай $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ та припустимо, що $A^2 = pl$, де $p \in \mathbb{C}$.

Розглянемо наступні випадки:

- 1) $p = 0$, тоді $e^A = I + A$.
- 2) $p \neq 0$, тоді $e^A = \cosh(\sqrt{p})I + (\sinh(\sqrt{p})/(\sqrt{p}))A$.

Доказ:

Так як $A^2 = pl$, $A^{2k} = p^k l$ та $A^{2k+1} = p^k A$ у випадку $k \geq 0$. Тоді,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \left[I + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \dots \right] + \left[A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \dots \right] = \left[1 + \frac{p}{2!} + \frac{p^2}{4!} + \dots \right] + \left[I + \frac{p}{3!} + \frac{p^2}{5!} + \dots \right] * A = \cosh(\sqrt{p})I + (\sinh(\sqrt{p})/(\sqrt{p}))A.$$

Отже, другий випадок був доведений.

Розглянемо інші випадки:

1) $A^2 = 0$, тоді $e^A = I + A$.

2) $A^2 = I$, тоді $e^A = \cosh(1)I + \sinh(1)A$.

Нехай $A \in C^{n \times n}$ та припустимо, що $A^2 + 2\lambda A + \mu I = 0$, де $p, \mu, \lambda \in C$, тоді:

1) Якщо $\lambda^2 = \mu$, тоді

$$e^A = e^{-\lambda}[(1 + \lambda)I + A].$$

2) Якщо $\lambda^2 \neq \mu$, тоді

$$e^A = e^{-\lambda} \left\{ \cosh(\sqrt{\lambda^2 - \mu}) + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \mu}} \sinh(\sqrt{\lambda^2 - \mu}) \right\} I + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \mu}} \sinh(\sqrt{\lambda^2 - \mu}) A$$

Доказ:

1) $e^A = e^{-\lambda} e^B = e^{-\lambda} [I + B] = e^{-\lambda} [(1 + \lambda)I + A]$

2) $e^A = e^{-\lambda} e^B = e^{-\lambda} \left[\cosh(\sqrt{\lambda^2 - \mu})I + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \mu}} \sinh(\sqrt{\lambda^2 - \mu}) \right] B =$
 $e^{-\lambda} \left\{ \cosh(\sqrt{\lambda^2 - \mu}) + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \mu}} \sinh(\sqrt{\lambda^2 - \mu}) \right\} I +$
 $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \mu}} \sinh(\sqrt{\lambda^2 - \mu}) A \left. \right\}$

Отже, обидва випадки були доведені.

Нехай $A \in R^{n \times n}$ та припустимо, що $A^2 + 2\lambda A + \mu I = 0$, де $\mu, \lambda \in R$, тоді:

1) Якщо $\lambda^2 = \mu$, тоді

$$e^A = e^{-\lambda}[(1 + \lambda)I + A].$$

2) Якщо $\lambda^2 > \mu$, тоді

$$e^A = e^{-\lambda} \left\{ \cosh(\sqrt{\lambda^2 - \mu}) + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \mu}} \sinh(\sqrt{\lambda^2 - \mu}) \right\} I + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \mu}} \sinh(\sqrt{\lambda^2 - \mu}) A$$

3) Якщо $\lambda^2 < \mu$, тоді

$$e^A = e^{-\lambda} \left\{ \cos(\sqrt{\mu - \lambda^2}) + \frac{\lambda}{\sqrt{\mu - \lambda^2}} \sinh(\sqrt{\mu - \lambda^2}) \right\} I + \frac{1}{\sqrt{\mu - \lambda^2}} \sinh(\sqrt{\mu - \lambda^2}) A$$

Якщо A – це складна матриця $2 \times 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то згідно з теоремою Кайлі-Гамільтона, $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0$. Використовуючи попередні докази $\lambda = -(a + d)/2$ так $\mu = ad - bc$.

Нехай $A \in C^{n \times n}$ та припустимо, що ранг матриці $A = 1$:

1) $\text{tr } A = 0$, тоді $e^A = I + A$.

2) $\text{tr } A \neq 0$, тоді $e^A = I + ((e^{\text{tr } A} - 1)/\text{tr } A)A$.

Доказ:

Так як ранг матриці $A = 1$, $A^2 = (\text{tr } A)A$. Таким чином, якщо використати попередні дослідження $\lambda = (\text{tr } A)/2$ та $\mu = 0$.

Та в останньому випадку необхідно розглянути ідемпотентну матрицю:

Нехай $A \in C^{n \times n}$ та припустимо, що $A^2 = A$, тоді $e^A = I + (e - 1)A$.

Доказ: якщо використати попередні докази досліджень, $\lambda = -\left(\frac{1}{2}\right)$ та

$$\mu = 0.$$

Отже, після проведеного дослідження експоненти загальної матриці 2×2 та дослідження експоненціальності матриць $n \times n$, що виставляються квадратичним поліноміалом можливо перейти до визначення програмного продукту, який буде створений та технологій, які будуть використані, а також визначення етапів розробки програмного продукту.

3 ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЕТАПИ РОЗРОБКИ

3.1 Вибір технологій

Згідно з попередніми дослідженнями та сформульованою задачею необхідно створити програмний продукт, який полегшить процес дослідження матричних обчислень для обчислень еволюцій.

Програмний продукт має графічно відображати формули, які використовуються для дослідження еволюцій матричних систем. Спочатку потрібно вибрати мову програмування, найбільш популярними на сьогоднішній день є Java, C# та Python. Необхідно проаналізувати переваги та недоліки перелічених мов програмування.

Java – це об'єктно-орієнтована мова програмування, яка зазвичай використовується для мобільних, мережових та корпоративних застосунків. Саме ця мова використовується для більшості наукових проектів, особливо в сфері аналізу природньої мови. До переваг можна віднести – простий синтаксис, стандарт для корпоративних обчислювальних систем, безпека,

незалежність від платформи та многопоточність. До недоліків можна віднести – низьку продуктивність, відсутність нативного дизайну, складний код.

C# – це також об'єктно-орієнтована мова програмування, яка в свою чергу використовується для мобільних та десктопних застосунків. До переваг відносяться функціональне програмування, гнучкість, орієнтація на безпеку та підтримку майкрософт. З недоліків можливо виділити орієнтованість здебільшого на .NET, складний синтаксис та низьку продуктивність.

Python – високорівнева мова програмування, стандартна бібліотека якої включає в себе великий об'єм корисних функцій. Python підтримує об'єктно-орієнтоване, функціональне, імперативне та аспектно-орієнтоване програмування. До переваг відносяться широке використання, простий синтаксис, велика кількість якісних бібліотек. До недоліків – низька швидкість виконання програм, незручність використання для мобільних розробок та використання великої кількості пам'яті через гнучкість типів даних.

Отже, після аналізу переваг та недоліків найбільш популярних мов програмування десктопних застосунків був обраний C# для подальшого програмного продукту.

Так як програмний продукт повинен графічно відображати формули потрібно використати простір імен C# - `Drawing.Drawing2D`, який забезпечує розширений функціонал двовимірної та векторної графіки. Також у цьому просторі імен є такий клас як `Matrix` та метод `MatrixOrder`, який вказує порядок операцій перетворення матриці.

Для подібного програмного продукту не потрібно зберігати дані, тож необхідності у бази даних немає, але якщо у майбутньому потрібно буде аналізувати та порівнювати усі обчислення можливо буде її додати.

Отже, так як технології були обрані, можливо переходити до етапів розробки.

3.2 Етапи розробки

Розробка програмного продукту – це не тільки створення її коду, а ще багато інших процесів, до яких відносяться – постановка задачі, формулювання задачі, створення алгоритму, створення програми, синтаксична відладка, тестування програми, документування та аналіз отриманих даних.

Постановка задачі – це етап на якому задача розбивається на логічні частини, частково це було зроблено у розділі з аналізом предметної області.

До етапу формулювання задачі відноситься також і аналіз задачі. На цьому етапі необхідно детально проаналізувати стан розв'язання проблеми та описати поставлену задачу, цей етап був також детально виконаний у першому розділі.

На етапі створення алгоритму треба детально описати кроки, які потрібні для вирішення поставленої задачі. Згідно з задачею можливо виділити наступні кроки – користувач вводить необхідні дані до матриці (коефіцієнти та усі числові значення), потім на основі введених даних, кількості кроків та теоретичних досліджень будується графічне зображення.

На наступному етапі створюється програма, яка потім підлягає відладці, яка дозволяє виявити помилки, які були допущені в коді. Код програми повинен бути легкозрозумілим та відповідати стандартним, також повинні бути функціональні тести, які покриватимуть значну частину програмної реалізації.

На етапі тестування програма тестується с різними наборами даних, щоб перевірити чи вона виконує поставлену задачу и які помилки потрібно виправити.

Існує два основних види тестування – функціональне та структурне. При функціональному тестування програма розглядається в якості «чорного ящика» та перевіряється згідно з специфікацією. При структурному тестуванні програма розглядається як «білий ящик», перевіряється саме логіка програми та усі можливі дії. Отже, структурне та функціональне тестування не може в повному обсязі перевірити правильність програми.

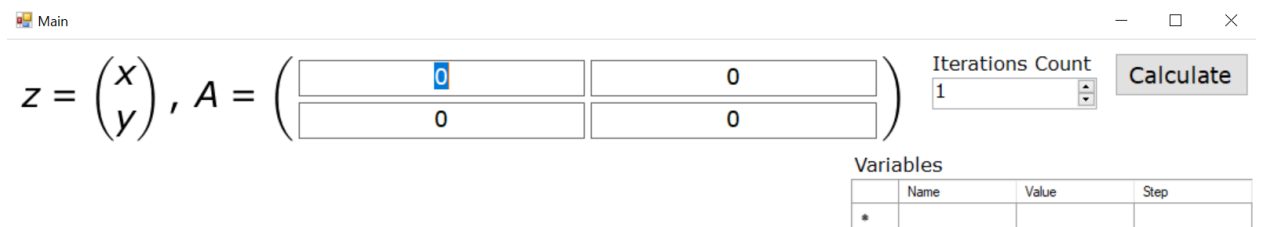
Етап документування включає в себе багато описів, які полегшують процес програмування, до цього етапу входять постановка задачі, проектні документи, алгоритми та програми. Також необхідно створити інструкцію користувача, в якій повинне бути детальне описання як користуватись програмним продуктом.

На останньому етапі аналізу отриманих даних необхідно перевірити на реальних даних чи правильно працює програма. На цьому етапі створення програми закінчено.

Отже, етапи розробки були визначені, також були обрані технології відповідно до існуючий вимог, тож можливо переходити до етапу програмної реалізації.

4 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

При запуску програми з'являється головне вікно програми:



«Рисунок 4.1 – Головне вікно програми»

На головному вікні знаходиться матриця, яку необхідно заповнити коефіцієнтами або виразами:

Main

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

«Рисунок 4.2 – Матриця»

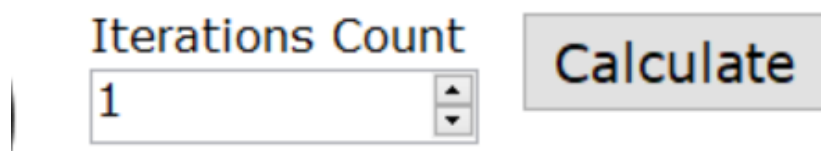
Також на головному вікні знаходиться таблиця зі змінними, в яку потрібно додати ім'я змінної, її значення та значення кроку, яке буде використане при одній ітерації. Усі змінні, які були введені у матриці повинні мати значення.

Variables

	Name	Value	Step
•			

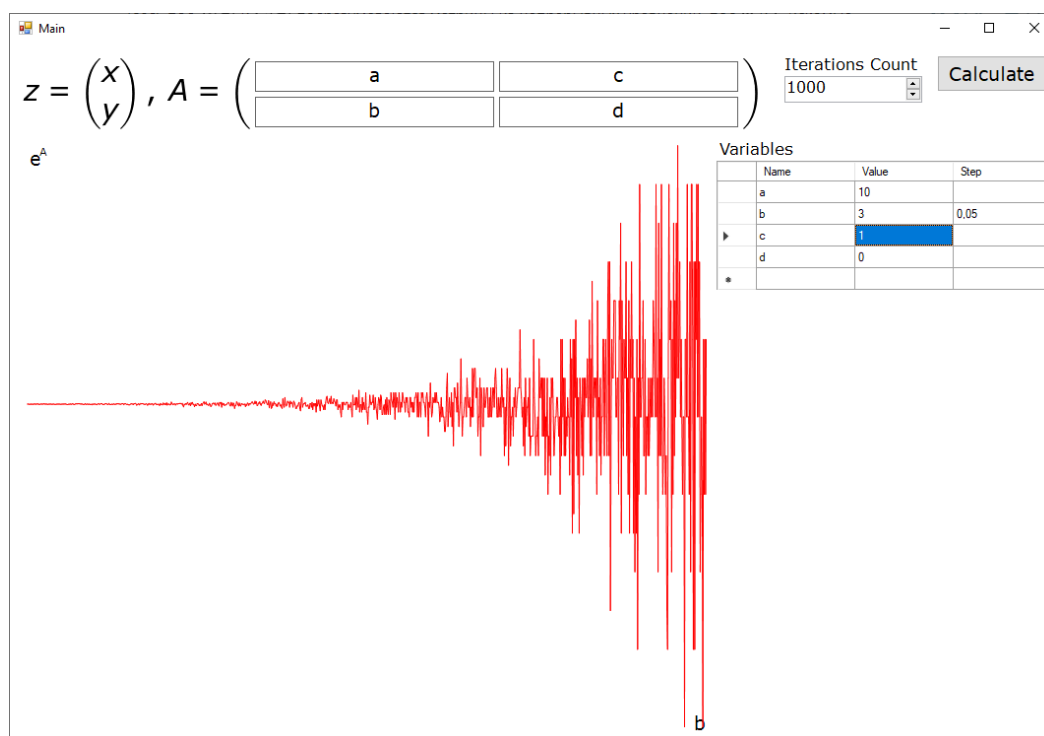
«Рисунок 4.3 – Таблиця змінних»

Та останні елементи на головному вікні - кількість ітерацій (за замовчуванням «1») та кнопка «Calculate», натиснувши на яку відображається графічне зображення згідно з теоретичними дослідженнями.



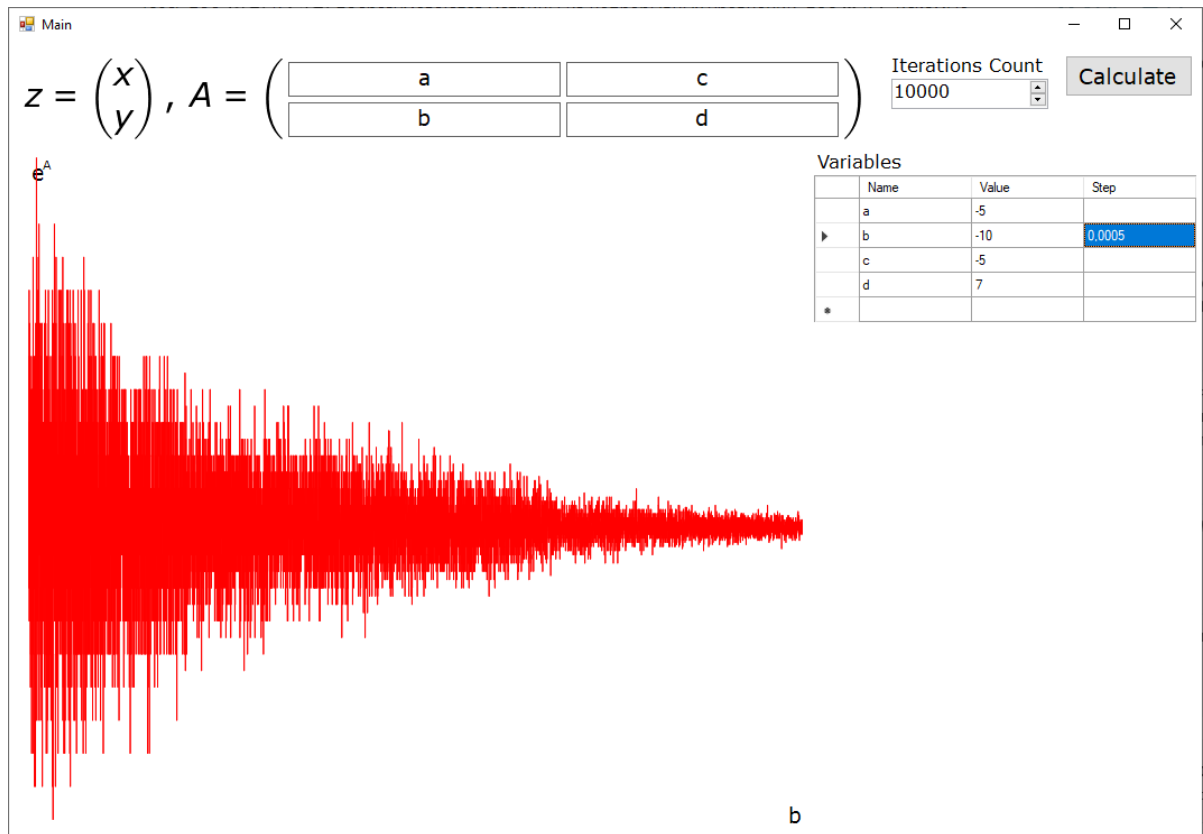
«Рисунок 4.3 – Кількість ітерацій»

Якщо коефіцієнти $a \neq b \neq c \neq d$ та кількість ітерацій 1000 відображається наступне графічне зображення:



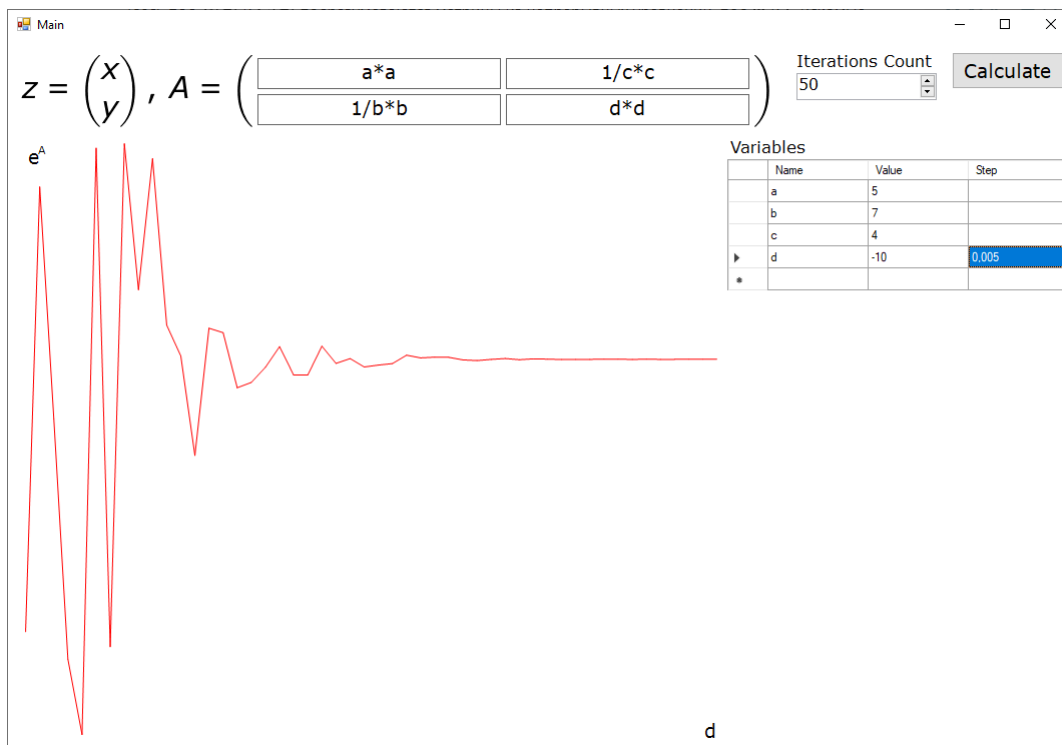
«Рисунок 4.4 – Приклад №1»

Кількість ітерацій, значення кроку та значення змінних можливо змінити в будь-який час:



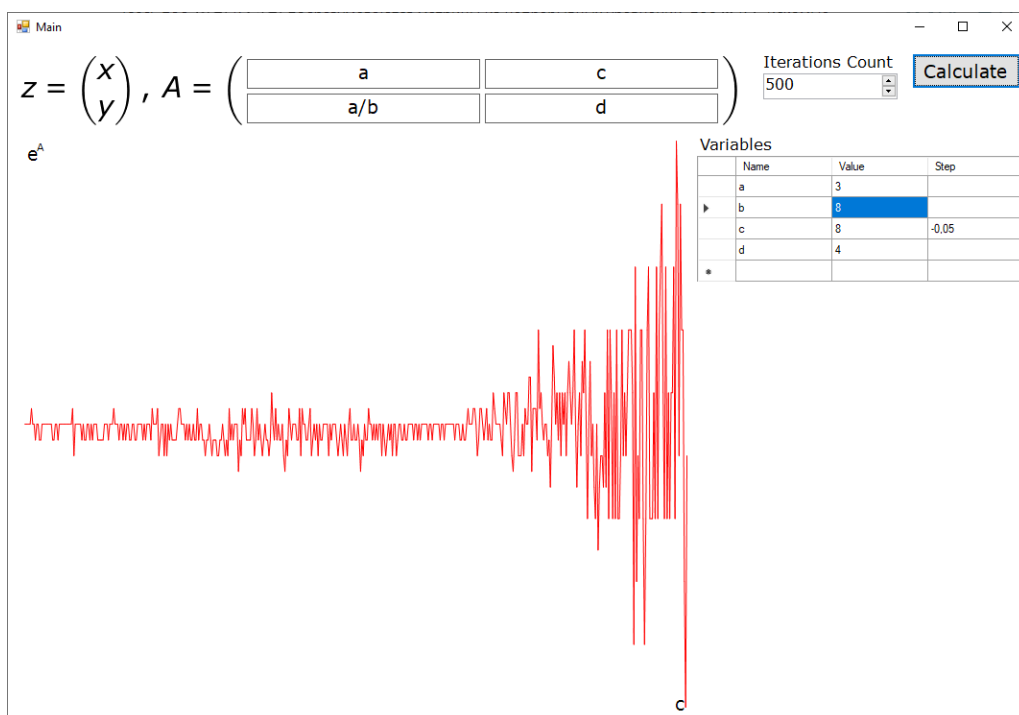
«Рисунок 4.4 – Приклад №2»

В якості значень змінних може бути необхідний вираз:

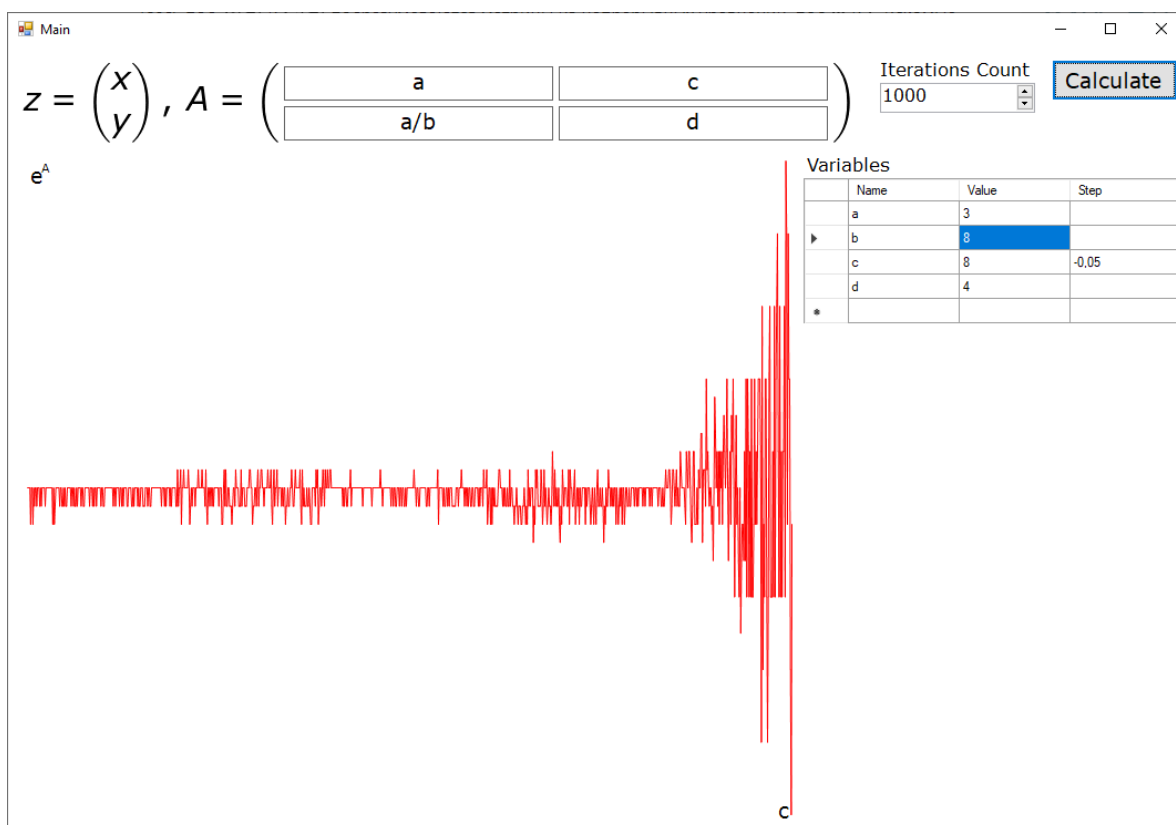


«Рисунок 4.5 – Приклад №3»

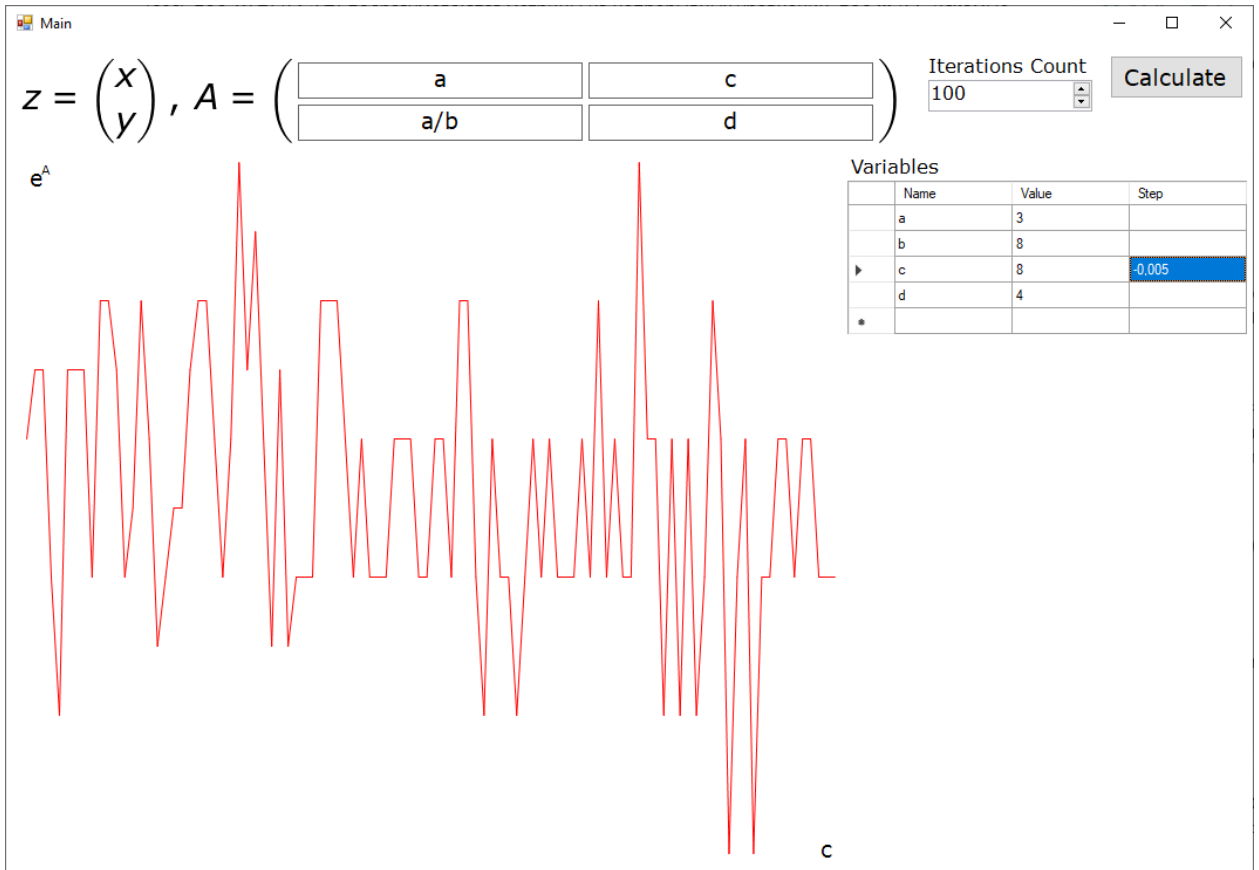
Завдяки тому, можливість зміни кількості ітерацій дозволяє дослідити експоненту:



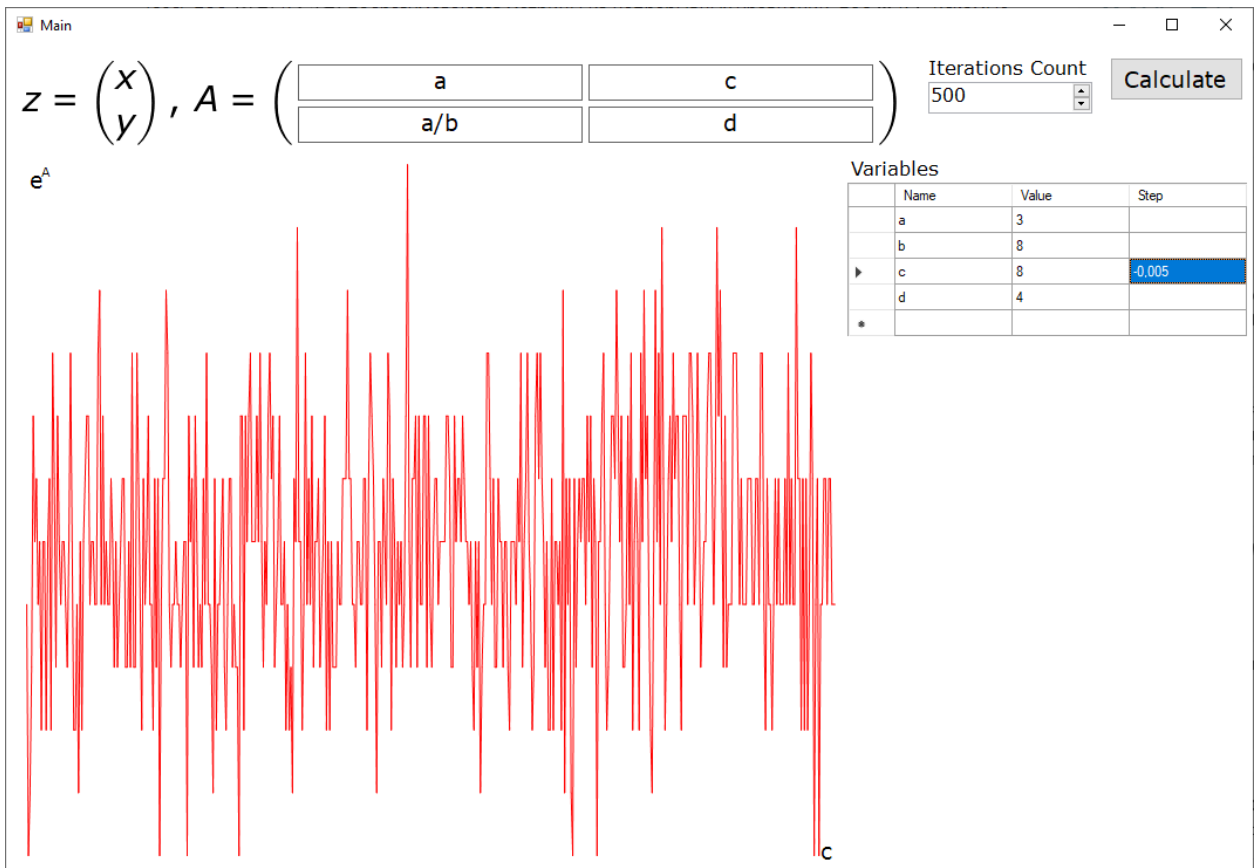
«Рисунок 4.6 – Приклад №4 з 500 ітераціями»



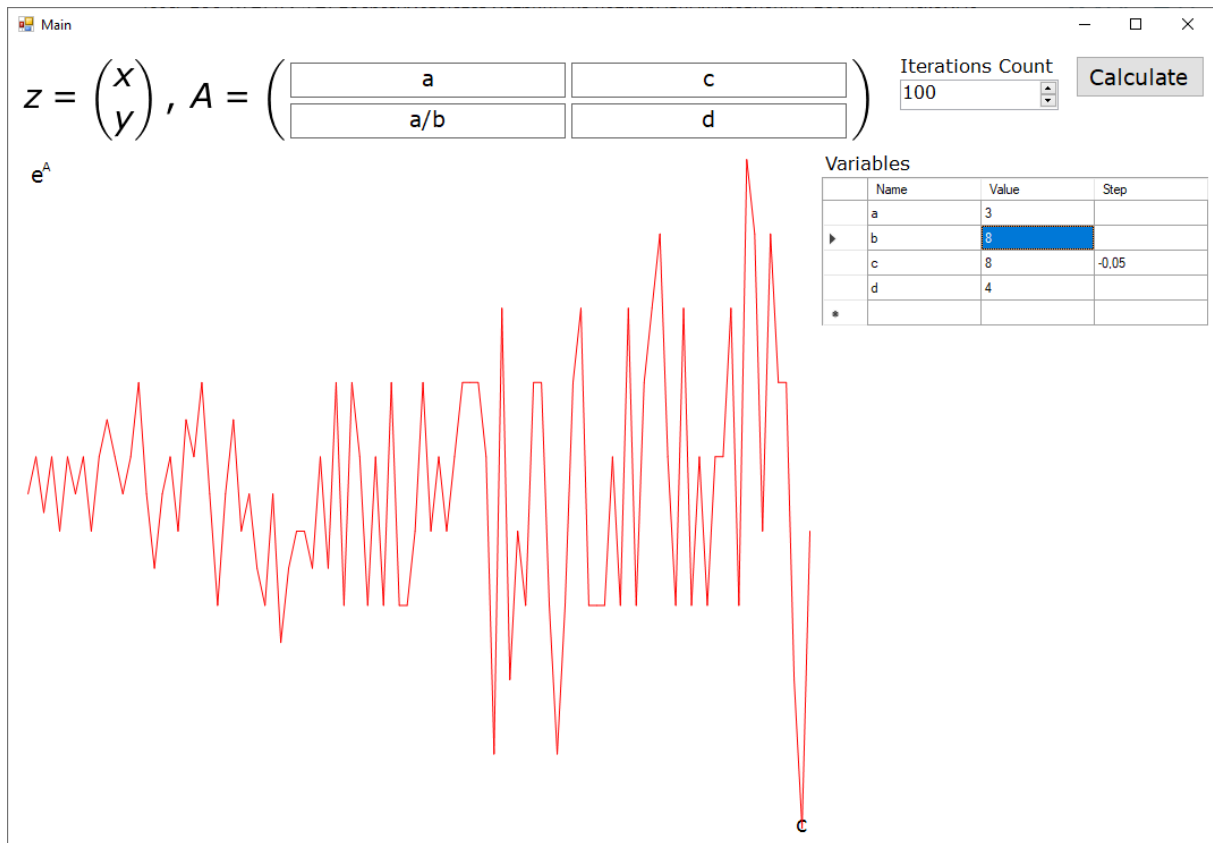
«Рисунок 4.7 – Приклад №4 з 1000 ітераціями»



«Рисунок 4.8 – Приклад №5 з 100 ітераціями»

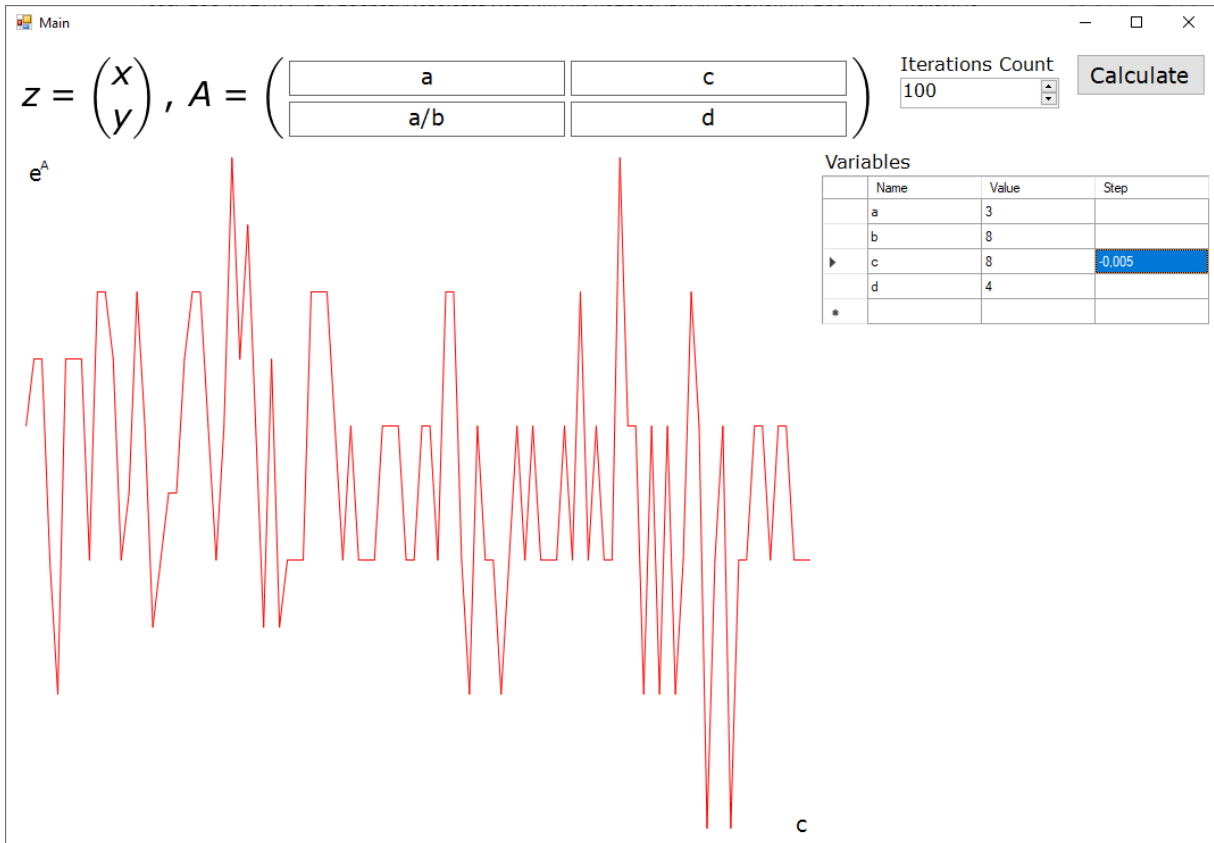


«Рисунок 4.9 – Приклад №5 з 500 ітераціями»

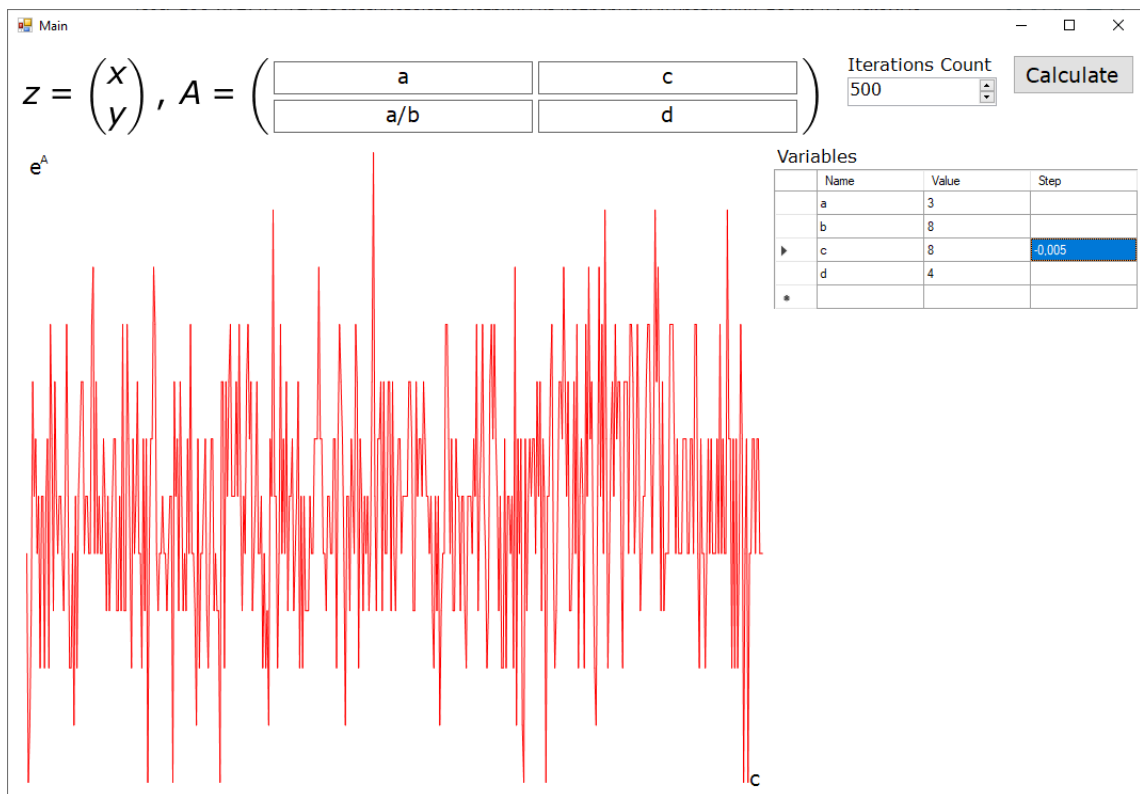


«Рисунок 4.10 – Приклад №5 з 100 ітераціями»

Також можливо змінювати кількість кроків окремо:

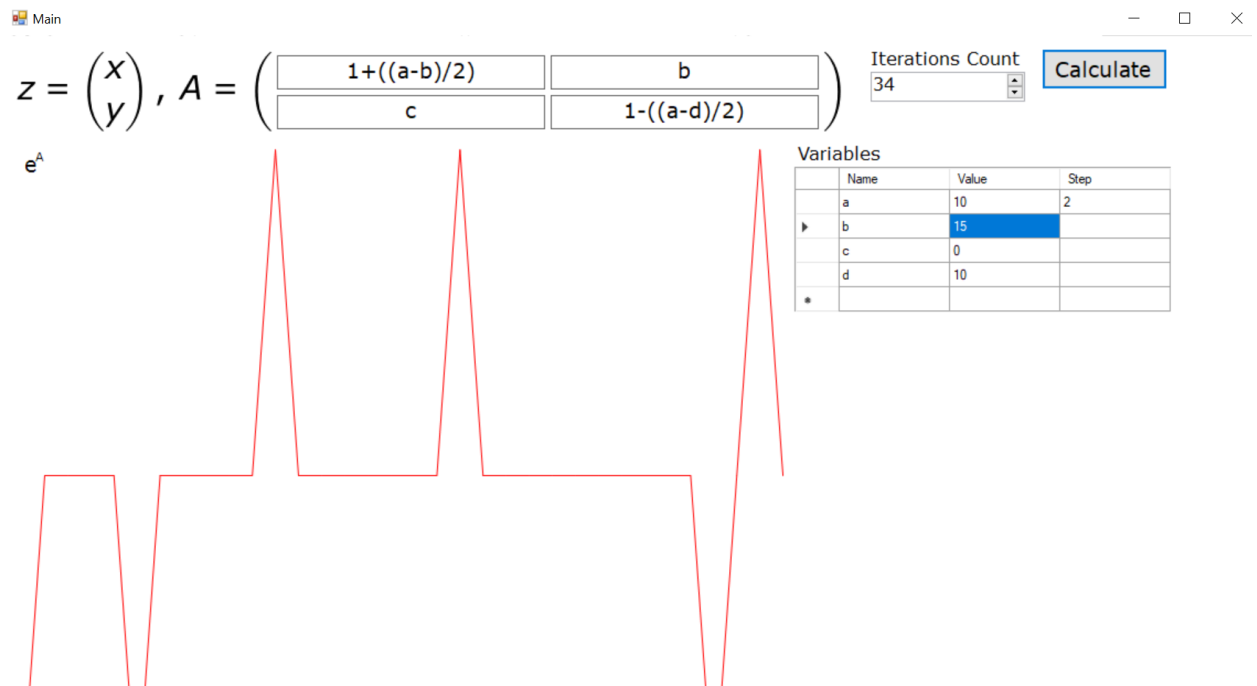


«Рисунок 4.11 – Приклад №5 з зі зміненим кроком»

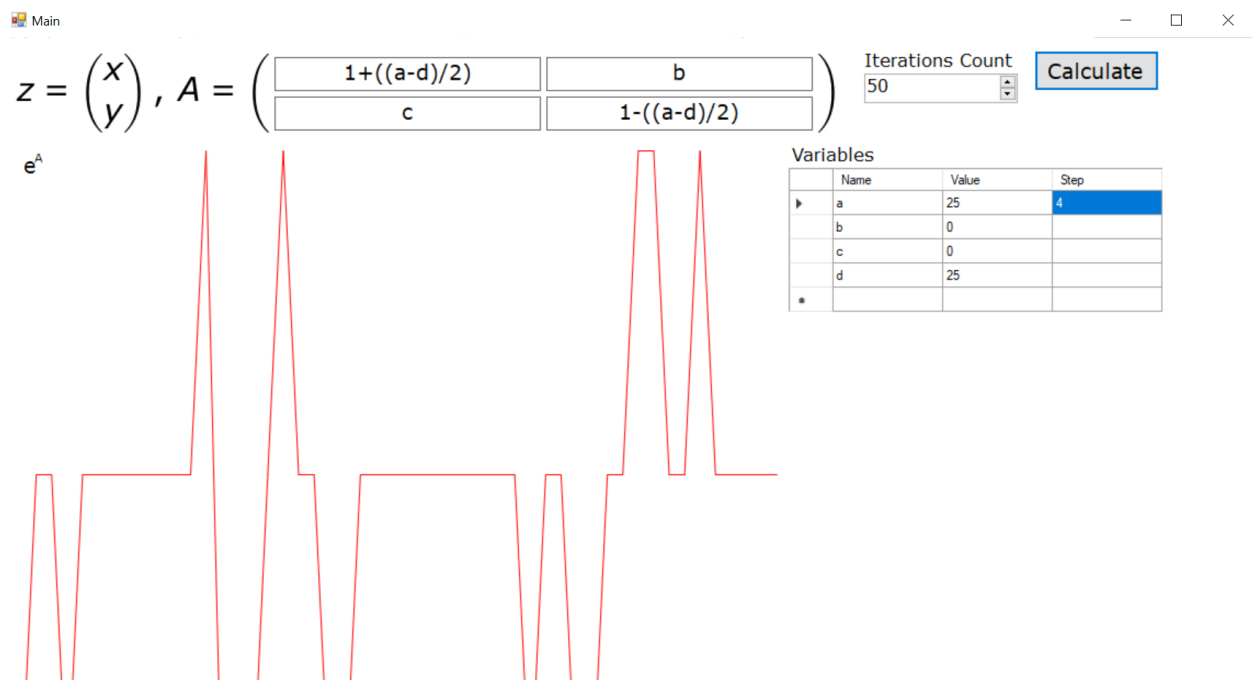


«Рисунок 4.12 – Приклад №5 з зі зміненим кроком та кількістю ітерацій»

Можливо дослідити матричну експоненту при $a = d$:

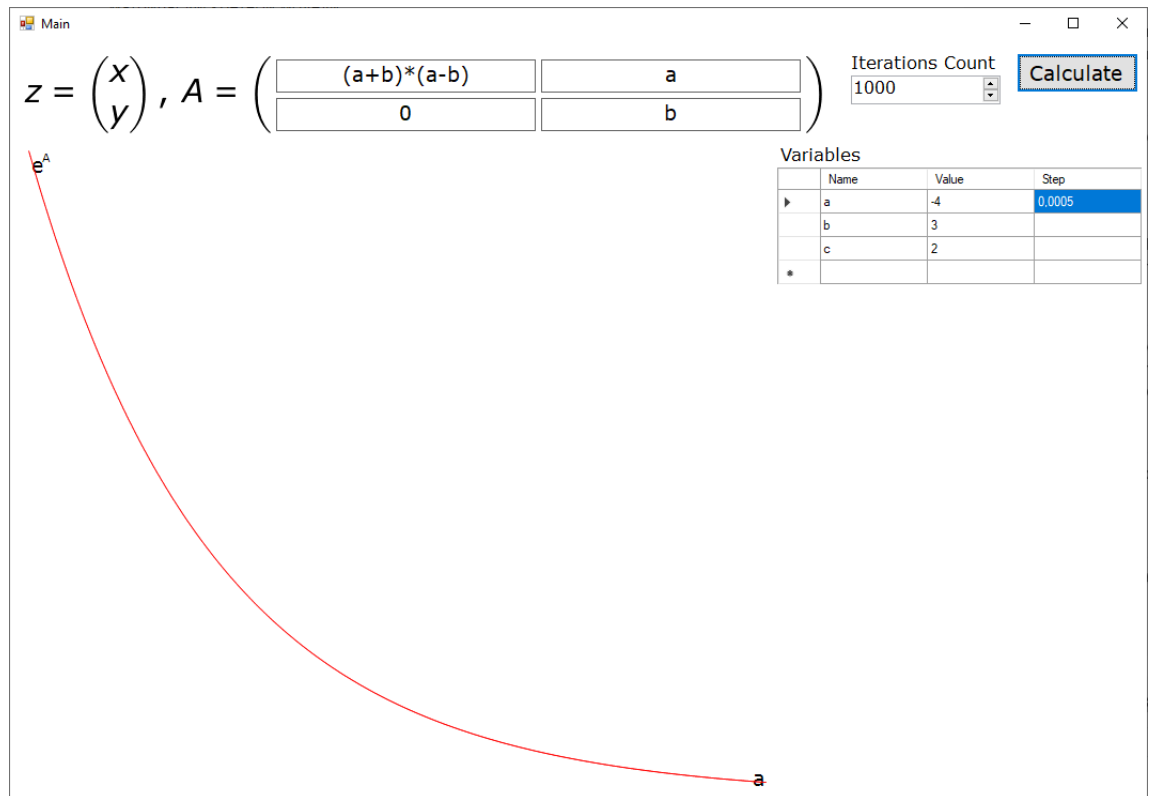


«Рисунок 4.13 – Приклад №6»

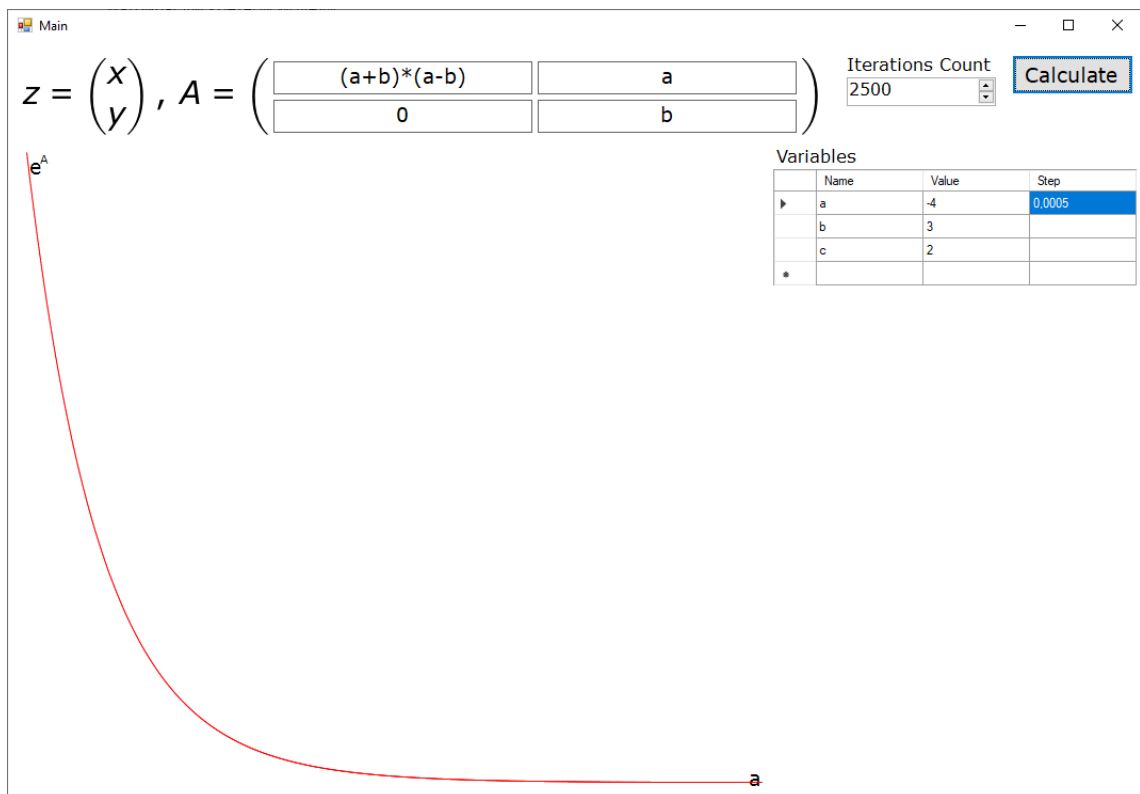


«Рисунок 4.14 – Приклад №6 зі зміненими ітераціями»

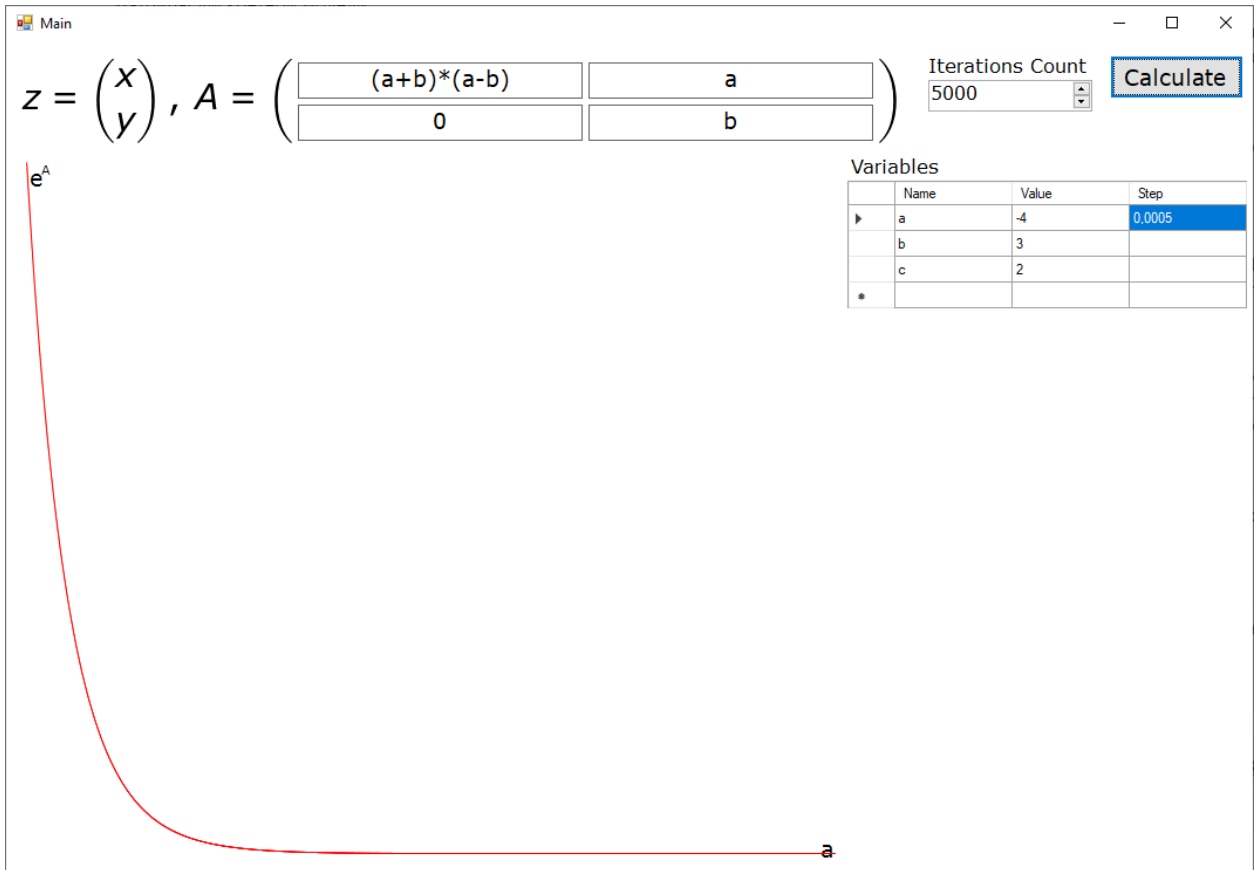
Приклад зміни графічного зображення залежно від ітерацій:



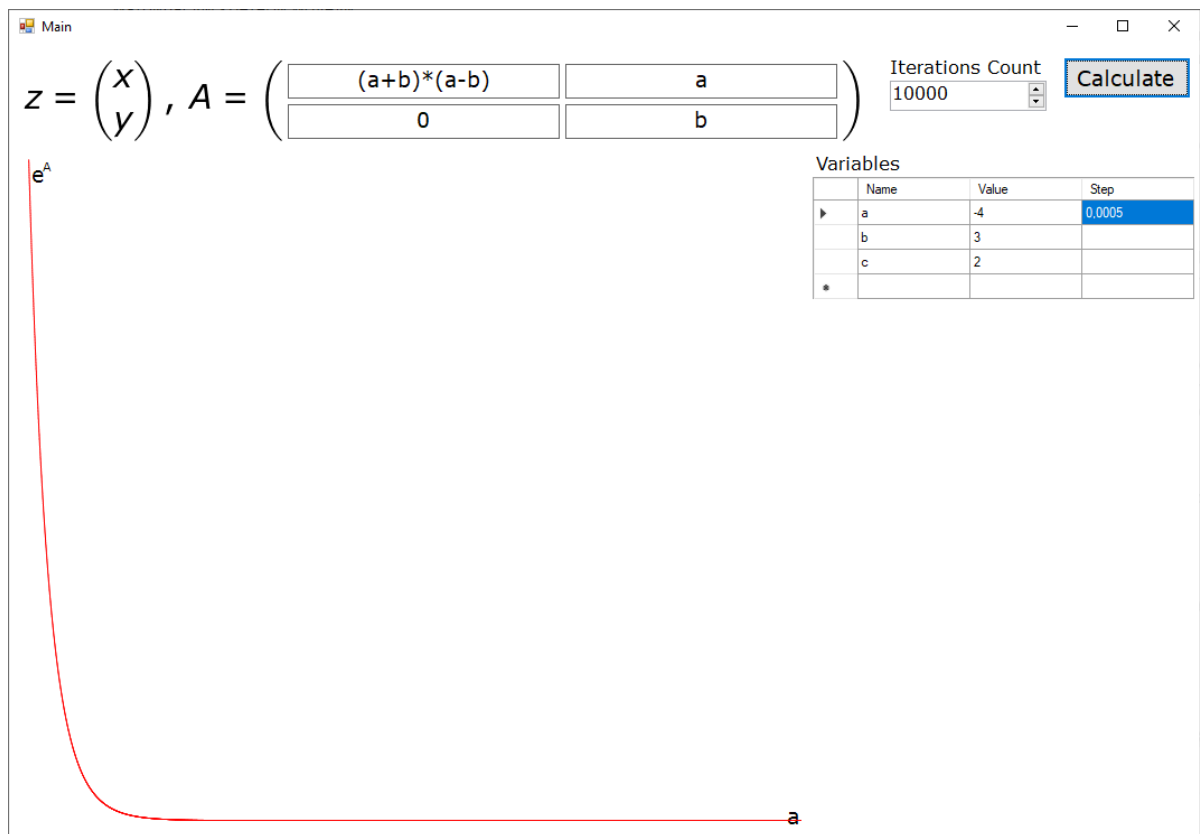
«Рисунок 4.15 – Приклад №7 зі зміненими ітераціями»



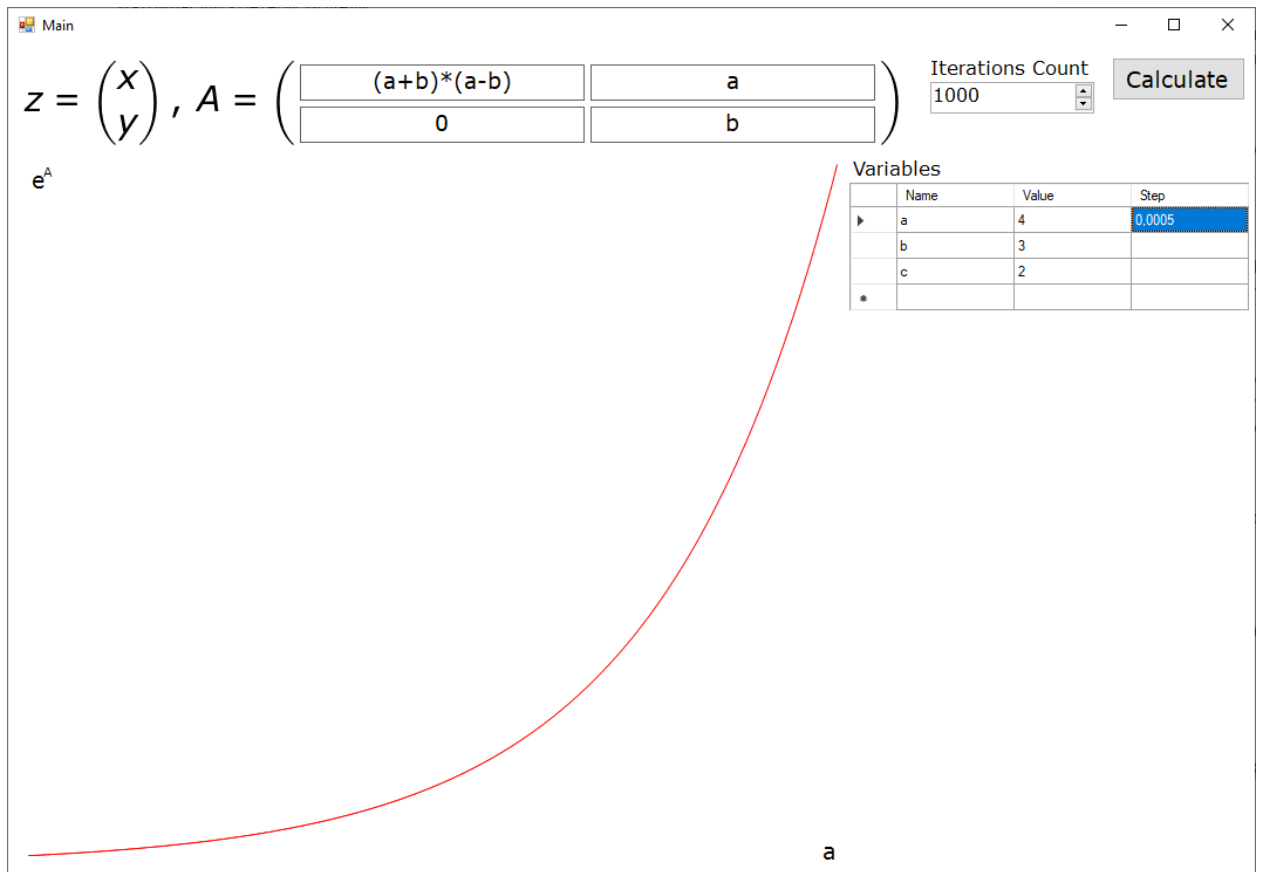
«Рисунок 4.16 – Приклад №7 зі зміненими ітераціями»



«Рисунок 4.17 – Приклад №7 зі зміненими ітераціями»



«Рисунок 4.18 – Приклад №7 зі зміненими ітераціями»



«Рисунок 4.19 – Приклад №7 зі зміненими ітераціями»

ВИСНОВКИ

В результаті виконання дипломної роботи досліджена тема проекту – дослідження матричних обчислень для вивчення еволюції динамічних систем та особливості програмної реалізації явних формул для деяких матричних експонент при дослідженні динамічних систем. В процесі дослідження були знайдені актуальна наукова література, був проведений аналіз існуючої проблеми та сучасний стан її розв’язання.

Згідно з проведеним аналізом були сформувані задача для вирішення існуючої проблеми та вимоги до майбутнього програмного продукту. Відповідно до вимог були розглянуті ймовірні середовища та мови програмування й інші технології, які потрібні для реалізації поставленої задачі.

Після того, як були сформульовані всі вимоги до програмного продукту, усі технології були обрані були відокремлені етапи розробки. Реалізація програмного продукту була розділена на логічні етапи розробки, які каскадно залежать один від одного.

Був розроблений програмний продукт та протестований з різними кількостями ітерацій та кроків, були виправлені помилки з графічним відображенням.

Програма може бути використана при дослідженні матричних експонент та в дослідженні динамічних систем.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Jing Chen & Hongfen Zou (2014) An interesting method for the exponentials for some special matrices, Systems Science & Control Engineering [Електронний ресурс] URL: <http://dx.doi.org/10.1080/21642583.2013.863168>
2. Hongguo Xu Two Results About the Matrix Exponential [Текст]
3. L.A. Vlasenko, A.G. Rutkas, V.V. Semenets, A.A. Chikrii, ‘Stochastic optimal control of a descriptor system’, Cybernetics and Systems Analysis, 2020, vol. 56, issue 2, pp. 204-212. <http://doi.org/10.1007/s10559-020-00236-7> [Текст]
4. Качко Е.Г. Параллельное программирование. [Текст] Учебное пособие / Е.Г.Качко. – Х. Изд-во Форт, 2011, - 528 с.
5. Єрохін, А.Л. Методи та засоби Інтернет-технологій. [Текст]: Навч. посібник / А. Л. Єрохін, В.В. Самсонов. – Харків: СМІТ, 2008. – 264 с.
6. Дейт К.Дж. Введение в системы баз данных [Текст] / К.Дж. Дейт. - 8-е изд. – М.:Издательский дом „Вильямс”, 2005.- 1328с.
7. Вигерс К.И. Разработка требований к программному обеспечению. [Текст] / К.И. Вигерс. –М.:Русская редакция. 2004. – 576 с.
8. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений [Текст] / Г.Буч, Р.А. Максимчук, М.У. Энгл, Б.Дж. Янг, Дж.Коналлен, К. А. Хьюстон.– Вильямс, 2008 г. – 720 с.