

Д. М. ВАВРИВ, д-р физ.-мат. наук, Н. И. ГАВРИЛОВА,  
канд. физ.-мат. наук, Г. А. ГРОМОВ

### РАСЧЕТ ШИРИНЫ ЛИНИИ РЕЗОНАНСНЫХ ПРИБОРОВ ОРОТРОННОГО ТИПА

Цель работы — расчет ширины линии резонансных генераторов с распределенным взаимодействием типа оротрон, генераторы дифракционного излучения (ГДИ) [1—2], обусловленной естественными флуктуациями параметров электронного пучка. Такие расчеты выполнялись на основе приближенных математических моделей [3—4], что затрудняет полный анализ влияния различных факторов на стабильность частоты указанных генераторов. Достаточно общую нелинейную нестационарную модель рассматриваемых приборов, основанную на совместном решении уравнений возбуждения резонатора и уравнения движения частиц в переменных Лагранжа [5], с учетом начальных флуктуаций скорости и плотности частиц пучка можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\tau} &= -F + \frac{G}{4\pi} \int_0^1 f(\xi) \int_0^{2\pi} \cos \mu(\varphi, \xi) d\varphi d\xi; \\ \frac{d\gamma}{d\tau} &= \delta_r - \frac{G}{4\pi F} \int_0^1 f(\xi) \int_0^{2\pi} \sin \mu(\varphi, \xi) d\varphi d\xi; \\ \frac{d^2\mu}{d\xi^2} &= \frac{F\Phi_0}{4} f(\xi) \left(1 - \frac{\Phi_0}{\Phi_0} + \frac{1}{\Phi_0} \frac{d\mu}{d\xi}\right)^2 \cos \mu \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями для пучка на входе в пространство взаимодействия  $\xi = 0$

$$\mu(\varphi, \xi) = \eta_{др}(t) + \varphi + \gamma; \quad \frac{d\mu}{d\xi} = \eta_{тв}(t) + \Phi_s,$$

где  $\eta_{др}(t)$ ,  $\eta_{тв}(t)$  —  $\delta$ -коррелированные случайные функции с нулевым средним, описывающие соответственно флуктуации тока и скорости частиц пучка; их связь со спектральными плотностями дробового и теплового шума пучка выписана в работе [5];  $\mu(\varphi, \xi)$  — фаза поля, действующая на электроны пучка. Остальные обозначения совпадают с принятыми в работе [5]. Влиянием поля пространственного заряда пренебрегаем.

Исследование системы уравнений (1) можно провести, используя методы теории флуктуаций в резонансных автоколебательных системах [6]. Представим амплитуду  $F$  и фазу  $\gamma$  колебаний в резона-

торе в виде регулярного и случайного слагаемых  $F = F_0(1 + \bar{F})$ ,  $\gamma = \gamma_0 + \bar{\gamma}$ . В предположении малости флюктуационных составляющих  $\bar{F}$ ,  $\bar{\gamma}$  получаем из (1) следующую систему уравнений стандартного вида для их определения:

$$\frac{d\bar{F}}{d\tau} = -p\bar{F} + B_1(\tau); \quad \frac{d\bar{\gamma}}{d\tau} = -q\bar{F} + B_2(\tau). \quad (2)$$

Здесь  $p, q$  — безразмерные параметры прочности предельного цикла и неизохронности колебаний;  $B_1(\tau), B_2(\tau)$  — случайные функции, определяющие воздействие флюктуаций пучка на колебательную систему. Они находятся с помощью соотношений

$$p = 1 + \frac{G}{4\pi} \int_0^1 f(\xi) \int_0^{2\pi} K_0 \sin \mu_0 d\varphi d\xi;$$

$$q = -\delta_r + \frac{G}{4\pi} \int_0^1 f(\xi) \int_0^{2\pi} K_0 \cos \mu_0 d\varphi d\xi;$$

$$\begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = -\frac{G}{4\pi F_0} \int_0^1 f(\xi) \int_0^{2\pi} (\eta_{др} K_1 + \eta_{тв} K_2) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \mu_0 d\varphi d\xi,$$

где  $\mu_0(\varphi, \xi)$  — регулярная составляющая функции  $\mu(\varphi, \xi)$ ;  $\delta_r = 2Q(\omega_r - \omega_a)/\omega_r$  — электронное смещение частоты автогенератора  $\omega_a$  относительно собственной частоты «холодного» резонатора  $\omega_r$ . Функции  $K_j(\varphi, \xi)$  ( $j=0, 1, 2$ ) являются решением дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 K_j}{d\xi^2} - \frac{3F_0}{4} \frac{dK_j}{d\xi} f(\xi) \mu_1^2 \cos \mu_0 + \frac{F_0 \Phi_0}{4} K_j f(\xi) \mu_1^3 \sin \mu_0 = M_j$$

с начальными условиями

$$K_0 = \frac{dK_0}{d\xi} = \frac{dK_1}{d\xi} = K_2 = 0; \quad K_1 = \frac{dK_2}{d\xi} = 1.$$

Здесь

$$\mu_1 = 1 - \frac{\Phi_2}{\Phi_0} + \frac{1}{\Phi_0} \frac{d\Phi_0}{d\xi}; \quad M_0 = \frac{\Phi_0}{4} f(\xi) \mu_1^3 \cos \mu; \quad M_1 = M_2 = 0.$$

Легко показать, что спектральные плотности функций  $B_1, B_2$  и их взаимная спектральная плотность определяются выражениями

$$S_{11} = \frac{G^2}{4F_0^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{тв} |c_{1m}|^2 + S_{др} |c_{2m}|^2;$$

$$S_{22} = \frac{G^2}{4F_0^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{тв} |d_{1m}|^2 + S_{др} |d_{2m}|^2; \quad (3)$$

$$S_{12} = \frac{G^2}{4F_0^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{тв} c_{1m} d_{1m}^* + S_{др} c_{2m} d_{2m}^*.$$

в которых  $c_{jm}$  и  $d_{jm}$  ( $j = 1, 2$ ;  $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ) — коэффициенты разложения в ряд Фурье соответственно действительной и мнимой части функции

$$H_j(\varphi) = \int_0^1 f(\xi) K_j(\varphi, \xi) e^{i\mu_0(\varphi, \xi)} d\xi, \quad j = 1, 2;$$

$S_{\text{ТВ}}$  и  $S_{\text{ДР}}$  — нормированные спектральные плотности флуктуаций параметров пучка на входе. В случае, когда флуктуации скорости частиц и тока пучка задаются формулами Шоттки и Рэка

$$S_i = eI_0/2\pi, \quad S_v = ekT_k(4 - \pi)/4\pi mI_0,$$

тогда  $S_{\text{ТВ}}$ ,  $S_{\text{ДР}}$  определяются выражениями

$$S_{\text{ДР}} = \frac{e}{2\pi I_0}; \quad S_{\text{ТВ}} = \frac{ekT_k(4 - \pi)\Phi_0^2}{4\pi mI_0v_0^2}, \quad (4)$$

где  $e$ ,  $m$  — заряд и масса электрона;  $k$  — постоянная Больцмана;  $T_k$  — температура катода;  $I_0$ ,  $v_0$  — средние значения тока и скорости частиц;  $\Phi_0 = \omega_r L/v_0$ ;  $L$  — длина пространства взаимодействия.

Из условия стационарности и  $\delta$ -коррелированности процессов  $\eta_{\text{ТВ}}$  и  $\eta_{\text{ДР}}$  следует, что взаимный спектр  $S_{12}$  — действительная функция частоты. Используя результаты работы [6], определяем из (2)–(4) все статистические характеристики колебаний генераторов оротронного типа. Для спектров амплитудных  $S_F$ , частотных  $S_f$  флуктуаций и их взаимного спектра  $S_{Ff}$  имеем

$$S_F = S_{22}/(p^2 + \Omega^2); \quad S_f = d_r^2 S_{11} + qd_r^2(qS_{22} - 2pS_{12})/(p^2 + \Omega^2); \\ S_{Ff}^{(0)} = d_r(pS_{12} + qS_{22})/(p^2 + \Omega^2); \quad S_{Ff}^{(1)} = -d_r\Omega S_{12}/(p^2 + \Omega^2). \quad (5)$$

Здесь  $\Omega$  — безразмерная частота, нормированная на величину  $d_r = \omega_r/2Q$ , пропорциональную полосе пропускания «холодного» резонатора с добротностью  $Q$ . При этом для ширины линии генератора получаем следующее выражение:

$$\Delta\omega = \frac{\pi^2\omega_r^2}{4Q^2} \left( S_{11} + \frac{q^2}{p^2} S_{22} - \frac{2q}{p} S_{12} \right). \quad (6)$$

Выделяя в (6) слагаемые, обусловленные дробовыми и тепловыми шумами пучка, преобразуем (6) к виду

$$\Delta\omega = \frac{\pi^2\omega_r^2 Q^2}{16Q^2 F_0^2} (S_{\text{ДР}} R_2 + S_{\text{ТВ}} R_1). \quad (7)$$

Здесь  $R_f$  — коэффициенты, определяющие нелинейное и параметрическое преобразование флуктуаций пучка в шумовые колебания на выходе прибора,

$$R_j = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_{jm}|^2 + \frac{q^2}{p^2} |d_{jm}|^2 - \frac{2q}{p} c_{jm} d_{jm}^* \quad (j = 1, 2). \quad (7a)$$

Значения  $R_j$  зависят от параметра эффективности взаимодействия пучка с полем  $G$  и амплитуды регулярных автоколебаний  $F_0$ .

Рассмотрим влияние различных факторов, определяющих воздействие естественных шумов на флюктуационные характеристики генераторов оротронного типа, проанализировав их влияние на ширину линии. С физической точки зрения можно выделить два основных фактора, приводящих к возбуждению флюктуаций в резонаторе. Они возбуждаются в результате вынужденного излучения пучка, предварительно модулированного начальными дробовыми и тепловыми флюктуациями. Их вклад в уширение линии описывается первыми слагаемыми в (7а), пропорциональными  $|c_{jm}|^2$ . Сумма по  $n$  в (7а) отражает тот факт, что шумовая модуляция переносится

вдоль пучка не только на основной частоте автоколебаний ( $m = \pm 1$ ), но и на высших гармониках, которые возникают в пучке в результате его нелинейной модуляции регулярными автоколебаниями. Данные численных расчетов безразмерной ширины линии  $\Delta\bar{\omega} = \Delta\omega / (S_1 a_T^2)$  с учетом только вынужденного излучения пучка приведены на рис. 1 (кривая 4)

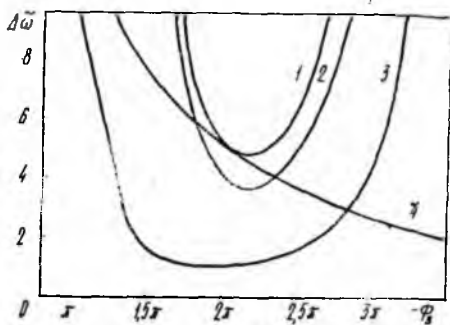


Рис. 1

для параметров, типичных для

генераторов дифракционного излучения [2]. Как и в случае пучка с предварительно гармонической модуляцией, эффективность возбуждения вынужденных колебаний в резонаторе с распределенным взаимодействием существенно убывает с увеличением по модулю параметра пространственного рассинхронизма  $|\Phi_s|$ . Такая зависимость  $\Delta\bar{\omega}$  от  $|\Phi_s|$  достаточно четко прослеживается.

Уширение линии в генераторе возникает также в связи с дополнительным усилением начальной шумовой модуляции пучка в резонаторе в результате обратного действия поля на частицы пучка. Влияние этого фактора отражено вторым слагаемым в выражении для  $R_j$  (7а), а последнее слагаемое обусловлено взаимной корреляцией между двумя механизмами возбуждения шумовых колебаний.

Характерная особенность усиления внешнего воздействия в рассматриваемых системах — регенеративный характер. Следовательно, коэффициент усиления достигает максимальных значений при приближении тока пучка  $I_0$  к пусковому значению  $I_{\text{пуск}}$ . Поскольку величина  $I_{\text{пуск}} = I_{\text{пуск}}(\Phi_s)$  — функция параметра пространственного рассинхронизма и достигает минимального значения  $I_{\text{пуск. мин}}$  критерно в центре зоны генерации, то в режиме автоколебаний  $I_0 > I_{\text{пуск. мин}}$  значительного усиления шумов и соответственно увеличения  $\Delta\bar{\omega}$  можно ожидать на краях зоны генерации по  $\Phi_s$ , где  $I_0 \approx I_{\text{пуск}}(\Phi_s)$ . Отметим, что указанный вид зависимости  $\Delta\bar{\omega}$  от отношения  $I_0/I_{\text{пуск}}$  можно найти в явном виде из (7), учитывая,

что в приближении слабой нелинейности  $\rho^2 \cong [1 - I_0/I_{\text{пуск}}(\Phi_s)]^2$ . Результаты строгих численных расчетов  $\Delta\omega$  по общей формуле (7a) изображены кривой 1 на рис. 1, а соответствующие значения амплитуды автономных колебаний  $F_0$ , параметров прочности предельного цикла  $\rho$  и неизохронности  $q$  — на рис. 2. Минимальные значения ширины линии достигаются при  $\Phi_s$  опт, соответствующих  $q \cong 0$  и максимальным значениям  $\rho$ . Значения ускоряющего напряжения пучка (параметра  $\Phi_s$ ), при которых реализуются максимальные значения амплитуды поля в резонаторе (выходной мощности), и минимальное значение ширины линии не совпадают. В случае отклонения  $\Phi_s$  от  $\Phi_{s \text{ опт}}$  наблюдается весьма резкое увеличение ширины линии, обусловленное влиянием шумов, усиленных в резонаторе, что следует из сравнения кривых 1, 4 на рис. 1.

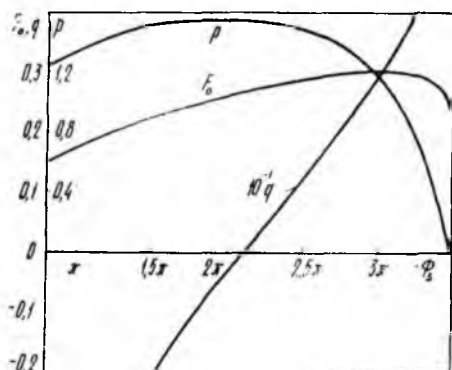


Рис. 2

В качестве примера оценим минимальную ширину линии ГДИ. Согласно рис. 1 находим, что если  $I_0/I_{\text{пуск. мин}} = 3$ ,  $\Phi_0 = 500$ , минимальное значение  $\Delta\omega$  достигается при  $\Phi_{s \text{ опт}} \cong -2,2\pi$  и равно

$$(\Delta\omega)_{\text{мин}} \cong 5d_r^2 S_{\text{др}} = \frac{5e\omega_r^2}{8\pi Q^2 I_0}.$$

При типичных значениях  $I_0 = 200 \text{ mA}$ ,  $Q = 2 \cdot 10^3$ ,  $\omega_r = 2\pi \cdot 50 \text{ ГГц}$  абсолютное значение ширины линии составляет  $(\Delta f)_{\text{мин}} = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Гц}$ , а относительное  $(\Delta f)_{\text{мин}}/f \cong 10^{-14}$ .

Проведенные численные расчеты в широком диапазоне изменения параметров показали, что при нахождении минимальной ширины линии в пределах зоны генерации следует полагать  $q=0$  и для ее расчета использовать выражение

$$(\Delta\omega)_{\text{мин}} = \frac{\pi^2 \omega_r^3 G^2}{16Q^2 F_0^2} \left( S_{\text{др}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_{2m}|^2 + S_{\text{гв}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_{1m}|^2 \right), \quad (8)$$

в котором учтены только слагаемые, определяющие вынужденное излучение предварительно модулированного электронного пучка.

В приближении слабой нелинейности ( $F_0^2 \ll 1$ ) из (8) находится явная связь между шириной линии и параметрами задачи, которая в случае возбуждения основного типа колебания в резонаторе с гауссовым распределением поля выражается соотношением

$$(\Delta\omega)_{\min} = \frac{\sqrt{2\pi} \pi \omega_r^2 e G \omega e^{-\omega^2 \Phi_0^2 / 2}}{64 Q^2 \eta I_0} \left( 1 + \frac{k T_k (4 - \pi) \Phi_0^2}{8 m v_0^2} \right). \quad (9)$$

Здесь  $\omega$  — отношение радиуса пятна поля в открытом резонаторе к длине замедляющей структуры;  $\eta$  — электронный КПД генератора;  $\eta = F_0^2 / G$ . Второе слагаемое в (9) определяет относительный вклад в ширину линии начальных тепловых флуктуаций скорости частиц, оказывающих существенное влияние, начиная с углов пролета порядка

$$\Phi_0 \simeq \sqrt{8 m v_0^2 / k T_k (4 - \pi)}.$$

При  $v_0 = 0,1$  с,  $T_k = 1100$  К эта величина  $\Phi_0 \simeq 700$ , т. е. для типичных параметров ГДИ влияние тепловых флуктуаций скорости может оказаться заметным, что также следует из результатов строгих численных расчетов (рис. 1). Здесь кривые 1, 2 построены соответственно с учетом и без учета начальной шумовой модуляции пучка.

Формула, подобная (9), получена [4] для ширины линии оротрона при учете дробовых шумов пучка. Однако она справедлива для узкого диапазона изменения ускоряющего напряжения, соответствующего  $q \simeq 0$ , и при ее получении делалось предположение о слабой нелинейности процесса взаимодействия пучка с полем, что соответствует небольшим превышениям  $I_0$  над  $I_{\text{пуск. мин}}$ . С ростом тока пучка, начиная со значений  $I_0 / I_{\text{пуск. мин}} \simeq 2 \dots 3$ , на величину  $\Delta\omega$  существенно влияют высшие гармоники, возбуждаемые в пучке, которые не учитывались при выводе формулы (8). Для иллюстрации такого влияния представлены расчеты  $\Delta\bar{\omega}$  только с учетом основной гармоники  $m = \pm 1$  (рис. 1, 2), показывающие, что влияние высших гармоник приводит к увеличению ширины линии почти на порядок; на величину  $\Delta\omega$  заметно действуют гармоники с номерами до  $|m| \simeq 15 \dots 20$ . Аналогичное влияние временных гармоник сказывается и при расчете других флуктуационных характеристик генераторов оротронного типа.

Список литературы. 1. Русин Ф. С., Богомолов Г. Д. Оротрон — электронный прибор с открытым резонатором и отражающей решеткой // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 5. С. 756—762. 2. Шестопалова В. П. Дифракционная электроника. 1976. 231 с. 3. Алексеев Г. А. Дробовые шумы ГДИ // Радиотехника. 1979. Вып. 49. С. 94—101. 4. Русин Ф. С., Костромин В. П. Влияние дробовых шумов на стабильность частоты оротрона // Радиотехника и электрон. 1985. Т. 30, № 9. С. 1802—1805. 5. Вавриш Д. М., Гаврилова Н. И. Естественные флуктуации в резонансных приборах с распределенным взаимодействием в неавтономном режиме работы // Радиотехника и электрон. 1987. Т. 32, № 4. С. 828—836. 6. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М., 1968. 660 с.

Поступила в редколлегию 10.08.87