УДК 621.391: 519.246.8

В.А. ТИХОНОВ, А.Г. ДЗЫГА, Н.В. КУДРЯВЦЕВА

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ ВЫСШИХ РАНГОВ ОШИБОК ПРЕДСКАЗАНИЯ

Введение

Негауссов случайный процесс описывается полным набором кумулянтных или моментных функций, учитывающих статистические связи высших порядков. Несмотря на то, что корреляционные связи являются наиболее важными при описании случайных процессов, при решения ряда задач статистического анализа негауссовых процессов следует учитывать статистические связи более высоких порядков [1 – 6].

Модели линейного предсказания, построенные на основе корреляционных [7] и моментных функций [8] негауссова случайного процесса, позволяют решать методом линейного предсказания ряд прикладных задач. Выбор типа используемой модели далеко не всегда имеет однозначное решение [7]. Поэтому при оценивании и подгонке моделей регрессии и авторегрессии (АР) существенное внимание уделяется исследованию остатков и ошибок предсказания [7, 9]. Их анализ позволяет выбрать наиболее подходящую модель авторегрессии и уточнить оценки ее параметров.

При оценивании и подгонке обобщенных моделей линейного предсказания, исследование ошибок предсказания имеет ряд особенностей. Ошибки предсказания не должны иметь статистических связей некоторого порядка, что дает возможность рассчитать параметры моделей. Однако они могут иметь статистические связи других порядков, которые также можно описывать моделями линейного предсказания. Задача построения моделей линейного предсказания негауссовых ошибок предсказания остается неизученной в научной литературе. Решение этой задачи позволит повысить эффективность анализа и обработки негауссовых процессов, расширить классы моделей линейного предсказания, уточнить применяемые модели.

В основу модели АР положена корреляция отсчета случайного процесса в текущий момент времени с некоторым конечным или бесконечным числом отсчетов в предыдущие моменты времени. Такой вид регрессии называется авторегрессией. В уравнении АР текущий отсчет представляется взвешенной суммой предыдущих отсчетов с некоторыми коэффициентами веса

$$x[t] = \sum_{j=1}^{p} \Phi[j] x[t-j] + a[t], \qquad (1)$$

где $\Phi[j]$ – коэффициенты АР, $a[t]$ – ошибки предсказания, представляющие собой некоррелированные случайные отсчеты, p – порядок модели АР.

Цель статьи – разработка принципов построения обобщенной модели авторегрессии (ОАР) негауссовых ошибок предсказания АР и ОАР, вывод уравнений для расчета параметров модели.

В статье рассматриваются следующие задачи: обоснование возможности построения моделей ОАР ошибок предсказания, разработка полной модели ОАР негауссова процесса.

Представление ошибок предсказания обобщенными моделями предсказания

Исследование ошибок предсказания позволяет оценить порядок, а также адекватность выбранной модели линейного предсказания случайному процессу. С этой целью анализируется корреляционная функция ошибок предсказания или ее СПМ. Если у гауссова процесса корреляционная функция ошибок предсказания лежит внутри некоторого доверительного интервала, то ее можно считать равной нулю, а ошибки предсказания выбранной модели некоррелированными.

Для негауссова процесса некоррелированность ошибки предсказания не означает статистической независимости его отсчетов [10]. Поэтому у таких процессов моментные функции выше второго порядка могут быть значимыми и содержать полезную информацию. В таких случаях для ошибок предсказания можно построить обобщенные модели линейного предсказания. Хотя существует множество комбинаций построения таких моделей. ниже будут рассмотрены несколько наиболее важных. Выбор способа построения комбинации моделей зависит от статистических характеристик процесса, цели исследования или требований и условий решаемой задачи.

Исследование случайных негауссовых процессов показывает. что некоторые процессы имеют заметное отличие в характере убывания корреляционной и моментных функций. Это приводит к тому, что частотные характеристики обеляющих фильтров, построенные на основе обычных моделей линейного предсказания или обобщенных моделей, будут иметь существенные отличия. Поэтому при обелении негауссовых процессов ошибки предсказания, обладая статистической независимостью для данного ранга и сдвига, могут иметь ненулевые моментные функции для иных рангов и сдвигов. Для уточнения модели в таких случаях можно построить обобщенные модели линейного предсказания ошибок предсказания.

Уравнение ОАР модели r-го ранга имеет вид [8]

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p_{l,k,\dots,u}} \Phi_r^{l,k,\dots,u}[i]x[t-i] + a_r^{l,k,\dots,u}[t]. \qquad (2)$$

где индексы $l,k,\dots,u$ могут принимать целые положительные и отрицательные значения (включая 0), а их количество равно $r-2$; $\Phi_r^{l,k,\dots,u}[i]$ – коэффициенты ОАР, $a_r^{l,k,\dots,u}[t]$ – статистически независимые ошибки предсказания. Чтобы получить уравнения, по которым можно вычислять $\Phi_r^{l,k,\dots,u}[i]$, необходимо левую и правую части (2) умножать на $x[t-j]x[t-l]\dots x[t-u]$ и взять математические ожидания

$$m_r[j, j-l,\dots, j-u] = \sum_{i=1}^{p_{l,k,\dots,u}} \Phi_r^{l,k,\dots,u}[i]m_r[j-l, j-k,\dots, j-u], \text{ для } j = 1, 2,\dots, p_{l,k,\dots,u}. \qquad (3)$$

Моменты негауссова процесса и ошибок предсказания связаны соотношением

$$m_r = \sum_{i=1}^{p_{l,k,\dots,u}} \Phi_r^{l,k,\dots,u}[i]m_r[i,\dots,i] + m_{ra}^{l,k,\dots,u}.$$

Таким образом. зафиксировав в (3) индексы $l,k,\dots,u$ и вычислив коэффициенты $\Phi_r^{l,k,\dots,u}[i]$, зная $x[t]$, из (2) можно найти ошибку предсказания $a_r^{l,k,\dots,u}[t]$.

Модели ОАР ошибок предсказания модели АР

В модели АР гауссовых случайных процессов ошибки предсказания $a[t]$ не только некоррелированные. но и не имеют статистических связей более высокого порядка. Однако для негауссовых процессов ошибки предсказания АР модели негауссовы и могут содержать статистические связи высокого порядка. а их моментные функции отличны от нуля. Следовательно, описанную выше модель ОАР можно применять к представлению ошибок предсказания в виде ОАР процессов.

Модель ОАР третьего ранга ошибок предсказания, для которых будем использовать обозначение $a[t] = a_2[t]$, где нижний индекс показывает ранг модели для которой определяется ошибка предсказания. описывается рекуррентным выражением

$$a_2[t] = \sum_{i=1}^{p_l} \Phi_3^l[i]a_2[t-i] + a_{3a}^l[t], \qquad (4)$$

где $a_{3a}^l[t]$ – ошибка предсказания модели ОАР ошибки предсказания $a_2[t]$, для которой моментная функция третьего порядка для сдвига l равна нулю, т. е.

$$\mathrm{E}\{a_{3a}^l[t]a_2[t-j]a_2[t-l]\} = \mathrm{E}\{a_{3a}^l[t]a_{3a}^l[t-j]a_{3a}^l[t-l]\} = 0,\ 0 < j \le p_l. \qquad (5)$$

Умножив левую и правую части (4) на $a_2[t-j]a_2[t-l]$ и взяв математическое ожидание, с учетом (5), получим рекуррентное уравнение для расчета коэффициентов ОАР:

$$m_{3a_2}[j, j-l] = \sum_{i=1}^{p_l} \Phi_3^l[i] m_{3a_2}[j-i, j-l], \tag{6}$$

где

$$m_{3a_2}[j, j-l] = \mathrm{E}\{a_2[t]a_2[t-j]a_2[t-l]\}. \tag{7}$$

Как видно из (7), моментные функции третьего порядка вычисляются по ошибкам предсказания $a_2[t]$. Чтобы это не вызывало недоразумений, для моментных функций моделируемых ошибок предсказания будет указываться в подстрочном обозначении моментной функции для какой ошибки предсказания она получена, например, $m_{3a_2}[j, j-l]$. Для моментов ошибок предсказания модели ОАР ошибок предсказания будем применять обозначение $m_{3a_3}^l$. Умножив левую и правую части (4) на $a_2[l]a_2[t]$ и взяв математическое ожидание, с учетом (5), получим

$$m_{3a_2} = \sum_{i-1}^{p_l} \Phi_3^l[i] m_{3a_2}[i, i] + m_{3a_3}^l,$$

где центральные моменты

$$m_{3a_2} = \mathrm{E}\{(a_2[t])^3\}, \quad m_{3a_3}^l = \mathrm{E}\{(a_3^l[t])^3\}.$$

Как и для модели ОАР третьего ранга случайного процесса $x[t]$, определение коэффициентов ОАР для фиксированного l сводится к решению системы уравнений, следующей из (6), в которой моментная функция оценивается по выражению (7). Решение уравнения (6) будет представлять наборы коэффициентов ОАР $\Phi_3^l[1], \Phi_3^l[2], \ldots, \Phi_3^l[p_l]$, соответствующих различным фиксированным сдвигам l.

Практически все свойства модели ОАР негауссовых процессов справедливы и для процессов, представляющих собой негауссовы ошибки предсказания. Так, полученные соотношения (6), описывающие модели ОАР ошибок предсказания, показывают, что для ошибок предсказания также можно ввести частную моментную функцию третьего ранга. Оператор ОАР третьего ранга такой модели совпадает с оператором АР модели. Поэтому условие стационарности модели ОАР ошибок предсказания описывается аналогичным характеристическим уравнением.

Таким же способом можно построить модель ОАР произвольного r-го ранга ошибок предсказания $a_2[t]$. Соответствующая модель описывается уравнением

$$a_2[t] = \sum_{i=1}^{p_{l,k,\ldots,u}} \Phi_r^{l,k,\ldots,u}[i] a_2[t-i] + a_r^{l,k,\ldots,u}[t]. \tag{8}$$

Умножив правую и левую части (8) на $a_2[t-j], a_2[t-l], \ldots, a_2[t-u]$ и взяв математическое ожидание, получим

$$m_{ra_2}[j, l, \ldots, u] = \sum_{i=1}^{p_{l,k,\ldots,u}} \Phi_r^{l,k,\ldots,u}[i] m_{ra_2}[j-i, j-l, \ldots, j-u], \ 0 < j \le p_{l,k,\ldots,u}, \tag{9}$$

$$m_{ra_2} = \sum_{i=1}^{p} \Phi_r^{l,k,\ldots,u}[i] m_{ra_2}[i, i, \ldots, i] + m_{ra_3}^{l,k,\ldots,u},$$

где

$$m_{ra_2}[j,l,...,u] = \mathrm{E}\{a_2[t]a_2[t-j]a_2[t-l],...,a_2[t-u]\},$$
$$m_{ra_2} = \mathrm{E}\{(a_2[t])^r\}, \; m^l_{ra_r} = \mathrm{E}\{(a_r^{l,k,...,u}[t])^r\}.$$

При выводе уравнения (9) использовались соотношения

$$\mathrm{E}\{a_2[t-j]a_2[t-l]...a_2[t-u]a_r^{l,k,...,u}[t]\} =$$
$$= \mathrm{E}\{a_r^{l,k,...,u}[t-j]...a_r^{l,k,...,u}[t-u]a_r^{l,k,...,u}[t]\} = 0, \quad j,l,...,k \neq 0.$$

Приведенные примеры построения моделей ОАР ошибок предсказания (4), (8) демонстрируют возможность использования различных вариантов построения моделей ОАР ошибок предсказания АР модели.

Модели ОАР ошибок предсказания модели ОАР случайного процесса

Если у ошибок предсказания $a^l_{3a}[t]$ есть статистические связи третьего порядка, можно построить модель ОАР четвертого ранга ошибки предсказания $a^l_{3a}[t]$ модели ОАР третьего ранга:

$$a^l_{3a}[t] = \sum_{i=1}^{p_{l,k}} \Phi_4^{l,k}[i]a^l_{3a}[t-i] + a_4^{l,k}[t].$$

Рекуррентные уравнения, позволяющие находить коэффициенты ОАР, имеют вид

$$m_{4a_3}[j,j-l,j-k] = \sum_{i=1}^{p_{l,k}} \Phi_4^{l,k}[i]m_{4a_3}[j-i,j-l,j-k], \qquad 0 < j \le p_{l,k}, \tag{10}$$

где $m_{4a_3}[j,j-l,j-k] = \mathrm{E}\{a^l_3[t]a^l_3[t-j]a^l_3[t-l]a^l_3[t-k]\}$.

При выводе (10) полагалось, что ошибка предсказания $a_4^{l,k}[t]$ не содержит статистических связей третьего порядка, т. е.

$$\mathrm{E}\{a^l_3[t-j]a^l_3[t-l]a^l_3[t-k]a_4^{l,k}[t]\} = \mathrm{E}\{a_4^{l,k}[t]a_4^{l,k}[t-j]a_4^{l,k}[t-l]a_4^{l,k}[t-k]\} = 0, \; j,l,k \neq 0.$$

Свойства модели ОАР четвертого ранга ошибки предсказания $a^l_3[t]$ аналогичны такой же модели для негауссова процесса. Если есть необходимость, для ошибки предсказания $a^l_3[t]$ можно построить модель ОАР произвольного ранга, как это было показано на примере с ошибкой предсказания $a_2[t]$.

Обобщая приведенные выше соотношения для ошибки предсказания $a_{r-1}^{l,k,...,v}[t]$, приведем уравнение, описывающие модель ОАР r-го ранга ошибки предсказания

$$a_{r-1}^{l,k,...,v}[t] = \sum_{i=1}^{p_{l,k,...,u}} \Phi_r^{l,k,...,u}[i]a_{r-1}^{l,k,...,v}[t-i] + a_r^{l,k,...,u}[t].$$

Уравнение для вычисления коэффициентов $\Phi_r^{l,k,...,u}[i]$ имеет вид

$$m_{ra_{r-1}}[j,l,...,u] = \sum_{i=1}^{p_{l,k,...,u}} \Phi_r^{l,k,...,u}[i]m_{ra_{r-1}}[j-i,j-l,...,j-u], \; 0 < j \le p_{l,k,...,u}. \tag{11}$$

где $m_{ra_{r-1}}[j,l,...,u] = \mathrm{E}\{a_{r-1}^{l,k,...,u}[t]a_{r-1}^{l,k,...,u}[t-j]a_{r-1}^{l,k,...,u}[t-l]...a_{r-1}^{l,k,...,u}[t-u]\}$.

При выводе уравнения (11) было учтено, что

$$\mathrm{E}\{a_{r-1}^{l,k,...,u}[t-j]a_{r-1}^{l,k,...,u}[t-l]...a_r^{l,k,...,u}[t]\} = \mathrm{E}\{a_r^{l,k,...,u}[t-j]...a_r^{l,k,...,u}[t-u]a_r^{l,k,...,u}[t]\} = 0,$$
$$j,l,...,k \neq 0.$$

Модель ОАР r-го ранга ошибок предсказания обладает всеми свойствами модели ОАР произвольного ранга случайного процесса.

Полная модель ОАР негауссова случайного процесса

Модели ОАР ошибок предсказания, представленные выше, позволяют построить полную ОАР модель негауссова случайного процесса. Подставив в уравнение (2) вместо ошибки предсказания $a[t]$ ее ОАР модель третьего ранга (4), а вместо $a_{3a}^{l}[t]$ ее модель четвертого ранга и т.д., получим уравнение, которое представим в несколько упрощенном виде

$$x[t]=\sum_{i=1}^{p_2}\Phi_2[i]x[t-i]+\sum_{i=1}^{p_3}\Phi_3[i]a_2[t-i]+\ldots+\sum_{i=1}^{p_r}\Phi_r[i]a_{r-1}[t-i]+a_r[t]. \qquad (12)$$

Введя предсказания произвольного ранга, описываемые выражениями типа

$$\tilde{x}_s[t]=\sum_{i=1}^{p_{s-1}}\Phi_{s+1}[i]a_s[t-i], \quad x[t]=a_1[t],$$

уравнение (12) можно представить в виде

$$x[t]=\tilde{x}_1[t]+\tilde{x}_2[t]+\ldots+\tilde{x}_{r-1}[t]+a_r[t]. \qquad (13)$$

Следовательно, разложение (13) является представлением негауссова процесса в виде суммы составляющих также негауссовых процессов, каждый из которых описывается соответствующей моделью ОАР. Описанная процедура построения модели ОАР ошибок предсказания дает возможность последовательно учитывать негауссовы составляющие случайного процесса, так как первое слагаемое в (12) описывает гауссову часть процесса.

Заключение

Ошибки предсказания обобщенной модели авторегрессии негауссова процесса могут содержать статистические связи некоторых порядков. Поэтому у таких процессов моментные функции ошибок предсказания являются значимыми и содержат полезную информацию о негауссовых процессах. В таких случаях для ошибок предсказания можно построить обобщенные модели линейного предсказания. В статье предложены обобщенные модели авторегрессии высших рангов стационарных негауссовых ошибок предсказания. Рассмотрены различные способы построения обобщенных моделей ошибок предсказания и самих негауссовых процессов. Представленные в статье модели значительно расширяют классы обобщенных моделей линейного предсказания. Предложенные модели могут быть полезны при оценивании и подгонке моделей авторегрессии, а также при решении различных задач статистической радиотехники.

Список литературы: 1. *Бриллинджер Д.Р.* Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980. 536 с. 2. *Леонов В.П.* Некоторые применения старших семиинвариантов в теории стационарных случайных процессов. М.: Наука, 1964. 3. *Шелухин О.И., Беляев И.В.* Негауссовские процессы. СПб.: Политехника, 1992. 312 с. 4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с. 5. *Кунченко Ю.П.* Нелинейная оценка параметров негауссовских радиотехнических сигналов. К.: Выща шк., 1987. 191 с. 6. *Ширяев А.Н.* Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов.-Теория вероятности и ее применение., 5, 3, с. 293-313. 7. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Пер. с англ. М.: Мир, 1974. Вып.1. 406 с. 8. *Тихонов В.А.* Обобщенная модель авторегрессии негауссовых процессов // Радиотехника. 2003. №132. С. 78-82. 9. *Montgomery D.C., Johnson L. A., Gardiner J. S.* Forecasting & Time Series Analysis. Mc. Graw-Hill Inc., 1990. P. 384. 10. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 376 с.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 17.03.2008