УДК 537.874

С. Н. ШУЛЬГА

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ *H*-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ, РАСПОЛОЖЕННОМ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

Данная работа выполнена в целях решения ряда проблем интегральной оптики [1] и геофизики [2], которые сводятся к задаче рассеяния электромагнитных волн на плоской границе раздела двух однородных сред, содержащей инородное включение. Эта модель поддается аналитическому рассмотрению с помощью метода интегральных уравнений [3]. Полученные ранее результаты относятся к случаю, когда включение располагается целиком в одной из сред [1; 2].

Опишем постановку задачи. Отнесем трехмерное пространство к прямоугольной декартовой системе координат x, y, z. Ось $0z$ направим вертикально вверх,а ось $0y$ — вправо. Окружающая среда, расположенная при $0 < z < +\infty$ $(-\infty < x,\ y < +\infty)$, характеризуется постоянными вещественными диэлектрической проницаемостью ε_1 и магнитной проницаемостью μ_1. Среда в области $-\infty < z < 0$ $(-\infty < x,\ y < +\infty)$ характеризуется постоянными комплексными материальными параметрами ε_2, μ_2.

Пусть сторонние монохроматические источники $\vec{J}(\vec{r})$ и $\vec{M}(\vec{r})$ $(\vec{r} = (0,\ y,\ z))$, распределение которых не зависит от x, создают в описанной выше регулярной среде поле $\vec{E}_0(\vec{r})$, $\vec{H}_0(\vec{r})$. Оно подчиняется уравнениям Максвелла

$$\nabla_{\perp} \times \vec{E}_0(\vec{r}) - ik_0\mu(z)\vec{H}_0(\vec{r}) = -(4\pi/c)\vec{M}(\vec{r});$$

$$\nabla_\perp \times \vec{H}_0(\vec{r}) + ik_0\varepsilon(z)\vec{E}_0(\vec{r}) = (4\pi/c)\vec{J}(\vec{r}), \tag{1}$$

$(-\infty < y,\ y < +\infty)$, условию непрерывности горизонтальных компонент поля на поверхности раздела $z = 0$ и условию излучения в бесконечности. Здесь и далее временной множитель $e^{-i\omega t}$ опущен, c — скорость света в вакууме, $k_0 = \omega/c$, $\nabla_\perp = \vec{y}_0\partial_y + \vec{z}_0\partial_z$, $\vec{y}_0$ и $\vec{z}_0$ — орты осей $0y$ и $0z$, $\varepsilon(z)$ и $\mu(z)$ — материальные параметры совокупной среды

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & z > 0 \\ \varepsilon_2, & z < 0 \end{cases}; \qquad \mu(z) = \begin{cases} \mu_1, & z > 0 \\ \mu_2, & z < 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Поместим в эту среду однородное включение в форме бесконечно длинного цилиндра с поперечным сечением S и образующими, параллельными оси $0x$. Расположение включения относительно границы раздела $z = 0$ пока не конкретизируем, считая его произвольным. Материал включения характеризуется комплекснозначными диэлектрической проницаемостью ε_p и магнитной проницаемостью μ_p. Пусть S и область локализации сторонних источников в плоскости $y0z$ не пересекаются. Тогда во внешности CS области S электромагнитное поле сторонних источников можно представить в виде $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$, $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}'$, где $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ — первичное поле, создаваемое источниками в отсутствии включения, а $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ — неизвестное рассеянное поле. Поле во внутренних точках включения при необходимости снабжаем индексом p: $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_p(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_p(\vec{r})$. В дальнейшем будем рассматривать Н-поляризованное поле $\vec{E} = (0, E_y, E_z)$, $\vec{H} = (H_x, 0, 0)$, положив, что $\vec{J} = (0, J_y, J_z)$, $\vec{M} = (M_x, 0, 0)$.

Из уравнений Максвелла в области CS, дополняющей S до всей области $y0z$, условий сопряжения для поля на границе S и формул Грина вытекают следующие соотношения:

$$E'_y(\vec{r}) = [i/k_0\varepsilon(z)]\,\partial_z H'_x(\vec{r}); \tag{3}$$

$$E'_z(\vec{r}) = -[i/k_0\varepsilon(z)]\,\partial_y H'_x(\vec{r});$$

$$H_x(\vec{r}) = H_{0x}(\vec{r}) + \int_L dl' < H_\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}'),\ H_{px}(\vec{r}') > \vec{r} \in CS. \tag{4}$$

Здесь обозначено

$$\langle H_\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}'),\ H_{px}(\vec{r}')\rangle \equiv \varepsilon_p^{-1} H_\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}')\,[N'_y\partial_{y'} + N'_z\partial_{z'}] \to$$
$$\to H_{px}(\vec{r}') - \varepsilon^{-1}(z)\,H_{px}(\vec{r}')\,[N'_y\partial_{y'} + N'_z\partial_{z'}]\,H_\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}'),$$

L — контур поперечного сечения цилиндра: dl' и N' — элементы контура L и нормаль к L в точке $\vec{r}' \in L$, направленной из S в CS. Функция $H_\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}')$ определена как решение уравнения

$$[\partial_z^2 + \partial_y^2 + k^2(z)]\,H_\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}') = \varepsilon(z)\,\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \tag{5}$$

$(-\infty < x,\ z < +\infty)$, которое в точке разрыва $z=0$ коэффициентов этого уравнения непрерывно вместе с $\varepsilon^{-1}(z)\,\partial_z H_\varepsilon(\vec r, \vec r\,')$ (последнее—при $z \neq z'$), а в бесконечности удовлетворяют условию излучения; $k^2(z) = k_0^2\varepsilon(z)\,\mu(z)$, δ — дельта-функция Дирака. Используемое далее выражение для $H_\varepsilon(\vec r, \vec r\,')$, найденное путем разложения в интеграл Фурье по переменной $y - y'$ имеет следующий вид: при $z' > 0$ —

$$H_\varepsilon(\vec r, \vec r\,') = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_1}{4i}\left[H_0^{(1)}(k_1|\vec r - \vec r\,'|) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{d\varkappa}{\gamma_1}R_s^+(\varkappa)\,e^{i\gamma_1(z+z')+i\varkappa(y-y')}\right], & z>0, \\ \dfrac{\varepsilon_1}{4\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{d\varkappa}{\gamma_1}T_s^+(\varkappa)\,e^{-i\gamma_2 z+i\gamma_1 z'+i\varkappa(y-y')}, & z<0, \end{cases}$$

а при $z' < 0$ —

$$H_\varepsilon(\vec r, \vec r\,') = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_2}{4i}\left[H_0^{(1)}(k_2|\vec r - \vec r\,'|) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{d\varkappa}{\gamma_2}R_s^-(\varkappa)\,e^{-i\gamma_2(z+z')+i\varkappa(y-y')}\right], & z<0; \\ \dfrac{\varepsilon_2}{4\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{d\varkappa}{\gamma_2}T_s^-(\varkappa)\,e^{i\gamma_1 z-i\gamma_2 z'+i\varkappa(y-y')}, & z>0. \end{cases} \qquad (6)$$

Здесь и далее $H_m^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода порядка m,

$$R_s^+(\varkappa) = \frac{\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2}{\varepsilon_2\gamma_1 + \varepsilon_1\gamma_2}; \qquad T_s^+(\varkappa) = \frac{2\varepsilon_2\gamma_1}{\varepsilon_2\gamma_1 + \varepsilon_1\gamma_2};$$

$$R_s^-(\varkappa) = \frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1}{\varepsilon_1\gamma_2 + \varepsilon_2\gamma_1}; \qquad T_s^-(\varkappa) = \frac{2\varepsilon_1\gamma_2}{\varepsilon_1\gamma_2 + \varepsilon_2\gamma_1};$$

$$\gamma_j = \sqrt{k_j^2 - \varkappa^2}; \qquad k_j = k_0\sqrt{\varepsilon_j\mu_j}; \qquad j = 1,\ 2 \quad (\mathrm{Im}\sqrt{\ } \geqslant 0).$$

Из уравнений Максвелла в области S следуют соотношения

$$E_{py}(\vec r) = [i/k_0\varepsilon_p]\,\partial_z H_{px}(\vec r); \qquad E_{pz}(\vec r) = -[i/k_0\varepsilon_p]\,\partial_y H_{px}(\vec r) \qquad (7)$$

и уравнение для $H_{px}(\vec r)$

$$[\partial_z^2 + \partial_y^2 + k_p^2]\,H_{px}(\vec r) = 0, \qquad (8)$$

где

$$k_p = k_0\sqrt{\varepsilon_p\mu_p} \qquad (\mathrm{Im}\sqrt{\ } \geqslant 0).$$

Дополним уравнение (8) равенством, вытекающим из тождества (4)

$$H_x(\vec r_L) + \lim_{CS(\vec r \to \vec r_L)}\int_L \langle H_\varepsilon(\vec r, \vec r\,'),\ H_{px}(\vec r\,')\rangle\, dl' = -H_{0x}(\vec r_L),\quad (\vec r_L \in L). \qquad (9)$$

В результате получим краевую задачу относительно $H_{px}(\vec r)$ в области S. Соотношение (9) является нелокальным граничным условием, учитывающим наличие внешней области CS [3, 4]. Если величина $H_{px}(\vec r)$ известна, то равенства (3), (4) и (7) превращаются в прямые формулы для расчета H_x, E_y, E_z, E_{py}, E_{pz}.

Рассмотрим случай, когда цилиндр имеет круговое сечение и пересекает границу раздела $z=0$. Пусть $\vec{r}_p=(0,\ 0,\ z_p)$ — радиус-вектор центральной точки S, a — радиус цилиндра. Тогда $S=\{|\vec{r}-\vec{r}_p|<a\}$, где предполагается, что $|z_p|<a$. Общее решение уравнения (8), ограниченное всюду внутри включения, можно представить в виде

$$H_{px}(\vec{r})=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_m J_m(k_p\rho)\,e^{im\varphi}, \tag{10}$$

где H_m — неопределенные коэффициенты, φ — угол полярной системы координат ρ, φ в плоскости $y0z$ с центром в точке $\vec{r}_p$: $y=\rho\cos\varphi$, $z=z_p+\rho\sin\varphi$, J_m — функция Бесселя порядка m.

В качестве первичного возьмем поле $H_{0x}(\vec{r})$, возникающее при падении из верхней среды плоской вертикально-поляризованной волны единичной амплитуды:

$$H_{0x}(\vec{r})=\begin{cases} e^{i\varkappa_0 y}\left[e^{-i\gamma_{10}z}+R_s^{+}(\varkappa_0)\,e^{i\gamma_{10}z}\right], & z>0;\\ e^{i\varkappa_0 y}T_s(\varkappa_0)\,e^{-i\gamma_{20}z}, & z<0.\end{cases} \tag{11}$$

Здесь $\varkappa_0=k_1\cos\varphi_0$, φ_0 — угол падения волны, $\gamma_{j0}=\sqrt{k_j^2-\varkappa_0^2}$ $(j=1,\ 2)$.

Подстановка (6), (10) и (11) в нелокальное граничное условие (9) доставляет бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно H_m

$$H_m+\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{mn}H_n=F_m,\quad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots . \tag{12}$$

Техника соответствующих вычислений приведена, например, в работе [2].

Коэффициенты при неизвестных и правая часть имеют следующий вид:

$$C_{mn}=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{a}{8iJ_m(k_pa)}\left[\sum_{q=-\infty}^{+\infty} e_{qm}^{-}(\varphi_1,\ \varphi_2)\,e_{nq}^{-}(\varphi_1,\ \varphi_2)\,\rightarrow\right.\right.$$

$$\left.\left.\rightarrow\left(H_q^{(1)}(k_1a)\,W_{nq}^{1}+H_q^{(1)}(k_2a)\,W_{nq}^{2}\right)+g_{mn}^{+}+g_{mn}^{-}\right]\right\}; \tag{13}$$

$$F_m=\frac{i}{2\pi J_m(k_pa)}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} e_{qm}^{-}(\varphi_1,\ \varphi_2)\left[\mathring{A}_qJ_q(k_1a)-\mathring{B}_qJ_q(k_2a)\right]. \tag{14}$$

Здесь φ_1 и φ_2 — угловые координаты точек, в которых окружность $y^2+(z-z_p)^2=a^2$ пересекает линию $z=0$. Они определены равенствами

$$\begin{aligned} &\sin\varphi_1=z_p/a;\ \cos\varphi_1=\sqrt{a^2-z_p^2}/a;\\ &\sin\varphi_2=z_p/a;\ \cos\varphi_2=-\sqrt{a^2-z_p^2}/a. \end{aligned} \tag{15}$$

Далее используются следующие обозначения:

$$g_{mn}^{+}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varkappa}{\gamma_1}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}i^{q-s}W_{ns}^{1}e_{ns}^{+}(\varphi_1,\varphi_2)\,e_{qm}^{-}(\varphi_1,\varphi_2)\,e^{i\gamma_2 z_p}\chi_1^{s}(\varkappa)\to$$

$$\to[R_s^{+}(\varkappa)\,J_q(k_1a)\,e^{i\gamma_1 z_p}\chi_1^{-q}(\varkappa)-T_s^{+}(\varkappa)\,J_q(k_2a)\,e^{-i\gamma_2 z_p}\chi_2^{q}(\varkappa)];$$

$$g_{mn}^{-}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varkappa}{\gamma_2}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_{s=-\infty}^{+\infty}i^{q-s}W_{ns}^{2}e_{ns}^{+}(\varphi_1,\varphi_2)\,e_{qm}^{-}(\varphi_1,\varphi_2)\,e^{-i\gamma_2 z_p}\chi_2^{-s}(\varkappa)\to$$

$$\to[R_s^{-}(\varkappa)\,J_q(k_2a)\,e^{-i\gamma_2 z_p}\chi_2^{q}(\varkappa)-T_s^{-}(\varkappa)\,J_q(k_1a)\,e^{i\gamma_1 z_p}\chi_1^{-q}(\varkappa)];\qquad(16)$$

$$e_{mn}^{\pm}(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{e^{i\varphi_1(m\pm n)}-e^{i\varphi_2(m\pm n)}}{m\pm n};\qquad(17)$$

$$W_{nq}^{j}=\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_p}\frac{\partial J_n(k_pa)}{\partial a}J_q(k_ja)-J_n(k_pa)\frac{\partial J_q(k_ja)}{\partial a},\quad j=1,\ 2.\qquad(18)$$

В этих формулах фигурируют следующие величины:

$$\chi_1(\varkappa)=[\varkappa+i\gamma_1(\varkappa)]/k_1;\quad \chi_2(\varkappa)=[\varkappa+i\gamma_2(\varkappa)]/k_2;\qquad(19)$$

$$\begin{aligned}\mathring{A}_q&=i^q[e^{-ik_1z_p\sin\varphi_0+iq\varphi_0}+R_s^{+}(\varkappa_0)\,e^{ik_2z_p\sin\varphi_0-iq\varphi_0}];\\ \mathring{B}_q&=T_s^{+}(\varkappa_0)\,i^qe^{-ik_2z_p\sqrt{1-\Psi^2}}\chi^q(\Psi),\quad \Psi=k_1\cos\varphi_0/k_2.\end{aligned}\qquad(20)$$

Будем считать, что решение системы (12) известно. Тогда, подставив (10) и (6) в (4), получим выражения для рассеянного поля во внешности включения: при $0<z<+\infty$ —

$$H_x'(\vec r)=\frac{a}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}H_n\sum_{q=-\infty}^{+\infty}[e_{nq}^{-}(\varphi_1,\varphi_2)\,H_q^{(1)}(k_1\rho)\,e^{iq\varphi}W_{nq}^{1}-$$

$$-\frac{1}{\pi}(g_{1n}^{+}+g_{1n}^{-})],\qquad(21)$$

где

$$\begin{aligned}g_{1n}^{+}&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varkappa}{\gamma_1}R_s^{+}(\varkappa)\,e^{i(2\gamma_1z_p+\gamma_1z+\varkappa y)}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}i^{-q}W_{nq}^{1}e_{nq}^{+}(\varphi_1,\varphi_2)\,\chi_1^{q}(\varkappa);\\ g_{1n}^{-}&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varkappa}{\gamma_2}T_s^{-}(\varkappa)\,e^{i(\gamma_1z_p-\gamma_2z_p+\gamma_1z+\varkappa y)}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}i^{-q}W_{nq}^{2}e_{nq}^{+}(\varphi_1,\psi_2)\,\chi_2^{-q}(\varkappa).\end{aligned}\qquad(22)$$

а при $-\infty<z<0$ —

$$H_x(\vec r)=-\frac{a}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}H_n\sum_{q=-\infty}^{+\infty}[e_{nq}^{-}(\varphi_1,\varphi_2)\,H_q^{(1)}(k_2\rho)\,e^{iq\varphi}W_{nq}^{2}+$$

$$+\frac{1}{\pi}(g_{2n}^{-}-g_{2n}^{+})\Big],\qquad(23)$$

где

$$g_{2n}^{+} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varkappa}{\gamma_2} T_s^{+}(\varkappa)\, e^{i(\gamma_1 z_p - \gamma_2 z_p - \gamma_2 z + \varkappa y)} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^{-q} W_{nq}^{2} e_{nq}^{+}(\varphi_1, \varphi_2)\, \chi_1^{q}(\varkappa);$$

$$g_{2n}^{-} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varkappa}{\gamma_2} R_s^{-}(\varkappa)\, e^{-i(2\gamma_2 z_p + \gamma_2 z + \varkappa y)} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^{-q} W_{nq}^{1} e_{nq}^{-}(\varphi_1, \varphi_2)\, \chi_2^{-q}(\varkappa). \tag{24}$$

Применив к вычислению интегралов в (21) метод стационарной фазы, приходим к следующему выражению для рассеянного поля в верхнем полупространстве $(0 < \varphi < \pi)$, справедливому при $k_1 \rho \cos^2 \varphi \gg 1$

$$H'_x(\vec{r}) = a \frac{e^{ik_1\rho - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k_1 \rho}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} i^{-q} \Bigg[e_{nq}^{-}(\varphi_1, \varphi_2)\, e^{iq\varphi} W_{nq}^{1} -$$

$$- e_{nq}^{+}(\varphi_1, \varphi_2)\, e^{iz_p \gamma_{1s}} \Bigg(\frac{T_s^{-}(\varkappa_s)}{\gamma_{2s}} e^{-i\gamma_{2s} z_p} W_{ns}^{2} \chi_2^{-q}(\varkappa_s) +$$

$$+ \frac{R_s^{*}(\varkappa_s)}{\gamma_{1s}} e^{i\gamma_{1s} z_p} W_{nq}^{1} \chi_1^{q}(\varkappa_s) \Bigg) \Bigg], \tag{25}$$

где $\varkappa_s = k_1 \cos \varphi$, $\gamma_{js} = \sqrt{k_j^2 - \varkappa_s^2}$ $(j = 1, 2)$.

Результаты анализа закономерностей рассеяния волн в зависимости от параметров избранной модели будут изложены в последующей публикации.

Список литературы: 1. *Uzunoglu N. N., Fikioris J. G.* Scattering from an inhomogeneity inside a dielectric-slab waveguide // J. of the Optic. Soc. of Am. 1982. Vol. 72, N 5. P. 628—637. 2. *Cottis P. G., Kanellopoulos J. D.* Scattering from dielectric cylinders embedded in a two—layer medium // J. Electronics. 1986. Vol. 61. N. 4. P. 477—486. 3. *Хижняк Н. А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. К., 1986. 280 с. 4. *Ting L.* Exact boundary conditions for scattering problems // J. of the Accoustical Society of Am. 1986. Vol. 80, N. 6. P. 1825—1827.

Поступила в редколлегию 14.11.89