РАДИОТЕХНИКА

УДК 517.922+517.958

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МНОГОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ НА ВЫХОДЕ. II. ЛИНИЯ С ДИСПЕРСИЕЙ

ВЛАСЕНКО Л.А., РУТКАС А.Г.

Моделируются переходные процессы при импульсном возбуждении многопроводной передающей линии с дисперсией, нагруженной на выходе произвольной цепью с сосредоточенными линейными и нелинейными элементами. Задача сводится к анализу вырожденной системы интегро-дифференциальных уравнений.

1. Введение

Характеристики переходных процессов в цепях с многопроводными линиями передачи используются при разложениях немонохроматических электромагнитных полей на модовые составляющие [1,2], в анализе и проектировании электрических схем процессоров, их блоков управления [3], микроволновых элементов и цепей [4,5], распределенных многополюсных коммутаторов – внутренних соединительных линий БИС и других микроволновых устройств [6-8]. В предыдущей статье [9] был изложен метод точного аналитического и численного описания переходных процессов в цепях с многопроводными линиями без дисперсии с неискажающими погонными матричным сопротивлением R и матричной проводимостью утечки G.

Здесь рассматриваются связанные многопроводные однородные передающие линии с дисперсией. На входе линии подключен многофазный источник напряжений (ЭДС), на выходе – многополюсник нагрузки с любым числом сосредоточенных LCR-элементов. Допускаются также нелинейные сосредоточенные сопротивления и проводимости в нагрузке. Относительно погонных матричных параметров линии L, R и C, G предполагается некоторое свойство взаимности, названное *нормальной симметричностью линии*. Посредством преобразований с парой матричных декрементов затухания векторному телеграфному уравнению с матричными коэффициентами удается поставить в соответствие систему скалярных телеграфных уравнений с индивидуальными (модовыми) параметрами и дисперсиями.

2. Матричные декременты затухания для напряжений и токов в связанных линиях

Векторы напряжений $U(x,t)$ и токов $I(x,t)$ многопроводной однородной линии с n основными проводами и одним нулевым проводом или землей удовлетворяют системе двух векторных телеграфных уравнений в частных производных первого порядка

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = L\frac{\partial I}{\partial t} + RI\,;\; -\frac{\partial I}{\partial x} = C\frac{\partial U}{\partial t} + GU;\; t \ge 0\,, 0 \le x \le 1\,. \quad (1)$$

Матрицы погонных параметров размерности $n \times n$ являются вещественными, симметричными, неотрицательно определенными, причем L и C – обратимыми: $L > 0,\ C > 0;\ R \ge 0,\ G \ge 0$. Начальная и смешанная задачи для системы векторных уравнений (1), свойства решений, периодические (установившиеся) колебания были предметом многих исследований (см., например, [10-13]). Однако в нашем случае краевые условия содержат дифференциальные и алгебраические операции вместе с дополнительными функциональными переменными. Идея первого шага предлагаемого метода моделирования переходных процессов при возбуждении всей цепи с распределенными и сосредоточенными элементами состоит в построении явных интегральных формул для решения векторных уравнений в частных производных (1) на интервале $0 \le x \le 1$, в которых неизвестными являются скалярные функции источников в точках $x = 0, x = 1$ для модовых напряжений и токов.

Уравнения (1) путем дифференцирования преобразуются в уравнения второго порядка для каждой из векторных функций U, I отдельно:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial U}{\partial t} + RGU(x,t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (GL + CR)\frac{\partial I}{\partial t} + GRI(x,t). \quad (3)$$

Здесь, вообще говоря, $LC \ne CL, RG \ne GR, LG \ne GL, RC \ne CR$.

Введем матричные декременты затухания M и N для вектора напряжений $U(x,t)$ и токов $I(x,t)$ соответственно:

$$M = \frac{1}{2}C^{-1}L^{-1}(LG + RC)\,,\; N = \frac{1}{2}L^{-1}C^{-1}(GL + CR). \quad (4)$$

После замены

$$U(x,t) = e^{-Mt}\cdot\tilde{U}(x,t)\,,\quad I(x,t) = e^{-Nt}\tilde{I}(x,t) \quad (5)$$

уравнения (2), (3) преобразуются в такие:

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} = e^{Mt}LCe^{-Mt}\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} - e^{Mt}\Phi e^{-Mt}\cdot\tilde{U}(x,t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{I}}{\partial x^2} = e^{Nt}CLe^{-Nt}\frac{\partial^2 \tilde{I}}{\partial t^2} - e^{Nt}\Phi' e^{-Nt}\cdot\tilde{I}(x,t). \quad (7)$$

Здесь матрица Φ имеет вид

$$\Phi = LCM^2 - RG, \quad (8)$$

или без матричного декремента затухания

$$\Phi = \frac{1}{4}(LG + RC)C^{-1}L^{-1}(LG + RC) - RG. \quad (9)$$

3. Нормальная симметрическая многопроводная линия

Далее мы предполагаем, что многопроводная линия является *нормальной симметрической* в том смысле, что произведения троек матричных коэффициентов уравнений (1)

$$\mathrm{CLG}\,,\ \mathrm{CRG}\,,\ \mathrm{LCR}\,,\ \mathrm{LGR} \tag{10}$$

являются *симметричными матрицами.* С учетом симметричности матриц L,R,C,G симметричность произведений (10) означает равенства

$$\begin{aligned}&1.\ CLG = GLC\ ;\ 2.\ CRG = GRC\ ;\\ &3.\ LCR = RCL\ ;\ 4.\ LGR = RGL\ .\end{aligned} \tag{11}$$

Свойство нормальной симметричности многопроводной линии отражает определенную *взаимную симметрию* пары уравнений в частных производных (1). Именно, если ввести характеристические матричные пучки $\lambda L + R$ и $\lambda C + G$ каждого из уравнений (1), то имеет место взаимная перестановочность пары матричных коэффициентов одного уравнения при окаймлении ими характеристического пучка другого уравнения:

$$\begin{aligned}&C(\lambda L + R)G = G(\lambda L + R)C\ ,\\ &L(\lambda C + G)R = R(\lambda C + G)L\ ,\ \forall\lambda\ .\end{aligned} \tag{12}$$

Для двухпроводной линии со скалярными уравнениями (1) условия перестановочности (11)~(12) выполнены автоматически. Реальные многопроводные (связанные) линии часто оказываются нормальными симметрическими в смысле (11): например, симметричные транспонированные линии в [11, п.1.6]; [12, п.12.2.2], идентичные линии в [14, гл.X] и др.

Свойство нормальной симметричности линии удобно интерпретировать на двудольном четырехвершинном графе (рис.1), вершины которого помечены коэффициентными матрицами уравнений (1) так, чтобы первому уравнению отвечало независимое множество вершин $\{L,R\}$, второму уравнению – независимое множество $\{C,G\}$. Условия нормальной симметричности (11) означают, что при прохождении каждой цепи длины 2 последовательное произведение матриц в трех вершинах не зависит от направления движения вдоль цепи. Каждая из рассматриваемых цепей соединяет две различные вершины одного множества независимости.

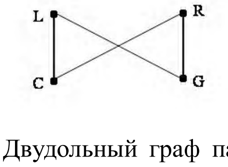

Рис.1. Двудольный граф параметров

Замечание 1. Если матрицы L,R,C,G вещественны и симметричны, а L и C – обратимы, то равенства (11) являются зависимыми. Именно, из равенств (1)-(3) вытекает (4), из равенств (1), (3), (4) вытекает (2). В терминах графа рис.1 для составления независимых соотношений нормальной симметричности следует выбирать на графе две цепи длины 2 с центрами в вершинах L,C и одну из цепей дины 2 с центром либо R, либо G.

Нетрудно проверить, что из равенств (11) вытекают соотношения

$$MLC = LCM\ ,\ M\Phi = \Phi M\ ;\ N = M'. \tag{13}$$

Вследствие этого уравнения (6), (7) оказываются стационарными:

$$\frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial t^2} - \Phi\tilde{U}(x,t)\,, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2\tilde{I}}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2\tilde{I}}{\partial t^2} - \Phi'\tilde{I}(x,t). \tag{15}$$

Можно проверить, что вещественные матрицы

$$\Lambda_0 = \sqrt{L}C\sqrt{L}\ ,\ \Phi_0 = \sqrt{L^{-1}}\Phi\sqrt{L} \tag{16}$$

являются симметричными и перестановочными: $\Lambda_0 = \Lambda_0'$, $\Phi_0 = \Phi_0'$, $\Lambda_0\Phi_0 = \Phi_0\Lambda_0$. При этом $\Lambda_0 > 0$, $\Phi_0 \ge 0$, так как из (9), (11) выводится представление

$$\Phi_0 = \frac{1}{4}\sqrt{L^{-1}}C^{-1}\left(LG - RC\right)^* C(LG - RC)C^{-1}\sqrt{L^{-1}}\ .$$

Следовательно, существует ортогональная вещественная матрица T, одновременно приводящая Λ_0 и Φ_0 к диагональной форме:

$$\begin{aligned}&T'\Lambda_0 T = \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_k > 0\}_1^n\ ,\\ &T'\Phi_0 T = D = \mathrm{diag}\{d_k \ge 0\}_1^n\ .\end{aligned} \tag{17}$$

Замены векторных переменных

$$V(x,t) = T'\sqrt{L^{-1}}\tilde{U}(x,t)\ ,\ H(x,t) = T'\sqrt{L}\tilde{I}(x,t) \tag{18}$$

позволяют преобразовать уравнения (14), (15) к виду

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \Lambda\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - DV(x,t)\,, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \Lambda\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - DH(x,t)\,. \tag{20}$$

Поскольку матрицы Λ, D (17) диагональны, векторное уравнение (19) относительно $V(x,t)$ эквивалентно системе n не связанных скалярных уравнений относительно компонент $v_k(x,t)$ вектор-функции $V(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} = a_k^2\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} + b_k^2 v_k(x,t)\ ,\ k = 1,\ldots,n, \tag{21}$$

где $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}} > 0\ ,\ b_k = \sqrt{\dfrac{d_k}{\lambda_k}} \ge 0$.

В точности таким же обобщенным волновым уравнениям удовлетворяют компоненты $h_k(x,t)$ вектора $H(x,t)$, который является решением векторного уравнения (20).

С учетом выполненных замен искомые векторные решения U, I уравнений (1) выражаются через решения V, H уравнений (19), (20) формулами

$$U(x,t) = e^{-Mt}\sqrt{L}TV(x,t) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x,t)e^{-Mt}\sqrt{L}Te_k \ , \quad (22)$$

$$I(x,t) = e^{-Nt}\sqrt{L^{-1}}TH(x,t) = \sum_{k=1}^{n} h_k(x,t)e^{-Nt}\sqrt{L^{-1}}Te_k \ , \quad (23)$$

где $e_k = (0,...,1,..0)^{tr}$ – векторы координатного базиса пространства $\mathbf{R}^n$. Будем называть слагаемые вектор-функции в суммах (22), (23) *модовыми решениями* для многопроводной линии с дисперсией, а скалярные функции $v_k(x,t), h_k(x,t)$ – *модовыми коэффициентами*.

4. Интегральные представления модовых коэффициентов через функции источников

Будем искать решение v_k уравнения (21) с помощью непрерывно дифференцируемых функций источников $\varphi_k(t), \psi_k(t)$, помещенных на концах промежутка $0 \le x \le l$:

$$\begin{aligned} v_k(x,t) = &\int_0^{a_k t - x} \varphi_k(s) I(\delta_k z(x, a_k t - s))ds + \\ + &\int_0^{a_k t - l + x} \psi_k(s) I(\delta_k z(l - x, a_k t - s))ds \ . \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $\delta_k = \dfrac{b_k}{a_k} = \sqrt{d_k}$, $\varphi_k(s) = \psi_k(s) = 0$ при $s < 0$, $z(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$, $I(z) = I_0(z) = J_0(iz) = = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{(m!)^2}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2m}$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка 0. Решения в форме производных $\dfrac{\partial v_k}{\partial x}$ от функций (24) рассматривались, например, в [15, п.266] при $a_k = 1$. Понятно, что решения (24) удовлетворяют нулевым начальным условиям

$$v_k(x,0) = 0 \ , \quad \frac{\partial v_k}{\partial x}(x,0) = 0 \ . \quad (25)$$

Аналогично компоненты h_k решения H уравнения (20) ищем в форме (24) с *другими функциями источников* $\varphi_{kI}(t), \psi_{kI}(t)$, непрерывно дифференцируемыми и равными нулю при $t < 0, k = 1,...,n$:

$$\begin{aligned} h_k(x,t) = &\int_0^{a_k t - x} \varphi_{kI}(s) I(\delta_k z(x, a_k t - s))ds + \\ + &\int_0^{a_k t - l + x} \psi_{kI}(s) I(\delta_k z(l - x, a_k t - s))ds \ . \end{aligned} \quad (26)$$

Перепишем исходную систему телеграфных уравнений (1) в терминах вектор-функций V, H из (22), (23):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x} + T'\sqrt{L^{-1}}e^{Mt}Le^{-Nt}\sqrt{L^{-1}}T\frac{\partial H}{\partial t} + \\ &+ T'\sqrt{L^{-1}}e^{Mt}(R - LN)e^{-Nt}\sqrt{L^{-1}}TH = 0; \\ &\frac{\partial H}{\partial x} + T'\sqrt{L}e^{Nt}Ce^{-Mt}\sqrt{L}T\frac{\partial V}{\partial t} + \\ &+ T'\sqrt{L}e^{Nt}(G - CM)e^{-Mt}\sqrt{L}TV = 0 \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Из свойства симметричности и нормальности (11) многопроводной линии вытекают равенства

$$RN = MR \ , \ LN = ML \ , \ NC = CM \ , \ NG = GM \ . \quad (28)$$

С их помощью и с помощью равенств (11) легко проверяется, что матрицы

$$S_0 = \sqrt{L^{-1}}(R - LN)\sqrt{L^{-1}} \ , \ P_0 = \sqrt{L}(G - CM)\sqrt{L} \quad (29)$$

симметричны и матрицы $S_0, P_0, \Lambda_0, \Phi_0$ (16), (29) попарно перестановочны. Поэтому можно считать, что ортогональная вещественная матрица T в (17) одновременно приводит к диагональной форме все четыре матрицы. Пусть $\{s_k\}, \{p_k\}$ – собственные числа матриц S_0, P_0, так что

$$S = T'S_0T = \mathrm{diag}\{s_k\} \ , P = T'P_0T = \mathrm{diag}\{p_k\} . \quad (30)$$

Из (28) следует, что $e^{Mt}Le^{-Nt} = L$, $e^{Nt}Ce^{-Mt} = C$, $e^{Mt}(R - LN)e^{-Nt} = R - LN$, $e^{Nt}(G - CM)e^{-Mt} = G - CM$.

Уравнения (27) принимают вид

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + SH(x,t) = 0 \ , \quad (31)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \Lambda\frac{\partial V}{\partial t} + PV(x,t) = 0 \ . \quad (32)$$

Вследствие диагональности матриц Λ (17), S, P (30) пара векторных уравнений (31), (32) эквивалентна системе $2n$ скалярных уравнений $(k = 1,...,n)$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x} + \frac{\partial h_k}{\partial t} + s_k h_k(x,t) = 0 \ , \quad (33)$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial x} + \lambda_k\frac{\partial v_k}{\partial t} + p_k v_k(x,t) = 0 \ . \quad (34)$$

Подставляя в (33), (34) выражения v_k, h_k из (24), (26) и записывая их в любой фиксированной точке x (например, при $x = 0$), получаем $2n$ интегральных уравнений относительно $4n$ функций источников $\varphi_k, \psi_k, \varphi_{kI}, \psi_{kI}$ $(k = 1,...,n)$:

$$\begin{aligned} &-\varphi_k(a_k t) + \psi_k(a_k t - l) + a_k\varphi_{kI}(a_k t) + a_k\psi_{kI}(a_k t - l) + \\ &+ a_k\delta_k\int_0^{a_k t}(a_k t - s)\varphi_{kI}(s)\frac{I_1(\delta_k z(0, a_k t - s))}{z(0, a_k t - s)}ds + \\ &+ \delta_k\int_0^{a_k t - l}\left[l\psi_k(s) + a_k(a_k t - s)\psi_{kI}(s)\right] \times \\ &\times\frac{I_1(\delta_k z(l, a_k t - s))}{z(l, a_k t - s)}ds + s_k\int_0^{a_k t}\varphi_{kI}(s)I(\delta_k z(0, a_k t - s))ds + \end{aligned}$$

$$+s_k \int_0^{a_k t-l} \psi_{kI}(s) I(\delta_k z(l, a_k t-s)) ds = 0; \quad (35)$$

$$-\varphi_{kI}(a_k t) + \psi_{kI}(a_k t - l) + \sqrt{\lambda_k}\varphi_k(a_k t) +$$

$$+\sqrt{\lambda_k}\psi_k(a_k t - l) + \sqrt{\lambda_k}\delta_k \int_0^{a_k t} (a_k t - s)\varphi_k(s) \times$$

$$\times \frac{I_1(\delta_k z(0, a_k t - s))}{z(0, a_k t - s)} ds +$$

$$+\delta_k \int_0^{a_k t - l} \left[\sqrt{\lambda_k}(a_k t - s)\psi_k(s) + l\psi_{kI}(s)\right] \times$$

$$\times \frac{I_1(\delta_k z(l, a_k t - s))}{z(l, a_k t - s)} ds + p_k \int_0^{a_k t} \varphi_k(s) I(\delta_k z(0, a_k t - s)) ds +$$

$$+p_k \int_0^{a_k t - l} \psi_k(s) I(\delta_k z(l, a_k t - s)) ds = 0. \quad (36)$$

Функция $I_1(z)$ в (35), (36) является модифицированной функцией Бесселя первого рода порядка 1:

$$I_1(z) = \frac{1}{i} J_1(iz) = \frac{z}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}.$$

5. Граничные условия

На входе линии $x = 0$ постулируется векторное граничное условие

$$U(0,t) + R_0 I(0,t) = E(t), \; t \geq 0. \quad (37)$$

Это эквивалентно включению векторного (многофазного) источника напряжений $E(t) = (E_1, ..., E_n)^{tr}(t)$ с внутренним матричным сопротивлением $R_0 \geq 0$. Для простоты будем предполагать, что сопротивление источника R_0 *согласовано* с погонным матричным сопротивлением линии R в следующем смысле: матрица R_0 обладает такими же свойствами перестановочности, что и матрица R. В частности, справедливо равенство $R_0 N = M R_0$ (ср. (28)).

Подставляя в (37) представления $U(0,t), I(0,t)$ через правые части (22), (23) при $x = 0$, получаем n граничных условий для функций v_k, h_k $(k = 1, ..., n)$:

$$v_k(0,t) + \sum_{j=1}^{n} h_j(0,t)(R_{0T} e_j, e_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} E_j(t)\left(e^{Mt} e_j, \sqrt{L^{-1}} T e_k\right). \quad (38)$$

Здесь $R_{0T} = T' \sqrt{L^{-1}} R_0 \sqrt{L^{-1}} T$ и мы используем тождество $e^{Mt} R_0 e^{-Nt} = R_0$, которое следует из равенства $R_0 N = M R_0$.

Подставляя в (38) представления функций $v_k(0,t), h_j(0,t)$ по формулам (24), (26) при $x = 0$, получаем n соотношений – неоднородных интегральных уравнений относительно функций источников $\varphi_k, \varphi_{kI}, \psi_k, \psi_{kI}$:

$$\int_0^{a_k t} \varphi_k(s) I(\delta_k z(0, a_k t - s)) ds + \int_0^{a_k t - l} \psi_k(s) I(\delta_k z(l, a_k t - s)) ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} r_{kj} \left[\int_0^{a_j t} \varphi_{jI}(s) I(\delta_j z(0, a_j t - s)) ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^{a_j t - l} \psi_j(s) I(\delta_j z(l, a_j t - s)) ds \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(T' \sqrt{L^{-1}} e^{Mt} e_j, e_k\right) E_j(t), \quad k = 1, ..., n, \quad (39)$$

где $r_{kj} = (R_{0T} e_j, e_k) = \left(R_0 \sqrt{L^{-1}} T e_j, \sqrt{L^{-1}} T e_k\right)$.

В частности, при нулевом внутреннем сопротивлении источника $R_0 = 0$ интегральные уравнения имеют вид

$$\int_0^{a_k t} \varphi_k(s) I(\delta_k z(0, a_k t - s)) ds + \int_0^{a_k t - l} \psi_k(s) I(\delta_k z(l, a_k t - s)) ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} E_j(t)\left(e^{Mt} e_j, \sqrt{L^{-1}} T e_k\right), \; k = 1, ..., n.$$

Как и следовало ожидать, при $R_0 = 0$ интегральные условия на границе $x = 0$ не содержат функций источников φ_{kI}, ψ_{kI}, связанных с токами. Остается использовать граничные условия на выходе линии $x = l$. Исходя из (22), (23), (24), (26), получаем представления токов и напряжений на выходе $x = l$ линии через функции источников:

$$U_j(l,t) = \sum_{k=1}^{n} \left[\int_0^{a_k t - l} \varphi_k(s) I(\delta_k z(l, a_k t - s)) ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^{a_k t} \psi_k(s) I(\delta_k z(0, a_k t - s)) ds \right] \cdot \left(e^{-Mt} \sqrt{L} T e_k, e_j\right), \quad (40)$$

$$I_j(l,t) = \sum_{k=1}^{n} \left[\int_0^{a_k t - l} \varphi_{kI}(s) I(\delta_k z(l, a_k t - s)) ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^{a_k t} \psi_{kI}(s) I(\delta_k z(0, a_k t - s)) ds \right] \left(e^{-Nt} \sqrt{L^{-1}} T e_k, e_j\right). \quad (41)$$

Эти представления предполагают, что

$$U_j(l,0) = 0, \; I_j(l,0) = 0. \quad (42)$$

Граничные условия на выходе $x = l$ зависят от структуры многополюсника нагрузки с сосредоточенными элементами, в том числе нелинейными. Они имеют вид дифференциально-алгебраических уравнений, содержащих наряду с $U_j(l,t), I_j(l,t)$ еще конечное число неизвестных функций $U_{C_i}(t), I_{L_m}(t)$. Подставив в эти уравнения вместо $U_j(l,t), I_j(l,t)$ правые части из (40), (41), получим *систему неявных интегро-дифференциальных уравнений* относительно функций

$$\varphi_k, \varphi_{kI}, \psi_k, \psi_{kI}, U_{C_i}, I_{L_m} . \qquad (43)$$

Вместе с предыдущими уравнениями (35), (36),(39) система содержит количество уравнений, равное числу неизвестных функций (43). Применяя методы и результаты исследования неявных полулинейных функционально-дифференциальных уравнений из [16, p.4], можно обосновать существование и единственность решения полученной системы при нулевых начальных условиях. После получения решений (43) напряжения $U(x,t)$ и токи $I(x,t)$ в линии в каждой точке x восстанавливаются по формулам (22), (23), (24), (26).

6. Пример

Для иллюстрации метода рассмотрим цепь с трехпроводной линией, изображенную на рис.2.

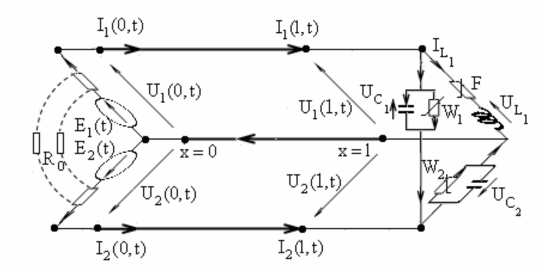

Рис. 2.

Поскольку один провод нулевой (здесь $n = 2$) матрицы R_0, L, C, R, G имеют размерность 2×2. В (43) $k = 1,2;\ i = 1,2;\ m = 1;$ поэтому число неизвестных функций равно одиннадцати. В (35), (36) мы имеем четыре уравнения, в (39) – два. В нагрузке на правом конце линии токи и напряжения на сосредоточенных элементах удовлетворяют уравнениям ($k = 1,2$)

$$I_{C_k} = C_k \frac{dU_{C_k}}{dt},\ U_{L_1} = L\frac{dI_{L_1}}{dt},$$

$$U_F = F(I_{L_1}),\ I_{W_k} = W_k(U_{C_k}) .$$

Исключая с помощью законов Кирхгофа функции $U_{L_1}, I_{C_k}, I_{W_k}, U_F$ на динамических и нелинейных элементах, получаем пять дифференциально-алгебраических уравнений

$$C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} - I_1(l,t) + I_L = -W_1(U_{C_1});$$

$$C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} - C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt} + I_2(l,t) = -W_1(U_{C_1}) + W_2(U_{C_2});$$

$$L_1 \frac{dI_L}{dt} - U_{C_1} - U_{C_2} = -F(I_L);$$

$$U_1(l,t) - U_{C_2} - U_{C_1} = 0;$$

$$U_2(l,t) - U_{C_2} = 0 .$$

Подставляя в них вместо функций $U_k(l,t), I_k(l,t)$ правые части представлений (40), (41) при $n = 2$, получаем пять интегро-дифференциальных уравнений. Вместе с предыдущими шестью уравнениями это составляет одиннадцать уравнений относительно одиннадцати неизвестных функций

$$U_{C_k}, I_{L_1}, \varphi_k, \varphi_{kI}, \psi_k, \psi_{kI}, k = 1,2,$$

из которых три являются электрическими состояниями сосредоточенных элементов нагрузки и восемь – функциями источников на концах линий.

На рис. 3-6 представлены результаты численного решения упомянутых одиннадцати уравнений, относящиеся к электрическим состояниям сосредоточенных элементов нагрузки L_1, C_1, C_2. Все начальные значения выбраны нулевыми, длина линии передачи равна единице. Согласно вычислениям амплитуды напряжений U_{C_k} на емкостях имеют первый порядок ($1 \div 2$В) в интервале от 40 до 200 Пс и к моменту 500 Пс затухают до порядка 10^{-3}В. Ток $I_{L_1}(t)$ на индуктивности является относительно малым (порядка 10^{-2}А) на всем расчетном отрезке времени.

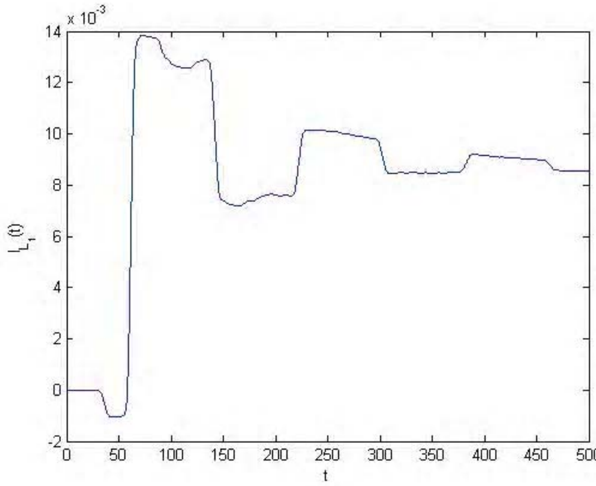

Рис. 3. Ток $I_{L_1}(t)$ при $R_0 = 0$

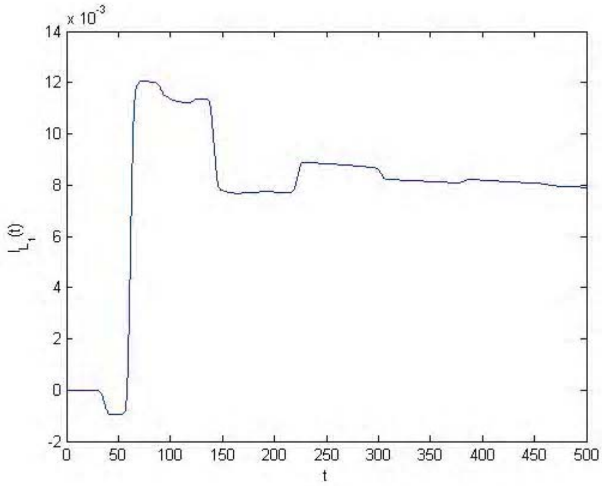

Рис. 4. Ток $I_{L_1}(t)$ при $R_0 = 0{,}5Rl$

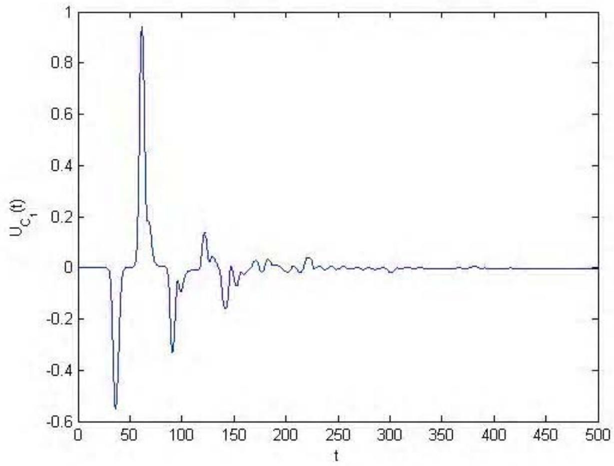

Рис. 5. Напряжение $U_{C_1}(t)$ при $R_0 = 0{,}5Rl$

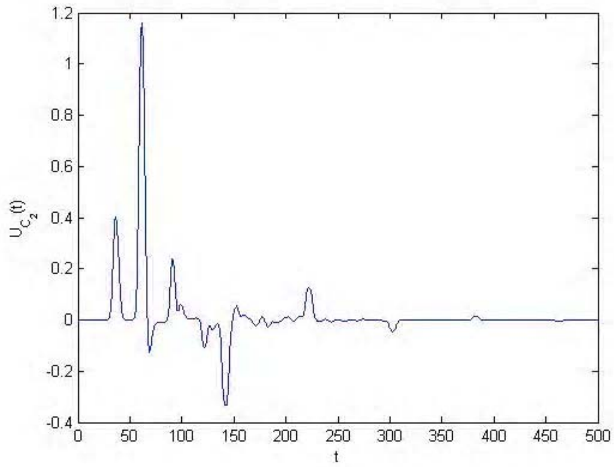

Рис. 6. Напряжение $U_{C_2}(t)$

На рис.7-10 изображены поверхности тока $I_k = I_k(x,t)$ и напряжения $U_k = U_k(x,t)$ k-го провода линии передачи ($k = 1{,}2$), вычисленные по формулам (22), (23), (24), (26) с помощью восьми функций источников. Вычислительный эксперимент проводился для следующих численных значений параметров цепи рис.2 с кубическими нелинейностями:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} 10^{-11} \frac{\text{Гн}}{\text{м}},\ C = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} 10^{-11} \frac{\Phi}{\text{м}},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}3 \end{bmatrix} \frac{\text{Ом}}{\text{м}},\ G = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} \frac{\text{Ом}^{-1}}{\text{м}},$$

$$R_0 = \frac{1}{2} Rl = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}025 \\ 0{,}025 & 0{,}15 \end{bmatrix} \text{Ом};$$

$$L_1 = 10^{-9}\,\text{Гн},\ C_1 = C_2 = 0{,}5\,\text{Пф},$$

$$F(\sigma) = W_1(\sigma) = W_2(\sigma) = \sigma^3.$$

Векторный входной сигнал $E(t) = (E_1, E_2)^{tr}(t)$ выбирался в виде двух одинаковых гауссовских импульсов с эффективной длительностью 5 Пс и максимальной амплитудой 2 вольта:

$$E_k(t) = 2e^{-(t-\alpha)^2/2\delta^2},\ \alpha = 21{,}4299\,\text{Пс},\ \delta = 2{,}2163;\ k = 1{,}2.$$

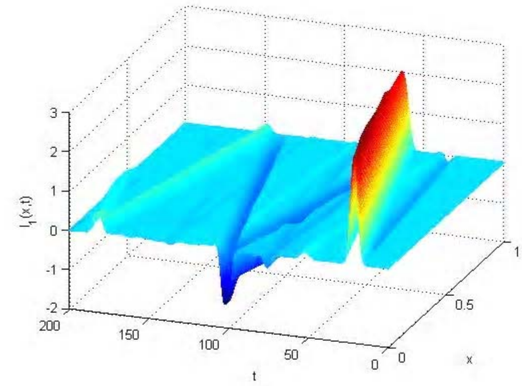

Рис. 7. Поверхность тока $I_1(x,t)$ при $R_0 = 0{,}5Rl$

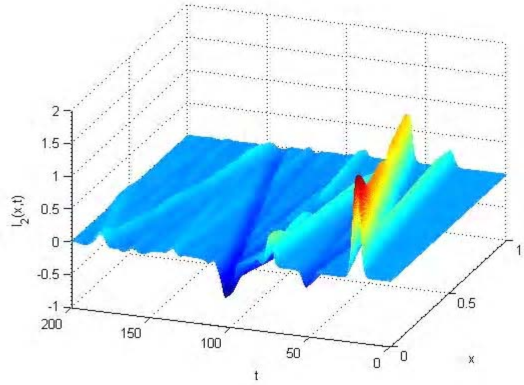

Рис. 8. Поверхность тока $I_2(x,t)$

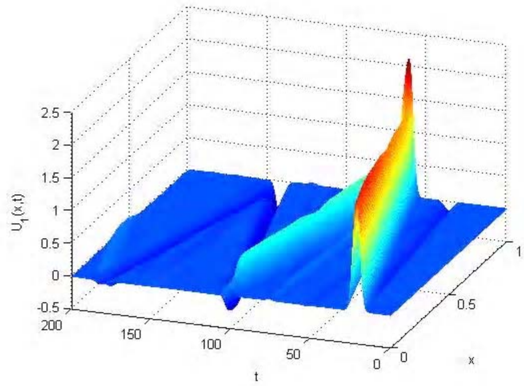

Рис. 9. Поверхность напряжения $U_1(x,t)$

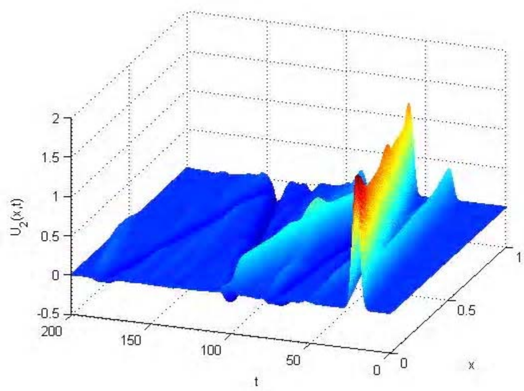

Рис. 10. Поверхность напряжения $U_2(x,t)$

Условия симметричности, пассивности и нормальности (11) линии передачи выполнены, приводящая матрица T и постоянные $\lambda_k, a_k, \delta_k, s_k, p_k, r_{kj}$ в (35), (36), (39) имеют следующие численные значения:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \cdot 10^{-22}; \lambda_2 = 16 \cdot 10^{-22}; \\ a_1 = 6{,}95 \cdot 10^{10}; a_2 = 2{,}5 \cdot 10^{10}; \\ \delta_1 = 0{,}1216; \delta_2 = 0{,}0438; \end{matrix}$$

$$s_1 = 84 \cdot 10^8; s_2 = 11 \cdot 10^8; p_1 = -1{,}75 \cdot 10^{-12} = p_2;$$

$$r_{12} = r_{21} = 0; r_{11} = 1{,}038 \cdot 10^{10}; r_{22} = 0{,}4613 \cdot 10^{10}.$$

Для иллюстрации диссипативного влияния входного матричного сопротивления R_0 на ток $I_{L_1}(t)$ в выходной нагрузке, представленный на рис.4, мы приводим на рис.3 график тока $I_{L_1}(t)$ для цепи рис.2 с нулевым входным сопротивлением $R_0 = 0$: ток на рис.3 оказывается на 20% больше тока на рис.4.

7. Выводы

В цепях с диспергирующими многопроводными нормальными симметрическими линиями и сосредоточенными нагрузками, включая нелинейные сопротивления и проводимости, переходные процессы допускают точное моделирование дескрипторной системой интегро-дифференциальных уравнений. Это позволяет разработать эффективные численные методы решения в переходных режимах, вызванных непериодическими, в частности, импульсными входными сигналами. В следующей работе мы модифицируем предложенную модель, уменьшим в два раза число функций источников, устраним из модели уравнения (35), (36) за счет некоторого усложнения представлений выходных токов (41). Для повышения устойчивости вычислений рост функций источников будет погашаться нормирующими экспоненциальными множителями, показатели которых являются собственными значениями матричного декремента затухания M (4).

Литература: **1.** *Shlivinski A., Heyman E.* Time –Domain Near-Field Analysis of Short-Pulse Antennas-Part I: Spherical Wave (Multipole) Expansion, IEEE Transactions on Antennas And Propagation, 1999. Vol.47. No.2, P. 271-279. **2.** *Tretyakov O.A., Erden F.* Temporal Caviti Oscillations Caused By A Wide-Band Waveform // Progress In Electromagnetics Research B, 2008. Vol.6. P.183-204. **3.** *IEEE* International Symposium on EMC, August 24-28, Symposium Record. 1998. V. 2. P. 621-1182. **4.** *Taflove A., Hagness S.G.* Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method. Boston-London: Artech House Inc., 2000. 852 p. **5.** *Gunupudi P.K., Khazaka R., Nakhla M.S., Smy T., Celo D.* Passive parameterized time-domain macromodels for high-speed transmission-line networks // IEEE Trans. on MTT. 2003. V. 51, N 12. P. 2347-2354. **6.** *Dounavis A., Achar R., Nakhla M.* A General Class of Passive Macromodels for Lossy Multiconductor Transmission Lines // IEEE Trans. On MTT. 2001. V. 49, N 10. P. 1686 – 1696. **7.** *Saraswat D., Achar R., Nakhla M.S.* Passive Reduction Algorithm for RLC Interconnect Circuits With Embedded State-Space Systems // IEEE Trans. on MTT. 2004. V. 52, N 9. P.2215-2226. **8.** *Antonini G.* A New Methodology for the Transient Analysis of Lossy and Dispersive Multiconductor Transmission Lines // IEEE Trans. on MTT. 2004. V. 52, N 9. P. 2227-2239. **9.** *Власенко Л.А., Руткас А.Г.* Переходные процессы в многопроводной линии передачи с сосредоточенными элементами на выходе. I. Линия без дисперсии // Радиоэлектроника и информатика. 2009. №1. С.9-15. **10.** *Бразма Н.А., Мышкис А.Д.* Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений // ПММ. 1951. Т. XV. С. 495-500. **11.** *Хаяси С.* Волны в линиях электропередачи. М.-Л.: ГЭИ, 1960. 343 с. **12.** *Каганов З.Г.* Электрические цепи с распределенными параметрами и цепные схемы. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с. **13.** *Paul C.R.* Analysis of Multiconductor Transmission Lines. New York: John Wiley Sons. Inc., 1994. **14.** *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. М.: Высшая школа. 1980. 152 с. **15.** *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, М.: ГИФМЛ. Т.IV, 1958. 812 с. **16.** *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии, 2006. 273 с.

Поступила в редколлегию 03.02.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Власенко Лариса Андреевна, д-р техн. наук, профессор кафедры математического моделирования и программного обеспечения Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Научные интересы: моделирование, дифференциальные уравнения. Адрес: Украина, 61004, Харьков, пл. Свободы, 4.

Руткас Анатолий Георгиевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой математического моделирования и программного обеспечения Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина, Научные интересы: моделирование, дифференциальные уравнения. Адрес: Украина, 61004, Харьков, пл. Свободы, 4.