УДК 62.506.2

Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ УНАРНЫХ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В статье средствами алгебры предикатов [1—5] описываются конечные предикаты второго и более высоких порядков. Пусть E — конечное множество (алфавит), содержащее в своем составе буквы $a_1, a_2, \ldots, a_p$; p — число всех букв алфавита E. Введем переменную X, называемую *переменным множеством*, областью изменения которой служит система всех подмножеств алфавита E. Каждому подмножеству A алфавита E можно поставить во взаимно однозначное соответствие булев вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ с помощью следующего правила: если буква a_i алфавита E принадлежит множеству A, то полагаем $\alpha_i = 1$, если не принадлежит, то полагаем $\alpha_i = 0$.

Формально векторную запись множества A определяем так:

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p), \tag{1}$$

где

$$\alpha_i = a_i \in A, \ (1 \leqslant i \leqslant p). \tag{2}$$

Иначе говоря,

$$A = (a_1 \in A, \ a_2 \in A, \ldots, a_p \in A). \tag{3}$$

Переменная X может быть записана в векторном виде $X = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ — булевы переменные. Подставляя вместо этих переменных булевы константы 0 или 1, получаем булев вектор, соответствующий тому или иному конкретному подмножеству алфавита E.

Переменное множество $X = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ может быть представлено средствами алгебры конечных предикатов в виде формулы

$$x \in X \underset{d}{\equiv} (\xi_1^1 x^{a_1} \vee \xi_2^1 x^{a_2} \vee \ldots \vee \xi_p^1 x^{a_p}) (\xi_1^0 \vee \xi_1^1)(\xi_2^0 \vee \xi_2^1) \ldots (\xi_p^0 \vee \xi_p^1). \qquad (4)$$

Здесь $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ — буквенные переменные, область изменения которых ограничена значениями 0 и 1. Выражение (4) можно рассматривать как запись переменного одноместного предиката первого порядка, зависящего от переменной x. Для формулы (4) будем использовать также сокращенную форму записи:

$$x \in X \underset{d}{\equiv} \xi_1 x^{a_1} \vee \xi_2 x^{a_2} \vee \ldots \vee \xi_p x^{a_p}, \qquad (5)$$

условно рассматривая символы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ как булевы переменные. Подставляя в формулу (5) конкретные значения булевых переменных $\xi_1 = \alpha_1, \xi_2 = \alpha_2, \ldots, \xi_p = \alpha_p$, получаем формальную запись фиксированного множества $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$:

$$x \in A \underset{d}{\equiv} \alpha_1 x^{a_1} \vee \alpha_2 x^{a_2} \vee \ldots \vee \alpha_p x^{a_p}. \qquad (6)$$

Например, пусть векторная запись множества A имеет вид $A = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, тогда $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_6 = \alpha_7 = \ldots = \alpha_p = 0$, $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1$, следовательно, $x \in A \equiv 0 \cdot x^{a_1} \vee 1 \times x^{a_2} \vee 0 \cdot x^{a_3} \vee 1 \cdot x^{a_4} \vee 1 \cdot x^{a_5} \vee 0 \cdot x^{a_6} \vee 0 \cdot x^{a_7} \vee \ldots \vee 0 \cdot x^{a_p} \equiv x^{a_2} \vee x^{a_4} \vee x^{a_5}$. Аналогично может быть совершен обратный переход от формульного представления множества букв к его векторному представлению.

Дополнение, объединение, пересечение, разность и симметрическая разность множеств $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ и $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ могут быть записаны в векторной форме:

$$\widetilde{A} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_p); \qquad (7)$$

$$A \cup B = (\alpha_1 \vee \beta_1, \alpha_2 \vee \beta_2, \ldots, \alpha_p \vee \beta_p); \qquad (8)$$

$$A \cap B = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \alpha_2 \wedge \beta_2, \ldots, \alpha_p \wedge \beta_p); \qquad (9)$$

$$A \setminus B = (\alpha_1 \bar{\beta}_1, \alpha_2 \bar{\beta}_2, \ldots, \alpha_p \bar{\beta}_p); \qquad (10)$$

$$A \dot{-} B = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \alpha_2 \oplus \beta_2, \ldots, \alpha_p \oplus \beta_p). \qquad (11)$$

Отношение равенства и отношение включения множеств букв $X = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ и $Y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ могут быть записаны в виде формул алгебры конечных предикатов:

$$X = Y \underset{d}{\equiv} (\xi_1^1 \sim \eta_1^1)(\xi_2^1 \sim \eta_2^1) \ldots (\xi_p^1 = \eta_p^1); \qquad (12)$$

$$X \subseteq Y \underset{d}{\equiv} (\xi_1^1 \supset \eta_1^1)(\xi_2^1 \supset \eta_2^1) \ldots (\xi_p^1 \supset \eta_p^1). \qquad (13)$$

Здесь символы ξ_i и η_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ обозначают буквенные переменные. Если же эти символы условно рассматривать как булевы переменные, то зависимости (12) и (13) могут быть представлены в более компактном виде:

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p) \underset{d}{\equiv} \bigwedge_{i=1}^{p} (\xi_i \sim \eta_i); \tag{14}$$

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) \subseteq (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p) \underset{d}{\equiv} \bigvee_{i=1}^{p} (\xi_i \supset \eta_i). \tag{15}$$

Рассмотрим примеры практического применения введенных зависимостей.

Пример 1. Доказать тождество $\widetilde{A \cap B} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$, где A и B — произвольные множества букв.

Решение. Записываем множества A и B в векторной форме $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$. Тогда

$$\widetilde{A \cap B} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B} \equiv (\overline{\alpha_1\beta_1}, \overline{\alpha_2 b_2}, \ldots, \overline{\alpha_p\beta_p}) = (\bar{\alpha}_1 \vee \bar{\beta}_1,$$
$$\bar{\alpha}_2 \vee \bar{\beta}_2, \ldots, \bar{\alpha}_p \vee \bar{\beta}_p) \equiv (\overline{\alpha_1\beta_1} \sim \bar{\alpha}_1 \vee \bar{\beta}_1)(\overline{\alpha_2\beta_2} \sim \bar{\alpha}_2 \vee$$
$$\vee \bar{\beta}_2) \ldots (\overline{\alpha_p\beta_p} \sim \bar{\alpha}_p \vee \bar{\beta}_p) \equiv 1.$$

Пример 2. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

Решение. Согласно условию $A \cap B \neq \varnothing \wedge A \cap C = \varnothing \wedge \wedge (A \cap B) \setminus C = \varnothing$. Полагаем $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$, $C = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$. Имеем

$$\overline{\alpha_1\beta_1 = 0 \wedge \alpha_2\beta_2 = 0 \wedge \ldots \wedge \alpha_p\beta_p = 0} \wedge \alpha_1\gamma_1 = 0 \wedge \alpha_2\gamma_2 =$$
$$= 0 \wedge \ldots \wedge \alpha_p\gamma_p = 0 \wedge \alpha_1\beta_1\bar{\gamma}_1 \wedge \alpha_2\beta_2\bar{\gamma}_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_p\beta_p\bar{\gamma}_p \equiv$$
$$\equiv (\alpha_1\beta_1 \vee \alpha_2\beta_2 \vee \ldots \vee \alpha_p\beta_p)(\bar{\alpha}_1 \vee \bar{\gamma}_1)(\bar{\alpha}_2 \vee \bar{\gamma}_2) \ldots (\bar{\alpha}_p \vee \bar{\gamma}_p) \times$$
$$\times (\bar{\alpha}_1 \vee \bar{\beta}_1 \vee \gamma_1)(\bar{\alpha}_2 \vee \bar{\beta}_2 \vee \gamma_2) \ldots (\bar{\alpha}_p \vee \bar{\beta}_p \vee \gamma_p) \equiv 0 = 1.$$

Получили противоречие. Следовательно, множества A, B, C с требуемыми свойствами не существуют.

Пример 3. Доказать, что $A \cup B \subseteq C \leftrightarrow A \subseteq C$ и $B \subseteq C$.

Решение. $A \cup B \subseteq C \sim A \subseteq C \wedge B \subseteq C \equiv (\alpha_1\beta_1 \supset \gamma_1)(\alpha_2\beta_2 \supset \gamma_2) \ldots$
$$\ldots (\alpha_p\beta_p \supset \gamma_p) \sim (\alpha_1 \supset \gamma_1)(\alpha_2 \supset \gamma_2) \ldots (\alpha_p \supset \gamma_p)(\beta_1 \supset \gamma_1)(\beta_2 \supset \gamma_2) \ldots$$
$$\ldots (\beta_p \supset \gamma_p) \equiv (\alpha_1\beta_1 \supset \gamma_1)(\alpha_2\beta_2 \supset \gamma_2) \ldots (\alpha_p\beta_p \supset \gamma_p) \sim (\alpha_1\beta_1 \supset \gamma_1)(\alpha_2\beta_2 \supset$$
$$\supset \gamma_2) \ldots (\alpha_p\beta_p \supset \gamma_p) \equiv 1.$$

Прежде чем переходить к следующему примеру, рассмотрим метод решения уравнений алгебры логики с буквенными параметрами. Пусть задано уравнение алгебры логики

$$f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 1. \tag{16}$$

Требуется решить это уравнение относительно пе ...о-однозначное
и выразить ее явно через параметры $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ...его правила:
вид функции $x = \varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ такой, что $f(\varphi(c_1, c_2$ ... 1, если не
$c_1, c_2, \ldots, c_n) = 1$. Предположим, что функция φ су... определяем
тогда $x = \varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n) \equiv x \sim \varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n) \equiv$
$c_2, \ldots, c_n) \vee x\varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 1$. С другой стороны, с... (26)
первому следствию теоремы о разложении, имеем $\bar{x}f(0, c_1,$
$c_n) \vee xf(1, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 1$. В силу единственности разло...

$$x = \varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \bar{f}(0, c_1, c_2, \ldots, c_n); \tag{27}$$

$$x = \varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n) = f(1, c_1, c_2, \ldots, c_n). \tag{28}$$

Область изменения значений параметров $c_1, c_2, \ldots, c_n$, для которой существует единственное решение $x = \varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, определяется уравнением

$$f(0, c_1, c_2, \ldots, c_n) \oplus f(1, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 1. \tag{19}$$

Пример 4. Задана система уравнений

$$A \setminus X = B; \; X \setminus A = C, \tag{а}$$

где A, B, C — известные, а X — неизвестное множество. При каких A, B, C система (а) имеет единственное решение?

Решение. Пусть множества A, B, C, X имеют в своей векторной записи компоненты α_i, β_i, γ_i, ξ_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Тогда условие примера может быть переписано в виде системы уравнений алгебры логики:

$$(\alpha_i \bar{\xi}_i \sim \beta_i)(\xi_i \bar{\alpha}_i \sim \gamma_i) = 1. \tag{б}$$

Находим область изменения параметров α_i β_i γ_i, в которой существует единственное решение для ξ_i: $(\alpha_i \cdot \bar{0} \sim \beta_i)(0 \cdot \bar{\alpha}_i \sim \gamma_i) \oplus (\alpha_i \cdot \bar{1} \sim \beta_i)(1 \cdot \bar{\alpha}_i \sim \sim \gamma_i) = 1$. После преобразований $(\bar{\beta}_i \vee \alpha_i) \wedge (\bar{\alpha}_i \vee \bar{\gamma}_i)$ или $\beta_i \supset \alpha_i = 1$ и $\alpha_i \gamma_i = 0$. Следовательно, система (а) имеет единственное решение, когда $B \subseteq A$ и $A \cap C = \varnothing$.

Пример 5. Для области изменения параметров A, B, C, найденной в предыдущем примере, найти решение системы (а).

Решение. По формуле (17) находим решение уравнения (б):

$$\xi_i = \overline{(\alpha_i \cdot \bar{0} \sim \beta_i)(0 \cdot \bar{\alpha}_i \sim \gamma_i)} = \alpha_i \bar{\beta}_i \vee \bar{\alpha}_i \beta_i \vee \gamma_i.$$

Полученное решение может быть записано в более экономном виде $\xi_i = \alpha_i \bar{\beta}_i \vee \gamma_i$, — если учесть, что $\beta_i \supset \alpha_i = 1$, т. е. $\bar{\alpha}_i \beta_i = 0$. Таким образом решение системы (а) имеет вид $X = (A \setminus B) \cap C$.

Рассмотрим теперь метод решения уравнений алгебры конечных предикатов с буквенными параметрами. Пусть задано уравнение алгебры конечных предикатов

$$P(x, c_1, c_2, \ldots, c_m) = 1. \tag{20}$$

Компоненты ξ_i вектора множества $X = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ всех решений уравнения (20) для переменной x могут быть определены по формуле

$$\xi_i = P(a_i, c_1, c_2, \ldots, c_m) \quad (1 \leqslant i \leqslant p). \tag{21}$$

Пример 6. Решить уравнение $(x^{a_1} \vee x^{a_2})\left(a_1^{c_1}x^{a_2} \vee x^{c_2}\right) = 1$.

Решение. Находим компоненты вектора множества всех решений X переменной x:

$$(a_1^{a_1} \vee a_1^{a_2})\left(a_1^{c_1}a_1^{a_2} \vee a_1^{c_2}\right) = a_1^{c_2};\ \xi_2 = (a_2^{a_1} \vee a_2^{a_2})\left(a_1^{c_1}a_2^{a_2} \vee a_2^{c_2}\right) =$$

$$= a_1^{c_1} \vee a_2^{c_2};\ \xi_3 = \ldots = \xi_p = 0.$$

$X = \left(a_1^{c_2},\ a_1^{c_1} \vee a_2^{c_2},\ 0, \ldots, 0\right)$. Пусть, к примеру, $c_1 = c_2 = a_1$. Тогда

$$X = \left(a_1^{a_1},\ a_1^{a_1} \vee a_2^{a_1},\ 0, \ldots, 0\right) = (1, 1, 0, \ldots, 0) = \{a_1, a_2\}.$$

Рассмотрим одноместные предикаты второго порядка. Пусть $X = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ — переменное множеств букв, задаваемое переменным одноместным предикатом первого порядка (4). Предикат второго порядка $P(X)$, аргументом которого является переменное множество X, представляет собой булеву функцию f от p переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$:

$$P(X) = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p). \tag{22}$$

Каждое уравнение алгебры логики

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = 1, \tag{23}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ — буквенные переменные, ограниченные булевыми значениями 0, 1;

$$\xi_i^0 \vee \xi_i^1 = 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant p), \tag{24}$$

совместно с уравнением

$$\xi_1^1 x^{a_1} \vee \xi_2^1 x^{a_2} \vee \ \ldots \ \vee \xi_p^1 x^{a_p} = 1 \tag{25}$$

задает некоторую систему Σ подмножеств X алфавита E ($X \in \Sigma$, $x \in X$), являющуюся результатом решения 1 системы уравнений (23), (24) относительно переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ и 2) уравнения (25) относительно переменной x при найденных значениях $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$.

Пример 7. Дано: $E = \{a_1, a_2, a_3\}$, $p = 3$. Определить систему Σ множеств $X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, компоненты ξ_1, ξ_2, ξ_3 векторов которых заданы уравнением $P(X) = \overline{\xi_2^1}\xi_1^1 \vee \overline{\xi_3^0}\xi_1^0$.

Решение. Уравнения (24) в данном случае запишутся в виде $\xi_1^0 \vee \xi_1^1 = 1$; $\xi_2^0 \vee \xi_2^1 = 1$; $\xi_3^0 \vee \xi_3^1 = 1$. Решая их совместно с заданным в условии уравнением, находим $\Sigma = \{(1, 0, \xi_3), (0, \xi_2, 1)\}$, где ξ_2, ξ_3 пробегают значения 0, 1. Таким образом, вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_2) принимает четыре значения из множества (0, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 1). Решая при найденных значениях ξ_1, ξ_2, ξ_3 уравнение (25), которое в данном случае принимает вид $\xi_1^1 x^{a_1} \vee \xi_2^1 x^{a_2} \vee \xi_3^1 x^{a_3} = 1$, окончательно получим $x \in X$; $X \in \Sigma$; $\Sigma = \{\{a_1\}, \{a_1, a_3\}, \{a_3\}, \{a_2, a_3\}\}$.

Введем теперь переменную S, называемую переменной системой множеств, областью изменений которой служит множество всех систем всех подмножеств алфавита E. С каждым подмножеством $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ алфавита E свяжем некоторый номер j, соответствующий двоичному коду $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p$. Каждой системе подмножеств Σ алфавита E поставим во взаимно-однозначное соответствие булев вектор $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2^p})$ с помощью следующего правила: если подмножество A_j принадлежит системе $\sum$, полагаем $\sigma_j = 1$, если не принадлежит — $\sigma_j = 0$. Формально векторную запись системы $\sum$ определяем следующим образом:

$$\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2^p}), \tag{26}$$

где

$$\sigma_j = A_i \in \Sigma \quad (1 \leqslant i \leqslant 2^p). \tag{27}$$

Иначе говоря, $\Sigma = \left(A_1 \in \Sigma,\ A_2 \in \Sigma,\ \ldots,\ A_{2^p} \in \Sigma\right).$ (28)

Переменная S может быть записана в векторном виде $S = (s_1, s_2, \ldots, s_{2^p})$, где $s_1, s_2, \ldots, s_{2^p}$ — булевы переменные. Подставляя вместо этих переменных булевы константы 0 или 1, получаем булев вектор, соответствующий той или иной конкретной системе подмножеств алфавита E.

Переменная система множеств $S = (s_1, s_2, \ldots, s_{2^p})$ может быть представлена средствами алгебры конечных предикатов в виде формулы

$$X \in S \underset{d}{\equiv} \Big(\bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)} s_j^1 \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_p^{\alpha_p} \Big) \left(s_1^0 \vee s_1^1\right) \left(s_2^0 \vee s_2^1\right) \ldots \left(s_{2^p}^0 \vee s_{2^p}^1\right). \tag{29}$$

Здесь $X = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ — переменное множество; $s_1, s_2, \ldots, s_{2^p}$ — буквенные переменные, область изменения которых ограничена значениями 0 и 1. Выражение (29) можно рассматривать как запись переменного одноместного предиката второго порядка, зависящего от переменной X. Для формулы (29) будем также использовать сокращенную форму записи:

$$X \in S \underset{d}{\equiv} \bigvee_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)} s_j \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_p^{\alpha_p}, \tag{30}$$

условно рассматривая символы $s_1, s_2, \ldots, s_{2^p}$ как булевы переменные. Заменяя в выражениях (29) и (30) переменные s_j булевыми константами, получаем формальную запись фиксированной системы подмножеств алфавита E. Дополнение, объединение, пересечение, разность и симметрическая разность систем множеств записываются на языке алгебры конечных предикатов так же, как представляются те же операции для множеств букв. Аналогично вводятся отношения равенства и включения систем множеств.

Рассмотрим одноместные предикаты третьего порядка. Пусть $S = (s_1, s_2, \ldots, s_{2^p})$ — переменная система множеств букв, задаваемая переменным одноместным предикатом второго порядка (29). Предикат третьего порядка $Q(S)$, аргументом которого является переменная система множеств S, представляет собой булеву функцию g от 2^p переменных $s_1, s_2, \ldots, s_{2^p}$:

$$Q(S) = g(s_1, s_2, \ldots, s_{2^p}). \tag{31}$$

Каждое уравнение алгебры логики

$$g(s_1, s_2, \ldots, s_{2^p}) = 1, \tag{32}$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_{2^p}$ — буквенные переменные, ограниченные булевыми значениями 0, 1,

$$s_j^0 \vee s_j^1 = 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant 2^p), \tag{33}$$

совместно с уравнениями (30), (24) и (25) задает некоторое множество систем подмножеств алфавита E.

Рассуждая аналогичным образом, можно описать средствами алгебры конечных предикатов одноместные предикаты произвольного конечного порядка.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* О теории интеллекта. — Проблемы бионики. Харьков, 1977, вып. 22, с. 15—22. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Об алгебре конечных предикатов. — АСУ и приборы автоматики. Харьков, 1977, вып. 52, с. 21—28. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Об алгебре предикатов с отрицанием.— АСУ и приборы автоматики. Харьков, 1977, вып. 52, с. 42—49. 4. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Об уравнениях теории интеллекта.— АСУ и приборы автоматики. Харьков, 1977, вып. 53, с. 63—70. 5. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Математическое описание конечных логических объектов.— Проблемы бионики. Харьков, 1977, вып. 23, с. 11—18.

УДК 519.766.2