УДК 621.391:51.142

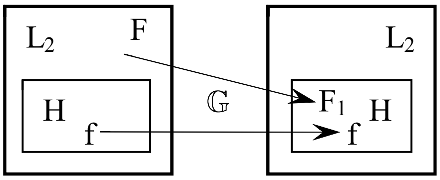
ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА С ВОСПРОИЗВОДЯЩИМИ ЯДРАМИ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

ЧУМАЧЕНКО С.В.

Развивается подход к суммированию рядов в ГПВЯ. Путем доказательства трех теорем, имеющих теоретическое и практическое значение, определяются новые результаты для суммирования одного знакопеременного ряда, решения сумматорного и интегрального уравнений.

1. Введение

Гильбертовы пространства с воспроизводящими ядрами (ГПВЯ) являются подпространствами гильбертовых пространств: $H \subseteq L_2$. Методы ГПВЯ применяются при решении важных практических задач теории связи, теории информации, радиоэлектроники и оптики, где используются модели сигналов с финитным спектром. С их помощью могут быть получены полезные математические результаты, отражающие свойства реальных систем. Основные положения теории ГПВЯ рассмотрены в [1]. Подход к определению неизвестных амплитудных коэффициентов поля при расчете антенных решеток на основе методов ГПВЯ развивается в [2-4]. Новые результаты применительно к суммированию рядов приведены в [5]. В [6] предлагается анализ моделей пространств, наиболее часто используемых в научных исследованиях. Он позволяет классифицировать их по направлениям: историко-временному развитию, многообразию моделей, определяемых их характеристическими свойствами. Классификация не претендует на полноту, но позволяет в совокупности определить палитру используемых типов при выполнении научных исследований. Известно, что для каждого ГПВЯ H существует оператор $\mathbb{G}$, который оставляет без изменения функцию из ГПВЯ, а любую функцию из гильбертова пространства L_2 переводит в функцию из ГПВЯ (рисунок).



Например, функции с финитными спектрами косинус- и синус- преобразований, а также Ганкеля образуют ГПВЯ.

Метод, использующий одну из моделей существующих в математике пространств, который уменьшает временные и материальные затраты на разработку конкретной научно-технической проблемы, всегда *актуален*. Таким является метод суммирования рядов в ГПВЯ.

Цель настоящей статьи – доказательство основных теоретических положений, связанных с методом суммирования рядов в ГПВЯ, и их практическая ориентация.

Задачи исследования:

1. Доказать теорему, определяющую сумму ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\alpha-k\pi)^p}, p=1,2,3,\ldots$, в ГПВЯ.

2. Найти решение сумматорного уравнения $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{ip_m y}=0$ относительно неизвестных коэффициентов B_m.

3. Найти решение интегрального уравнения $\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(\mu)\exp(ikx\mu)d\mu=0$, $|x|>a$.

2. Теоретическое обоснование

Теория ГПВЯ базируется на следующей теореме и следствии из нее [**1**, с.144-145].

Теорема 1. *Пусть имеется абстрактное гильбертово пространство* H *с воспроизводящим ядром* $K(s,t)$, *определенным на множестве* T. *Пусть* $\{\varphi_i(s,t_i)\}$, $t_i \in T$ – *полная ортонормированная система в* H. *Если существуют ненулевые вещественные постоянные* c_i *такие, что*

$$\varphi_i(s,t_i)=c_i K(s,t_i),\ |K(t,t)|\le c_i<\infty,\ t\in T,$$

то разложение по полной ортонормированной системе для любой $f\in A$, *имеющее вид*

$$f(s)=\sum a_i\varphi_i(s,t_i),\ s\in T,\ a_i=(f,\varphi_i),$$

является рядом по выборочным значениям.

Теорема 1 устанавливает связь между разложениями по полной ортонормированной системе и по выборочным значениям в ГПВЯ.

Следствие. *В ГПВЯ* H *любая функция* $f\in H$ *разлагается в ряд по выборочным значениям*

$$f(s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\frac{\sin\pi(s-k)}{\pi(s-k)},\ -\infty<s<\infty. \quad (1)$$

Рассмотрим примеры на применение следствия.

Пример 1. Вычислить ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\alpha-k\pi)^2}$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\alpha-k\pi)^2}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(b-k)^2}\Bigg|_{b=\alpha/\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\cos\pi k\frac{\cos\pi k\cos\pi k\sin\pi b\sin\pi b}{(b-k)^2\sin^2\pi b}\Bigg|_{b=\alpha/\pi}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos k\pi}{\sin^2\pi b}\frac{\sin\pi(b-k)}{\pi(b-k)}\frac{\sin\pi(b-k)}{\pi(b-k)}\Bigg|_{b=\alpha/\pi}=$$

$$=\frac{\cos\pi b}{\sin^2\pi b}\bigg|_{b=\alpha/\pi}=\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Полученный результат совпадает с [**7**, с. 187].

Пример 2. Вычислить ряд $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-m}$:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\pi\cos\pi m(\sin\pi z\cos\pi m)}{\pi(z-m)\sin\pi z}=$$

$$=\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi m}{\sin\pi z}\frac{\sin\pi(z-m)}{\pi(z-m)}=\pi\frac{\cos\pi m}{\sin\pi z}\bigg|_{m=z}=\pi\mathrm{ctg}\pi z.$$

Полученный результат совпадает с [**8**, с. 23].

Используя следствие, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Для билатерального знакопеременного ряда* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\alpha-k\pi)^p}, p=1,2,3,...$ *в ГПВЯ* H *имеет место следующая формула суммирования*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\alpha-k\pi)^p}=\begin{cases}\frac{1}{\sin^p\alpha}, p=2n-1, n=1,2,3,...;\\ \frac{\cos\alpha}{\sin^p\alpha}, p=2n, n=1,2,3,...\end{cases}\qquad(2)$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\alpha-k\pi)^p}$. Будем определять его сумму при натуральных значениях параметра p.

При $p=1$ имеем:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha-k\pi}=[b=\alpha/\pi]=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{b-k}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi k}{b-k}\frac{\sin\pi b}{\sin\pi b}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi(b-k)}{\pi(b-k)\sin\pi b}=$$

$$=\frac{1}{\sin\pi b}\bigg|_{b=\alpha/\pi}=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

При $p=2$ результат получен в примере 1:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\alpha-k\pi)^2}=\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

При $p=3$ имеем:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\alpha-k\pi)^3}=\frac{1}{\pi^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(b-k)^3}=[b=\alpha/\pi]=$$

$$=\frac{1}{\pi^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(b-k)^3}\frac{\cos^3\pi k\sin^3\pi b}{\sin^3\pi b}=$$

$$=\frac{1}{\sin^3\pi b}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3\pi(b-k)}{\pi^3(b-k)^3}=$$

$$=\frac{1}{\sin^3\pi b}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\pi(b-k)}{\pi^2(b-k)^2}\frac{\sin\pi(b-k)}{\pi(b-k)}=$$

$$=\frac{1}{\sin^3\pi b}\frac{\sin^2\pi(b-k)}{\pi^2(b-k)^2}\bigg|_{k=b=\alpha/\pi}=\frac{1}{\sin^3\alpha}.$$

При $p=4$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\alpha-k\pi)^4}=[b=\alpha/\pi]=$$

$$=\frac{1}{\pi^4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi k}{(b-k)^4}\frac{\cos^4\pi k\sin^4\pi b}{\sin^4\pi b}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi k}{\sin^4\pi b}\left[\frac{\sin\pi(b-k)}{\pi(b-k)}\right]^4=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi k}{\sin^4\pi b}\left[\frac{\sin\pi(b-k)}{\pi(b-k)}\right]^3\frac{\sin\pi(b-k)}{\pi(b-k)}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos\pi k}{\sin^4\pi b}\left[\frac{\sin\pi(b-k)}{\pi(b-k)}\right]^3\frac{\sin\pi(b-k)}{\pi(b-k)}=$$

$$=\frac{\cos\pi k}{\sin^4\pi b}\left[\frac{\sin\pi(b-k)}{\pi(b-k)}\right]^3\bigg|_{k=b=\alpha/\pi}=\frac{\cos\alpha}{\sin^4\alpha}.$$

Нетрудно убедиться, что при $p=2n-1$ имеем формулу:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\alpha-k\pi)^{2n-1}}=\frac{1}{\sin^{2n-1}\alpha},\ n=1,2,3,...,\qquad(3)$$

а при $p=2n$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\alpha-k\pi)^{2n}}=\frac{\cos\alpha}{\sin^{2n}\alpha},\ n=1,2,3,....\qquad(4)$$

Теорема 2 доказана.

Докажем следующие две теоремы, которые могут быть использованы при решении целого ряда важных для практики задач.

Теорема 3. *Решением сумматорного уравнения вида*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}B_m e^{ip_m y}=0,\ l/2\le|y|\le d/2,\qquad(5)$$

где p_m, γ_m, d, λ *– заданные параметры, является*

$$B_m=\frac{1}{m}J_{2kd+1}(m\alpha),\qquad(6)$$

здесь kd ($0<kd<\infty$), α *– известные величины.*

Доказательство. Будем искать неизвестные коэффициенты B_m в виде ряда [10]:

$$B_m=\frac{1}{m}\sum_{s=0}^{\infty}x_s J_{2s+1}(m\alpha),\qquad(7)$$

где x_s – новые неизвестные коэффициенты, $J_{2s+1}(m\alpha)$ – функции Бесселя. Покажем, что (7) превращает уравнение (5) в истинное равенство. Для этого подставим (7) в (5):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ip_m y} \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{\infty} x_s J_{2s+1}(m\alpha) = 0, \; l/2 \le |y| \le d/2 \quad . (8)$$

В (8) изменим порядок суммирования:

$$\sum_{s=0}^{\infty} x_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ip_m y} \frac{1}{m} J_{2s+1}(m\alpha) = 0, \; l/2 \le |y| \le d/2 \quad . (9)$$

Введем обозначение:

$$M_s(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} J_{2s+1}(m\alpha) e^{im\alpha\xi}, \qquad (10)$$

где $\alpha = \pi l / d$, $\xi = 2y / l$.

Подставим (10) в (9):

$$\sum_{s=0}^{\infty} x_s M_s(\xi) = 0, \; |\xi| > 1. \qquad (11)$$

Покажем, что (11) верно. Для этого докажем, что сумма ряда (10) равна нулю, т.е. $M_s(\xi) = 0$. С этой целью воспользуемся известным представлением бесселевых функций [11]:

$$\frac{1}{m} J_{2s+1}(m\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z} J_{2s+1}(\alpha z) \frac{\sin\alpha(z-m)}{z-m} dz \qquad (12)$$

и равенством, определяющим сумму следующего билатерального ряда [12]:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ip_m y} \frac{\sin\alpha(z-m)}{z-m} = \pi e^{ip_z y} \quad . \qquad (13)$$

Подставим (12) в (10):

$$M_s(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\alpha\xi} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z} J_{2s+1}(\alpha z) \frac{\sin\alpha(z-m)}{z-m} dz =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z} J_{2s+1}(\alpha z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\alpha\xi} \frac{\sin\alpha(z-m)}{z-m} dz \quad . (14)$$

Из (14) с учетом (13) имеем:

$$M_s(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z} J_{2s+1}(\alpha z) \pi e^{iz\alpha\xi} dz,$$

или $$M_s(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z} J_{2s+1}(\alpha z) e^{iz\alpha\xi} dz, \qquad (15)$$

где $\alpha\xi = \frac{2\pi}{d} y$.

Далее воспользуемся представлением [**13**, с. 185, ф-ла (11)]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{ipx} J_n(cx) dx = -\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{2i^{n-1}}{nc} \sqrt{c^2 - p^2}\, U_{n-1}\left(\frac{p}{c}\right),$$
$$\begin{Bmatrix} -c < p < c \\ |p| > c \end{Bmatrix}, \qquad (16)$$

где $U_{n-1}(\frac{p}{c})$ – полином Чебышева 2-го рода [14, с.209]: $U_n(t) = \sin(n \arccos t)$.

Согласно (16), $M_s(\xi) = 0$.

Принимая во внимание (16), видим, что уравнение (11) удовлетворяется при любом конечном и не равном нулю x_s. Представим коэффициенты x_s в виде:

$$x_s = \frac{\varepsilon_s kd}{(s+kd)} \frac{\sin\pi(kd-s)}{\pi(kd-s)}, \qquad (17)$$

где kd – известный параметр, ε_s – число Неймана. Подставим (17) в (7):

$$B_m = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_s kd}{(s+kd)} \frac{\sin\pi(kd-s)}{\pi(kd-s)} J_{2s+1}(m\alpha) \quad . (18)$$

Согласно [1], из (18) следует выражение (6) для коэффициентов B_m. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Решением интегрального уравнения*

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\mu) \exp(ikx\mu) d\mu = 0, \; |x| > a \qquad (19)$$

является функция

$$P(\mu) = \frac{A}{\mu} J_{2ka+1}(ka\mu), \qquad (20)$$

где k, a *– известные величины*, A *– произвольная постоянная.*

Доказательство. Будем искать функцию $P(\mu)$ в виде ряда:

$$P(\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{\mu} J_{2m+1}(ka\mu), \qquad (21)$$

здесь C_m – неизвестные коэффициенты. Подставим (21) в (19):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx\mu) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{\mu} J_{2m+1}(ka\mu) \right] d\mu = 0, \; |x| > a . (22)$$

Изменим порядок интегрирования и суммирования в (22):

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu} J_{2m+1}(ka\mu) \exp(ikx\mu) d\mu = 0 . \quad (23)$$

Согласно [13, с. 185, ф-ла (11)] интеграл в (23) равен нулю при любом значении m, следовательно, (23) выполняется для любого C_m. Будем искать коэффициенты C_m в виде:

$$C_m = A \frac{\varepsilon_m ka}{(ka+m)} \frac{\sin\pi(ka-m)}{\pi(ka-m)} . \qquad (24)$$

Подставим (24) в (21):

$$P(\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A}{\mu} \frac{\varepsilon_m ka}{(ka+m)} \frac{\sin\pi(ka-m)}{\pi(ka-m)} J_{2m+1}(ka\mu) . (25)$$

Согласно [1, с. 145] из (25) имеем выражение (20). Теорема 4 доказана.

Уравнение вида (19) встречается в задаче дифракции электромагнитных волн на плоском проводящем экране со щелью [15]. Аналогичное уравнение решается в задаче о нормальном падении H-поляризованной волны на полосу шириной 2a [16, с 644]. Интегральное уравнение (19) встречается также при решении задачи дифракции электромагнитной волны на структуре из конечного числа неэквидистантно расположенных лент различной ширины [17].

Сумматорное уравнение вида (5) появляется, в частности, при решении задач: о нормальном падении плоской E-поляризованной электромагнитной волны на решетку, состоящую из тонких идеально проводящих бесконечно длинных металлических лент [9, 18], о возбуждении кольцевого волновода диполем [19], об излучении электромагнитной волны электронным потоком, движущимся внутри кольцевого волновода [20].

3. Результаты и выводы

Таким образом, проведенные исследования позволили получить следующие *новые результаты*, имеющие *научное и практическое значение*:

– путем доказательства теоремы 2 определена сумма знакопеременного билатерального ряда, которая выражается формулой (2); в известной литературе для него даны только частные случаи [7];

– найдено решение сумматорного уравнения (5) относительно неизвестных коэффициентов, определяющих искомое поле в задачах теории дифракции;

– найдено решение интегрального уравнения (19), которое представляет интерес для ряда важных задач электродинамики.

Практическая значимость результатов работы определяется возможностью их использования в математическом аппарате при решении указанных выше задач. *Практическая ценность* исследований заключается в:

– применении предлагаемого метода суммирования рядов по выборочным значениям при синтезе и анализе устройств вычислительной техники и радиоэлектроники;

– многократной экономии стоимости расчетов вследствие ускорения вычисления рядов определенного типа;

– возможности аппаратурной реализации методов, что позволяет повысить быстродействие вычислительных процессов.

На основе приведенных результатов можно сделать следующие *выводы*.

1) Метод суммирования рядов в ГПВЯ можно использовать для определения сумм избранных рядов.

2) Преимущества названного метода заключаются в: применении эквивалентных преобразований к общему члену ряда, что позволяет аналитически получить решение за меньшее количество шагов; отсутствии необходимости использовать таблицы интегральных преобразований и обращаться к интегрированию в комплексной области.

3) Применение известных результатов теории ГПВЯ для решения граничных электродинамических задач дает возможность упрощать известные методы и получать на их основе аналитическое решение, удобное для дальнейшего численного анализа.

4) Путем доказательства теорем могут быть получены новые математические результаты для суммирования рядов.

Литература: 1. *Функции* с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике: Пер. М.К. Размахнина и В.П. Яковлева. М.: Сов. радио, 1971. 256с. **2.** *Чумаченко В.С., Чумаченко С.В.* Синфазне збудження решітки, утвореної плоскими напівобмеженими хвилеводами / / Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 2. С. 15-18. **3.** *Чумаченко С.В.* Возбуждение решетки с диэлектрической пластиной // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №3. С. 14-17. **4.** *Чумаченко С.В.* Возбуждение фазированной антенной решетки сложной структуры // Радиоэлектроника и информатика. 2003. №1. С.10-14. **5.** *Chumachenko S.V.* Summation method of selected series for IP-core design // Радиоэлектроника и информатика. 2003. №3. С. 197-203. **6.** *Хаханов В.И., Чумаченко С.В.* Модели пространств в научных исследованиях // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №1. С. 124-132. **7.** *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с. **8.** *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 344 с. **9.** *Шестопалов В.П.* Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 400с. **10.** *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье: Пер. с англ. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 480с. **11.** *Hönl H. Maue A.W., Westpfahl K.* Theorie der Beugung. Springer-Verlag. Berlin, 1961. **12.** *Veliev E.I., Oksasoglu A.* Bessel functions series in two dimensional diffraction problems / J. of Electromagnetic and Applications. 1996. Vol. 10, N4. P. 493-507. **13.** *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800с. **14.** *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М.: Высш. шк., 1965. 424 с. **15.** *Лебедев Н.Н., Скальская И.П.* Применение парных интегральных уравнений к задаче дифракции электромагнитных волн на плоском проводящем экране со щелью // ЖТФ. Ленинград: Наука, 1972. T.XLI. Вып. 7. С.1329-1339. **16.** *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики: Пер. с англ. М.: Наука, 1970. 856 с. **17.** *Воробьев С.Н., Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л.* Дифракция электромагнитной волны на структуре из конечного числа неэквидистантно расположенных лент различной ширины. Сравнение спектрального и операторного методов // Радиофизика и радиоастрономия, 1996. Т.1, №1. С. 110-118. **18.** *Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г.* Дифракция волн на решетках. Изд-во Харьк. ун-та, 1973. 288 с. **19.** *Марченко В.А., Сологуб В.Г.* Возбуждение кольцевого волновода диполем // Радиотехника, 1965. Вып. I. С. 3-13. **20.** *Третьякова С.С., Третьяков О.А., Шестопалов В.П.* Известия вузов. Радиофизика. 1965. T.VIII, №3. С.552-560.

Поступила в редколлегию 12.10.2003

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Хаханов В.И.

Чумаченко Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: математическая физика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-326.