УДК 517.957: 517.988.8 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.178

МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ, ЯКІ МОДЕЛЮЮТЬ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНІ СИСТЕМИ

Гвоздєв М.І.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
e-mail: mykyta.hvozdev@nure.ua

The paper considers a microelectromechanical system, the mathematical model of which is the Navier problem for a fourth-order semilinear equation. To find its numerical solution, a method of two-sided approximations based on the use of the Green's function is proposed.

Мікроелектромеханічні системи з електростатичним керуванням (МЕМС) є мікроскопічними пристроями, що поєднують механічні та електростатичні ефекти. Типова МЕМС – це пристрій, що складається з жорсткої провідної заземленої пластинки, над якою підвішена затиснута деформівна мембрана, що покрита тонкою провідною плівкою. Якщо прикладсти різницю напруг, то це викликає кулонівську силу, яка, у свою чергу, приводить до зміщення мембрани. Особливістю цих пристроїв є те, що коли прикладена напруга перевищує певне порогове значення, мембрана може зіпсуватися або торкнутися пластини заземлення. Управління появою цього явища має надзвичайно практичне значення при розробці МЕМС або для встановлення оптимальних умов роботи та для уникнення пошкодження пристрою. Дослідження таких процесів можна проводити методом математичного моделювання. Нехай мембрана має форму Ω. Якщо не нехтувати згином і краї мембрани вільно закріплені, то для визначення прогину ми приходимо до наступної крайової задачі Нав'є для напівлінійного рівняння четвертого порядку еліптичного типу [1]:

$$B\Delta^2 u - T\Delta u = \frac{\lambda}{(1-u)^2},\ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$0 < u(\mathbf{x}) < 1,\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{2}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \Delta u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

У моделі (1) – (3) члени $B\Delta^2 u$ і $-T\Delta u$ обумовлені згином та розтягом мембрани, а член $\dfrac{\lambda}{(1-u)^2}$ відображає дію електростатичних сил; параметр λ є пропорційним квадрату прикладеної напруги.

Зведемо задачу (1) – (3) до системи диференціальних рівнянь з частинними похідними. Покладемо $u_1 = u,\ u_2 = -\Delta u$. Тоді задача (1) – (3) набуде вигляду:

$$-\Delta u_1 = u_2,\ -B\Delta u_2 + Tu_2 = \frac{\lambda}{(1-u_1)^2},\ \mathbf{x}\in\Omega, \tag{4}$$

$$u_1\big|_{\partial\Omega} = u_2\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5}$$

Для побудови двобічних наближень до додатного розв'язку задачі (4), (5) скористаємося методами нелінійного аналізу у банахових просторах [2] та методом, викладеним у [3].

Задача (4), (5) еквівалентна системі інтегральних рівнянь Гаммерштейна:

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_\Omega G_1(\mathbf{x},\mathbf{s})u_2(\mathbf{s})d\mathbf{s},\ u_2(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{B}\int_\Omega \frac{G_2(\mathbf{x},\mathbf{s})}{(1-u_1(\mathbf{s}))^2}d\mathbf{s}, \tag{6}$$

де $G_1(\mathbf{x},\mathbf{s})$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$, а $G_2(\mathbf{x},\mathbf{s})$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta u + \kappa u$, $\kappa = \dfrac{T}{B}$.

Систему рівнянь (6) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\bar\Omega)\times C(\bar\Omega)$, який напівупорядковано конусом K_+ невід'ємних функцій. Інтегральний оператор, що визначається правою частиною рівнянь (6), є ізотонним. Якщо він має інваріантний конусний відрізок $<(v_{1,0},v_{2,0}),(w_{1,0},w_{2,0})>$, то можна утворити ітераційний процес:

$$v_1^{(k)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G_1(\mathbf{x},\mathbf{s})v_2^{(k-1)}(\mathbf{s})d\mathbf{s},\ v_2^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{B}\int_\Omega \frac{G_2(\mathbf{x},\mathbf{s})}{(1-v_1^{(k-1)}(\mathbf{s}))^2}d\mathbf{s},\ k=1,2,...,$$

$$w_1^{(k)}(\mathbf{x}) = \int_\Omega G_1(\mathbf{x},\mathbf{s})w_2^{(k-1)}(\mathbf{s})d\mathbf{s},\ w_2^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{B}\int_\Omega \frac{G_2(\mathbf{x},\mathbf{s})}{(1-w_1^{(k-1)}(\mathbf{s}))^2}d\mathbf{s},\ k=1,2,...,$$

$$v_1^0(\mathbf{x}) = v_{1,0}(\mathbf{x}),\ v_2^0(\mathbf{x}) = v_{2,0}(\mathbf{x}),\ w_1^0(\mathbf{x}) = w_{1,0}(\mathbf{x}),\ w_2^0(\mathbf{x}) = w_{2,0}(\mathbf{x}),$$

який у випадку збіжності збігатиметься двобічно до єдиного на конусному відрізку $<(v_{1,0},v_{2,0}),(w_{1,0},w_{2,0})>$ додатного розв'язку крайової задачі (4) – (6) (буква w позначає послідовність верхніх функцій, а v – нижніх).

Список використаних джерел:

1. Laurençot P., Walker C. A fourth-order model for MEMS with clamped boundary conditions. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 2014. Vol. 109. № 6. P. 1435–1464.

2. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 272 с.

3. Сидоров М. В. Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної задачі Нав'є. *Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2017. Вип. 34. С. 58–66.