

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ _____ ” _____ 2021 р.

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Шабанову Іллі Валентиновичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Математична модель та метод метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів

затверджена наказом по університету від 05 листопада 2021 р. № 1642 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2021 р.

3. Вихідні дані до роботи Координати місцеположення в глобальній системі координат. Результати вимірювань погрешностей оцінок результування платформи $(\alpha_x, \alpha_z, \alpha_y)$ та її прив'язці к місцевому меридіану. Результати прямих вимірювань параметрів траєкторії повітряного об'єкта в місцевій сферичній системі координат (α_p, β_p, D_p) . Апріорне значення статистичних властивостей параметрів прямих вимірювань $\sigma_{\alpha_i}^2, \sigma_{\beta_i}^2, \sigma_{D_i}^2$

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (слайдів) _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	8 – 14 листопада 2021 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	15 – 21 листопада 2021 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	22 – 28 листопада 2021 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	29 листопада – 5 грудня 2021 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	6 – 9 грудня 2021 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 грудня 2021 р.	виконано

Дата видачі завдання 8 листопада 2021 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Тевяшев А.Д.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 58 с., 9 табл., 12 рис., 1 дод., 5 джерел.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ, МЕТРОЛОГІЧНА АТЕСТАЦІЯ, ТРАЄКТОРІЯ ПОВІТРЯНИХ ОБ'ЄКТІВ.

Об'єкт дослідження – процес оцінювання статистичних властивостей параметрів стану повітряного об'єкта на основі статистичних властивостей прямих та непрямих вимірювань параметрів траєкторії повітряного об'єкта.

Предмет дослідження – математична модель та метод метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів.

Методи дослідження – метод статистичної лінеаризації нелінійних функція випадкових аргументів, методи перетворення координат, методи статистичного моделювання.

Метрологічна атестація параметрів траєкторії повітряних об'єктів – це метод оцінювання статистичних властивостей параметрів траєкторії (залежних змінних) від статистичних властивостей прямих та непрямих вимірювань (незалежних змінних).

В роботі розглянута та проаналізована модель траєкторії руху повітряного об'єкта в місцевій сферичній системі координат та метод метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів в декартовій системі координат. Розроблений метод дозволяє оцінити статистичні властивості (математичне очікування та дисперсія) просторових координат повітряного об'єкта в декартовій системі координат для кожного моменту часу в залежності від статистичних властивостей непрямих вимірювань кутів горизонтування платформи оптико-електронної станції $(\alpha_x, \alpha_z, \alpha_y)$ та параметрів траєкторії повітряного об'єкта в сферичній системі координат (α_t, β_t, D_t) , $t = \overline{1, T}$.

ABSTRACT

Introductory note: 58 pages, 9 tables, 12 figures, 1 appendix, 5 sources.

MATHEMATICAL MODEL, RECTANGULAR COORDINATE SYSTEM,
METROLOGICAL CERTIFICATION, AIR TRAJECTION TRAIL.

Object of research – the process of evaluating the statistical properties of the parameters of the state of the air object on the basis of statistical properties of direct and indirect measurements of the parameters of the trajectory of the air object.

The subject of research is a mathematical model and method of metrological certification of the parameters of the trajectory of air objects.

Research methods – the method of statistical linearization of nonlinear functions of random arguments, methods of coordinate transformation, methods of statistical modeling.

Metrological attestation of trajectory parameters of air objects is a method of estimating statistical properties of trajectory parameters (dependent variables) from statistical properties of direct and indirect measurements (independent variables).

The paper considers and analyzes the model of the trajectory of an air object in the local spherical coordinate system and the method of metrological certification of the parameters of the trajectory of air objects in the Cartesian coordinate system. The developed method allows to estimate statistical properties (mathematical expectation and variance) of spatial coordinates of air object in Cartesian coordinate system for each moment of time depending on statistical properties of indirect measurements of leveling angles of optoelectronic station platform $(\alpha_x, \alpha_z, \alpha_y)$ and air trajectory parameters. object in a spherical coordinate system (α_t, β_t, D_t) , $t = \overline{1, T}$.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Системний аналіз проблеми метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів та постановка задач дослідження	9
1.1 Системний аналіз проблеми метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів	9
1.1.1 Актуальність проблеми	9
1.1.2 Вербальна модель системи	9
1.1.3 Морфологічний опис системи	10
1.1.4 Функціональна модель системи	10
1.1.5 Інформаційна модель системи	12
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів	12
1.2.1 Модель аналізу проблеми	12
1.2.2 Оцінювання вектору пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	14
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	20
1.3.1 Змістовна постановка задачі	20
1.3.2 Формальна постановка задачі	21
1.4 Постановка задач дослідження	21
2 Математична модель та метод метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів	22
2.1 Стохастична модель визначення координат місця розташування ПО методом відкритого моніторингу повітряного простору мережею ОЕС .	22
2.2 Метод аналізу інструментальних похибок вимірювання параметрів траєкторій руху літальних апаратів оптико-електронними станціями	26
2.3 Метод аналізу випадкових похибок вимірювання параметрів траєкторій руху повітряних об'єктів оптико-електронними станціями	40

3 Програмна реалізація	43
4 Результати обчислювального експерименту	48
Висновки	55
Перелік джерел посилання	56
Додаток А Лістинг програми	57

ВСТУП

Актуальність теми. Ефективне оцінювання траєкторії повітряних об'єктів, та їх метрологічна атестація є важливими задачами потребуючими сучасних засобів та інструментів для їх вирішення. Відстеження цілей у тривимірному просторі це важлива та цікава проблема яка зустріла людство ще за часів перших спроб визначення орбіти планет. Зараз проблема відстеження та оцінювання параметрів траєкторії літальних об'єктів є дуже поширеною через різноманітні цивільні літальні засоби, такі як дрони, квадрокоптери, літаки та гелікоптери на радіоуправлінні.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є вирішення актуальної проблеми метрологічної атестації оптико-електронної станції траєкторних вимірювань. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «метрологічна атестація параметрів траєкторії повітряних об'єктів»;

– розробити стохастичну модель визначення координат місця розташування ПО методом відкритого моніторингу повітряного простору мережею ОЕС;

– розробити метод аналізу інструментальних похибок вимірювання параметрів траєкторій руху літальних апаратів оптико-електронними станціями;

– розробити метод аналізу випадкових похибок вимірювання параметрів траєкторій руху повітряних об'єктів оптико-електронними станціями;

– здійснити програмну реалізацію розробленого методу.

Об'єктом дослідження є процес зовнішніх траєкторних змін.

Предметом дослідження є математична модель та метод метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються методи аналізу інструментальних та випадкових похибок.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ МЕТРОЛОГІЧНОЇ АТЕСТАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ ТРАЄКТОРІЇ ПОВІТРЯНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів

1.1.1 Актуальність проблеми

Проблема метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів за допомогою оцінювання статистичних властивостей параметрів стану повітряного об'єкта на основі статистичних властивостей прямих та непрямих вимірювань параметрів траєкторії повітряного об'єкта була та залишається надзвичайно актуальною. Для того щоб вирішити цю проблему, проводяться випробування на полігонах з використанням сучасних оптико-електронних станцій (ОЕС), що забезпечують видачу координат повітряних об'єктів з дуже високою точністю. У кожен момент часу, ОЕС вимірює три параметри: азимут, кут місця та кут дальності. Задля проведення різноманітних льотних експериментів та забезпечення інформацією про траєкторії кожна ОЕС може бути використана автономно.

1.1.2 Вербальна модель системи

Об'єкт аналізу – процес зовнішніх траєкторних змін засобами лазерної оптико-електронної станції.

Предмет дослідження – математична модель та метод метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів

Точка зору: дослідник.

В результаті вимірювань нам потрібно отримати оцінку параметрів траєкторії повітряного об'єкта за умов похибок вимірювання. Вхідні данні системи поступають у вигляді координат літального апарату.

1.1.3 Морфологічний опис системи

Зовнішнє середовище – сукупність об'єктів за межами системи, зміна властивостей яких впливають на систему, а також тих об'єктів, чії властивості змінюються через поведінку системи.

За для опису функціонування моделі із зовнішнім середовищем на рис. 1.1 представлена модель типу «чорний ящик».

Ця модель включає моделі границі, модель зовнішнього середовища, входи і виходи.

Входи системи – це частіше всього ресурсний вплив зовнішнього середовища, а виходи системи – це цільовий продукт системи.

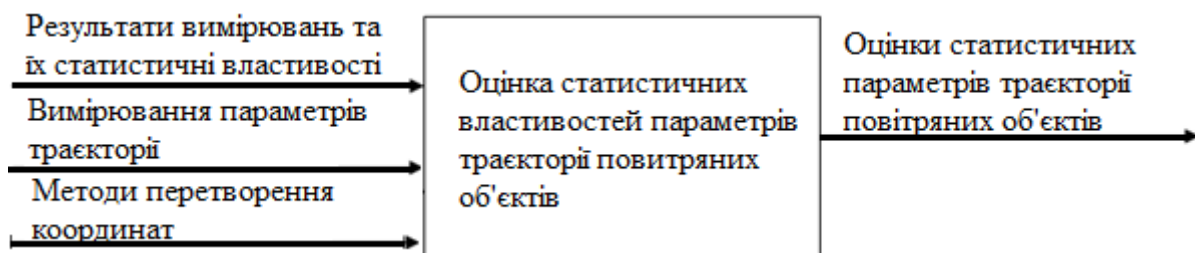


Рисунок 1.1 – Модель системи типу «чорний ящик»

1.1.4 Функціональна модель системи

Під час формулювання логіки та взаємодії процесів за для вирішення задачі метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряного об'єкту, використаємо засоби графічної нотації бізнес-процесів IDEF0, що дозволяють побачити ієрархію основних елементів побудови системи вирішення задач.

Верхнім рівнем моделювання системи в IDEF0 є рівень визначення контексту, тобто найбільш абстрактного рівня опису системи в цілому.

В контекст входить визначення суб'єкта моделювання, цілі і точка зору на модель. Для даної задачі:

- точка зору – дослідник;
- суб'єкт – данні траєкторії руху об'єкту із похибкою;
- ціль – метрологічна атестація параметрів траєкторії.

Діаграма IDEF0 зображує функціонування системи (рис. 1.2). Головною задачею є визначення реальної траєкторії руху об'єкта дослідником за допомогою ЕОМ.



Рисунок 1.2 – Контекстна діаграма IDEF0 (рівень А – 0)

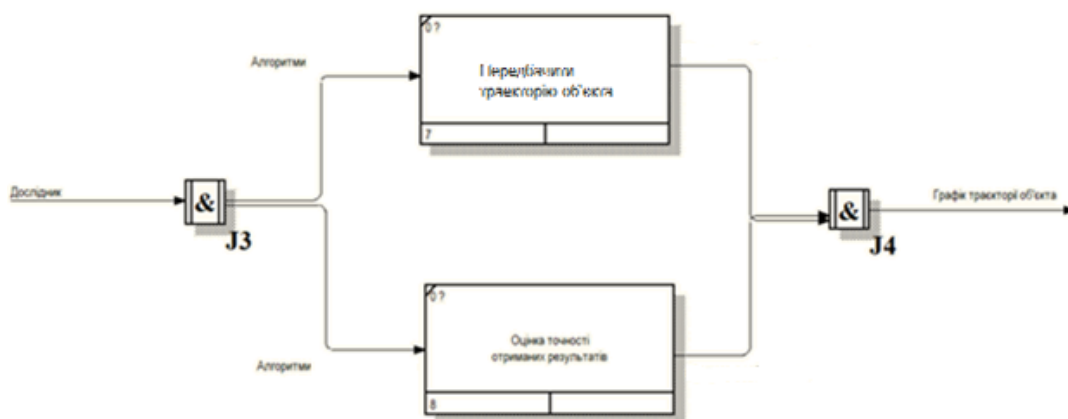


Рисунок 1.3 – Опис роботи «Отримати результат» (рівень А3 у нотації IDEF3)

1.1.5 Інформаційна модель

Способом представлення розробника системи потоків даних в системі є діаграма потоку даних (DFD). Всі діаграми є елементами ієрархії та підлягають уточненням за допомогою деталізації процесів. За допомогою DFD ми здатні описувати матеріальні та інформаційні потоки документів.

За допомогою діаграми дерева вузлів, показаної на рис. 1.4 ми можемо розглянути модель цілком.



Рисунок 1.4 – Діаграма дерева вузлів для задачі оцінювання параметрів траєкторії повітряних об'єктів

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення метрологічної атестації параметрів траєкторії повітряних об'єктів

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Для вирішення задачі оцінювання зовнішніх траєкторних змін повітряних об'єктів повинні бути застосовані різноманітні алгоритми математичної моделі із подальшим порівнянням результатів з урахуванням похибок та їх корекцією. Результатом стане визначення найбільш відповідного алгоритму, який може бути застосований для вирішення даної задачі.

В якості критеріїв, які можуть бути застосовані для оцінки якості

очікуваного результату, можна вказати наступні:

- швидкодія (К1);
- універсальність (К2);
- надійність (К3);
- ресурсомісткість (К4).

Розглянемо ці критерії та виділимо частини, що будуть порівнюватися у запропонованих альтернативах.

Порівнюючи ресурсомісткість альтернатив, маємо на увазі ресурси ЕОМ, які необхідні задля успішного закінчення роботи алгоритмів без технічних помилок: об'єм оперативної пам'яті, машинний час виконання розрахунків.

При порівнянні альтернативи на універсальність, нас цікавить можливість застосування алгоритмів для вибірок достатньо великого об'єму і вхідні дані, які потребує алгоритм. Перевага буде віддана тій системі координат, яка потребує менше інформації на вхід.

Надійність алгоритмів: очікується, що у всіх випадках ми отримуватимемо однозначний результат від алгоритму щодо визначення траєкторії об'єкта, який нас цікавить.

При порівнянні альтернативи на швидкодію, перевага віддаватиметься системі координат, яка матиме мінімальний сумарний час роботи.

Будуть розглянуті такі альтернативи:

- використання місцевої прямокутної системи координат (МПСК);
- використання місцевої сферичної системи координат (МССК).

Використання МССК досить ресурсомістке за рахунок складності моделі. Але досить точно дає рішення. Проте вона потребує більше затрат на розробку та більше оперативної пам'яті.

Використання МПСК є досить простим у плані математичного представлення, однак потребує додаткових ресурсів для більш точної відповіді, що збільшує споживання ресурсів. По показнику надійності він поступається попередньому методу.

На рис. 1.5 зображена ієрархічна модель процесу аналізу

незадоволеностей.



Рисунок 1.5 – Ієрархічна структура задачі вибору методу

1.2.2 Оцінювання вектору пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Аналіз незадоволеностей включає в себе такі рівні:

- а) перший рівень – компоненти проблеми;
- б) другий рівень – класифікація незадоволеностей;
- в) третій рівень – характеристики компонентів, які впливають на результат поставленої задачі.

На першому рівні аналізу проблеми побудуємо матрицю попарних порівнянь критеріїв з метою оцінки впливу кожної незадоволеності на поставлену проблему. Результати наведені в табл. 1.1. Для встановлення відносної важливості критеріїв використана шкала відношень Сааті [3].

Для знаходження індексу узгодженості знаходимо суми елементів матриці за стовбцями:

$$y_1 = 1,0 + 0,143 + 1,0 + 0,2 = 2,343,$$

$$y_2 = 7,0 + 1,0 + 0,333 + 5,0 = 13,333,$$

$$y_3 = 1,0 + 3,0 + 1,0 + 0,2 = 5,2,$$

$$y_4 = 5,0 + 0,2 + 5,0 + 1,0 = 11,2.$$

Тоді:

$$\lambda_{\max} \approx 2,343 \cdot 0,509 + 13,333 \cdot 0,113 + 5,2 \cdot 0,238 + 11,2 \cdot 0,140 = 5,505$$

та індекс узгодженості:

$$CI^k = \frac{5,505 - 4}{4 - 1} = 0,68.$$

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

	K1	K2	K3	K4	Вектор пріоритетів
K1	1,0	7,0	1,0	5,0	0,509
K2	0,143	1,0	3,0	0,2	0,113
K3	1,0	0,333	1,0	5,0	0,238
K4	0,2	5,0	0,2	1,0	0,140

Через те, що матриця попарних порівнянь критеріїв – це матриця четвертого порядку, то відношення узгодженості:

$$CR^k = \frac{CI^k}{0,9} = 0,187.$$

Через те, що відношення узгодженості близьке до 0,1, то будемо вважати,

що матриця попарних порівнянь критеріїв побудована вірно.

Далі формуємо матриці попарних альтернатив за кожним критерієм з метою порівняння систем координат між собою за кожним критерієм окремо.

Таблиця 1.2 – Матриця порівнянь за критерієм К1

К1	A1	A2	A3	Вектор пріоритетів
A1	1,0	0,111	0,143	0,051
A2	9,0	1,0	5,0	0,722
A3	7,0	0,2	1,0	0,227

Для знаходження індексу узгодженості знаходимо суми елементів матриці за стовбцями:

$$y_1 = 1,0 + 9,0 + 7,0 = 18,0,$$

$$y_2 = 0,111 + 1,0 + 0,2 = 1,311,$$

$$y_3 = 0,143 + 5,0 + 1,0 = 6,243.$$

Тоді:

$$\lambda_{\max} \approx 0,051 \cdot 18,0 + 0,722 \cdot 1,311 + 6,243 \cdot 0,227 = 3,282$$

та індекс узгодженості:

$$CI_{K1}^A = \frac{3,282 - 3}{3 - 1} = 0,141.$$

Оскільки матриця попарних порівнянь альтернатив – це матриця третього порядку, то відношення узгодженості:

$$CR_{K1}^A = \frac{CI^k}{0,58} = 0,241.$$

Таблиця 1.3 – Матриця порівнянь за критерієм К2

К2	A1	A2	A3	Вектор пріоритетів
A1	1,0	7,0	7,0	0,773
A2	0,143	1,0	2,0	0,139
A3	0,143	0,5	1,0	0,088

Для знаходження індексу узгодженості знаходимо суми елементів матриці за стовбцями:

$$y_1 = 1,0 + 0,143 + 0,143 = 1,286,$$

$$y_2 = 7,0 + 1,0 + 0,5 = 8,5,$$

$$y_3 = 7,0 + 2,0 + 1,0 = 10,0.$$

Тоді:

$$\lambda_{\max} \approx 0,773 \cdot 1,286 + 0,139 \cdot 8,5 + 0,088 \cdot 10,0 = 3,056$$

та індекс узгодженості:

$$CI_{K2}^A = \frac{3,056 - 3}{3 - 1} = 0,028.$$

Відношення узгодженості:

$$CR_{K2}^A = \frac{CI^k}{0,58} = 0,048.$$

Таблиця 1.4 – Матриця порівнянь за критерієм К3

К3	A1	A2	A3	Вектор пріоритетів
A1	1,0	0,111	0,2	0,063
A2	9,0	1,0	3,0	0,672
A3	0,333	0,333	1,0	0,265

Для знаходження індексу узгодженості знаходимо суми елементів матриці за стовбцями:

$$y_1 = 1,0 + 9,0 + 0,333 = 10,333,$$

$$y_2 = 0,111 + 1,0 + 0,333 = 1,444,$$

$$y_3 = 0,2 + 3,0 + 1,0 = 4,2.$$

Тоді:

$$\lambda_{\max} \approx 0,063 \cdot 10,333 + 0,672 \cdot 1,444 + 0,265 \cdot 4,2 = 3,028$$

та індекс узгодженості:

$$CI_{K3}^A = \frac{3,028 - 3}{3 - 1} = 0,014.$$

Відношення узгодженості:

$$CR_{K3}^A = \frac{CI^k}{0,58} = 0,024.$$

Таблиця 1.5 – Матриця порівнянь за критерієм К4

К4	A1	A2	A3	Вектор пріоритетів
A1	1,0	0,2	0,333	0,105
A2	5,0	1,0	3,0	0,637
A3	3,0	0,333	1,0	0,258

Для знаходження індексу узгодженості знаходимо суми елементів матриці за стовбцями:

$$y_1 = 1,0 + 5,0 + 3,0 = 9,0, \quad y_2 = 0,2 + 1,0 + 0,333 = 1,533,$$

$$y_3 = 0,333 + 3,0 + 1,0 = 4,333.$$

Тоді:

$$\lambda_{\max} \approx 0,105 \cdot 9,0 + 0,637 \cdot 1,533 + 0,258 \cdot 4,333 = 3,039$$

та індекс узгодженості:

$$CI_{K4}^A = \frac{3,028 - 3}{3 - 1} = 0,020.$$

Відношення узгодженості:

$$CR_{K4}^A = \frac{CI^k}{0,58} = 0,034.$$

Розрахуємо вектор глобальних пріоритетів альтернатив. Для цього знаходимо добуток:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 0,051 & 0,773 & 0,063 & 0,105 \\ 0,722 & 0,139 & 0,672 & 0,637 \\ 0,227 & 0,088 & 0,256 & 0,58 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,509 \\ 0,113 \\ 0,238 \\ 0,140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,143 \\ 0,632 \\ 0,225 \end{bmatrix}.$$

Розрахуємо індекс узгодженості та відношення узгодженості для всієї ієрархії:

$$CI = 0,168 + 0,509 \cdot 0,141 + 0,113 \cdot 0,048 + 0,238 \cdot 0,024 + 0,140 \cdot 0,020 = 0,254,$$

$$RI = 0,90 + 0,58 = 1,48, \quad CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0,254}{1,48} = 0,172.$$

Найбільша компонента вектору локальних пріоритетів критеріїв відповідає першому критерію. Отже, маємо наступні пріоритети за критеріями порівняння: швидкодія, надійність, ресурсоємність, універсальність.

Порівнюючи альтернативи за обраними критеріями, отримали вектор глобальних пріоритетів, найбільша компонента якого відповідає другій альтернативі – використанню місцевої прямокутної системи координат.

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

На основі результатів прямих вимірювань параметрів горизонтування платформи оптико-електронної станції розробити метод аналізу інструментальних похибок вимірювання параметрів траєкторій руху літальних

апаратів оптико-електронними станціями. На основі прямих вимірювань (альфа бета д) розробити метод аналізу випадкових похибок вимірювання параметрів траєкторій руху повітряних об'єктів оптико-електронними станціями.

1.3.2 Формальна постановка задачі

На основі результатів вимірювань необхідно оцінити вектори $\|\bar{X}_t, \bar{Y}_t, \bar{Z}_t\|^T$, $\|\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z\|^T$.

1.4 Постановка задач дослідження

Для вирішення даної задачі необхідно:

- розробити стохастичну модель визначення координат місця розташування ПО методом відкритого моніторингу повітряного простору мережею ОЕС;
- розробити метод аналізу інструментальних похибок вимірювання параметрів траєкторій руху літальних апаратів оптико-електронними станціями;
- розробити метод аналізу випадкових похибок вимірювання параметрів траєкторій руху повітряних об'єктів оптико-електронними станціями;
- здійснити програмну реалізацію розробленого методу.

2 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ МЕТРОЛОГІЧНОЇ АТЕСТАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ ТРАЄКТОРІЇ ПОВІТРЯНИХ ОБ'ЄКТІВ

2.1 Стохастична модель визначення координат місця розташування ПО методом відкритого моніторингу повітряного простору мережею ОЕС

При відкритому моніторингу повітряного простору мережею ОЕС кожна i -та ОЕС в момент часу t забезпечує можливість вимірювання трьох параметрів: кута місця – $\beta(\omega)$, азимута – $\alpha(\omega)$ і похилої дальності – $D(\omega)$, які визначають місце розташування ПО в МССК (рисунок 2.1).

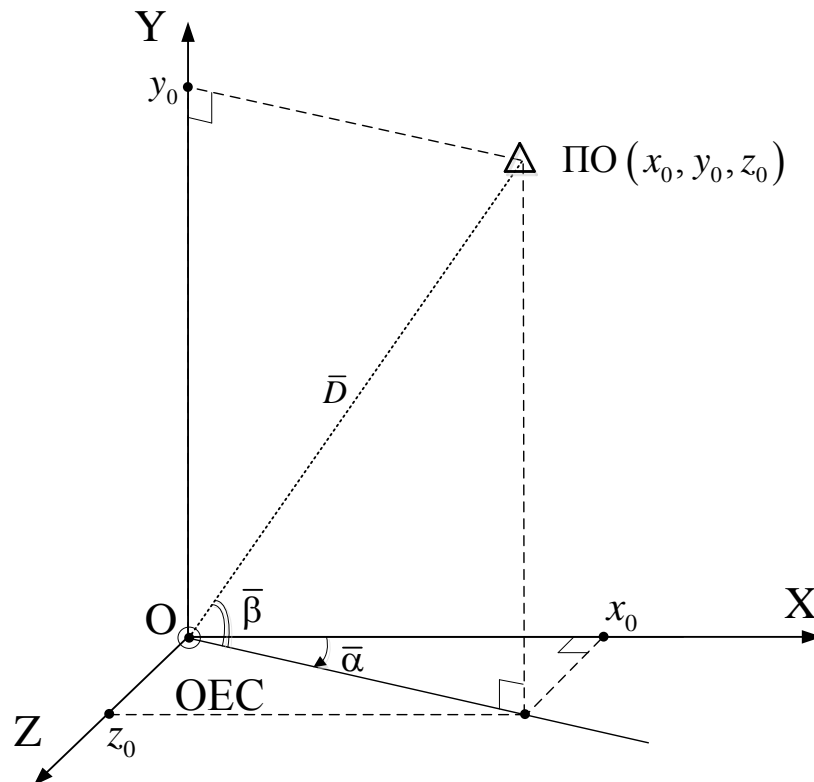


Рисунок 2.1 – Математичні очікування координати місця розташування ПО в МССК – $(\alpha(\omega), \beta(\omega), D(\omega))$ і в МДСК – (x, y, z) ОЕС

В цьому випадку компоненти вектора координат ПО $\vec{X}_M(\omega) = \|X_M(\omega), Y_M(\omega), Z_M(\omega)\|^T$ в МДСК ОЕС визначаються за такими формулами:

$$Y_M(\omega) = D(\omega) \sin \beta(\omega), \quad (2.1)$$

$$X_M(\omega) = D(\omega) \cos \beta(\omega) \cos \alpha(\omega), \quad (2.2)$$

$$Z_M(\omega) = D(\omega) \cos \beta(\omega) \sin \alpha(\omega). \quad (2.3)$$

Вектор координат ПО $\vec{X}_M(\omega) = \|X_M(\omega), Y_M(\omega), Z_M(\omega)\|^T$ для кожного моменту часу t досить повно характеризує стан ПО при його русі по балістичній траєкторії, однак для маневруючих ПО вектор координат ПО $\vec{X}_M(\omega) = \|X_M(\omega), Y_M(\omega), Z_M(\omega)\|^T$ повинен бути розширений шляхом додавання в нього обчислюваних оцінок проєкцій швидкості його руху на осі координат МДСК. У цьому випадку вектор стану ПО в момент часу t набуває вигляду:

$$\vec{X}_M(\omega) = \|X_M(\omega), Y_M(\omega), Z_M(\omega), V_{xM}(\omega), V_{yM}(\omega), V_{zM}(\omega)\|^T,$$

де $V_{xM}(\omega), V_{yM}(\omega), V_{zM}(\omega)$ – проєкції оцінок швидкості руху ПО на осі координат, що обчислюються, у найпростішому випадку, у відповідності з виразами:

$$V_{xM}(\omega) = (X_{Mt}(\omega) - X_{Mt-1}(\omega)) / \Delta t,$$

$$V_{yM}(\omega) = (Y_{Mt}(\omega) - Y_{Mt-1}(\omega)) / \Delta t,$$

$$V_{zM}(\omega) = (Z_{Mt}(\omega) - Z_{Mt-1}(\omega)) / \Delta t.$$

Для високошвидкісних маневруючих ПО вектор

$$\vec{X}_M(\omega) = \|X_M(\omega), Y_M(\omega), Z_M(\omega), V_{xM}(\omega), V_{yM}(\omega), V_{zM}(\omega)\|^T$$

додатково розширюється шляхом включення в нього обчислюваних оцінок проєкцій прискорень руху ПО на осі координат МДСК:

$$\vec{X}_M(\omega) = \|X_M(\omega), Y_M(\omega), Z_M(\omega), V_{xM}(\omega), V_{yM}(\omega), V_{zM}(\omega), A_{xM}(\omega), A_{yM}(\omega), A_{zM}(\omega)\|^T,$$

де $A_{xM}(\omega)$, $A_{yM}(\omega)$, $A_{zM}(\omega)$ – проекції оцінок прискорення руху ПО на осі координат:

$$A_{xM}(\omega) = (V_{xMt}(\omega) - V_{xMt-1}(\omega)) / \Delta t,$$

$$A_{yM}(\omega) = (V_{yMt}(\omega) - V_{yMt-1}(\omega)) / \Delta t,$$

$$A_{zM}(\omega) = (V_{zMt}(\omega) - V_{zMt-1}(\omega)) / \Delta t.$$

Модель перерахунку вектора параметрів руху ПО $\vec{X}_M(\omega) = \|X_M(\omega), Y_M(\omega), Z_M(\omega), V_{xM}(\omega), V_{yM}(\omega), V_{zM}(\omega), A_{xM}(\omega), A_{yM}(\omega), A_{zM}(\omega)\|^T$ з МДСК у вектор параметрів руху $\vec{X}_\Gamma(\omega) = \|X_\Gamma(\omega), Y_\Gamma(\omega), Z_\Gamma(\omega), V_{x\Gamma}(\omega), V_{y\Gamma}(\omega), V_{z\Gamma}(\omega), A_{x\Gamma}(\omega), A_{y\Gamma}(\omega), A_{z\Gamma}(\omega)\|^T$ в ГСК має вигляд:

$$\vec{X}_\Gamma(\omega) = \begin{pmatrix} A_{\Gamma M}(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & A_{\Gamma M}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & A_{\Gamma M}(\omega) \end{pmatrix} \cdot \vec{X}_M(\omega) + \vec{X}_{0\Gamma}(\omega),$$

де $A_{\Gamma M}(\omega)$ – матриця напрямних косинусів зв'язку між МДСК і ГСК. Елементи матриці $A_{\Gamma M}(\omega)$ обчислюються за формулою:

$$A_{\Gamma M}(\omega) = \begin{pmatrix} -\sin L \cdot \sin A_m - \cos L \cdot \sin B \cdot \cos A_m & \cos L \cdot \cos B & -\sin L \cdot \cos A_m + \cos L \cdot \sin B \cdot \sin A_m \\ \cos L \cdot \sin A_m - \sin L \cdot \sin B \cdot \cos A_m & \sin L \cdot \cos B & \cos L \cdot \cos A_m + \sin L \cdot \sin B \cdot \sin A_m \\ \cos B \cdot \cos A_m & \sin B & -\cos B \cdot \sin A_m \end{pmatrix}.$$

Вектор $\vec{X}_{0\Gamma}(\omega)$ задається у вигляді $\vec{X}_{0\Gamma}(\omega) = \|X_{0\Gamma}(\omega), Y_{0\Gamma}(\omega), Z_{0\Gamma}(\omega), 0, 0, 0\|^T$.

Елементи вектора початку місцевої системи координат в Грінвічській системі координат $\|X_{0\Gamma}(\omega), Y_{0\Gamma}(\omega), Z_{0\Gamma}(\omega)\|^T$ обчислюються за формулами:

$$X_{0r}(\omega) = (N(\omega) + H(\omega)) \cdot \cos L(\omega) \cdot \cos B(\omega), \quad (2.4)$$

$$Y_{0r}(\omega) = (N(\omega) + H(\omega)) \cdot \sin L(\omega) \cdot \cos B(\omega), \quad (2.5)$$

$$Z_{0r}(\omega) = (N(\omega) \cdot (1 - e^2) + H(\omega)) \cdot \sin B(\omega), \quad (2.6)$$

$$N(\omega) = \frac{a_3}{\sqrt{1 - e_3^2 \cdot \sin^2 B(\omega)}}, \quad (2.7)$$

де a_3, e_3 – параметри загальноземного еліпсоїда;

$a_3 = 6378,137$ км – велика піввісь;

$e_3^2 = 0,0066943800667647$ – квадрат першого ексцентриситету;

$B(\omega)$ – геодезична широта початку МДСК;

$L(\omega)$ – геодезична довгота початку МДСК;

$H(\omega)$ – геодезична висота початку МДСК;

$A_m(\omega)$ – геодезичний азимут МДСК.

Стохастичні рівняння ліній візування від i -ої ОЕС на ПО мають вигляд:

$$\frac{x(\omega) - x_i(\omega)}{l_i(\omega)} = \frac{y(\omega) - y_i(\omega)}{m_i(\omega)} = \frac{z(\omega) - z_i(\omega)}{n_i(\omega)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.8)$$

де $[x_i(\omega), y_i(\omega), z_i(\omega)]^T$ – координати розташування i -ої ОЕС;

$[l_i(\omega), m_i(\omega), n_i(\omega)]^T$ – напрямний вектор ліній візування від i -ої ОЕС на ПО.

Напрямні коефіцієнти $l_i(\omega), m_i(\omega), n_i(\omega)$ лінії візування від ОЕС на ПО обчислюються наступним чином:

$$l_i(\omega) = \cos \alpha(\omega) \cos \beta(\omega),$$

$$m_i(\omega) = \sin \beta(\omega),$$

$$n_i(\omega) = \sin \alpha(\omega) \cos \beta(\omega).$$

2.2 Метод аналізу інструментальних похибок вимірювання параметрів траєкторій руху літальних апаратів оптико-електронними станціями

Проблемам використання ОЕС для моніторингу повітряного простору, зовнішньотраєкторних вимірювань і метрологічної атестації ОЕС присвячено досить велику кількість робіт [1 – 9]. Однак проблема високоточних траєкторних вимірювань залишається надзвичайно актуальною. Вирішення цієї проблеми вимагає детального аналізу причин виникнення, ступеня впливу і способів пригнічення (нейтралізації) всіх типів похибок вимірювання ОЕС траєкторних параметрів ПО [10].

Оптико-електронні станції. Сучасні ОЕС для траєкторних вимірювань реалізуються в модульному виконанні та включають в себе наступні модулі.

Модуль 1. Опорно-поворотний з двохосьовою платформою з обертанням по азимуту і куту місця, на якій розміщений оптико-електронний модуль з системою глобального позиціонування і горизонтування платформи.

Модуль 2. Оптико-електронний – з телевізійною камерою, тепловізором і лазерним далекоміром.

ОЕС забезпечує круговий огляд повітряного простору в оптичному та інфрачервоному діапазонах частот, виявлення, ідентифікацію, розпізнавання і автоматичний супровід ПО.

Для визначення параметрів траєкторій руху ПО необхідно вибрати систему координат, в якій будуть здійснюватися траєкторні вимірювання та визначення (оцінювання) параметрів траєкторій руху ПО.

Системи координат. Залежно від вибору початку відліку, системи координат класифікуються на: геоцентричні (з початком відліку в центрі мас Землі A) і топоцентричні (з початком відліку в точці O на поверхні Землі). Грінвічська система координат (ГСК) є геоцентричною системою координат і визначається наступним чином:

– вісь AZ_T направлена по осі обертання Землі до Північного полюса;

- вісь AX_r проходить через точку перетину Гринвічського меридіана з площиною екватора;
- вісь AU_r доповнює прямокутну систему до правої;
- місцева декартова система координат (МДСК) є топоцентричною системою координат і визначається наступним чином;
- вісь OY_m направлена по прямовисній лінії до земної поверхні;
- вісь OX_m розташована в площині, перпендикулярній прямовисній лінії в точці O і становить з площиною меридіана початку системи координат кут A_m – геодезичний азимут, відлічуваний по напрямку руху годинникової стрілки від напрямку на північ;
- вісь OZ_m проведена так, щоб утворилася права прямокутна система координат;
- місцева сферична система координат (МССК) є топоцентричною системою координат, осі якої збігаються з осями МДСК.

У загальноземних системах координат положення точок у просторі можуть бути задані просторовими прямокутними координатами X, Y, Z і геодезичними координатами B, L, H .

Геодезична широта B – це кут між нормаллю і площиною екватора. Геодезична довгота L – це кут між площиною меридіана даної точки і площиною початкового меридіана. Геодезичною висотою H є відрізок нормалі від точки до поверхні еліпсоїда [11].

Для визначення параметрів траєкторій руху ПО використовується місцева декартова система координат (МДСК) з початком в точці розташування ОЕС, координати якої (L, B, H) визначаються засобами GPS навігації, та дві інструментальні системи координат ОЕС (ІСК ОЕС): сферична і декартова системи координат, які мають спільний початок з МДСК і, в ідеалі, вісі, що співпадають. ОЕС забезпечує прямі вимірювання розташування ПО $P(\alpha_p, \beta_p, D_p)$ в інструментальній сферичній системі координат ОЕС: похилу дальність від початку координат до ПО, азимут і кут місця. Однак будь-які вимірювання мають різні типи похибки: похибка вимірювання – відхилення

результату вимірювання від істинного значення вимірюваної величини; інструментальна похибка обумовлена недосконалістю застосовуваних засобів вимірювань або їх калібрування (юстирування); динамічна похибка вимірювань – властива вимірам швидко мінливих величин (похибка супроводу); статична похибка вимірювань – похибка результатів вимірювань координат місця розташування ОЕС (L, B, H) засобами GPS навігації; систематична похибка вимірювання – складова загальної похибки, що залишається постійною, або закономірно змінюється при повторних вимірах; випадкові похибки, які визначаються спільним впливом ряду випадкових факторів.

Для мінімізації впливу виникаючих похибок, необхідно використовувати методи аналізу причин їх виникнення і застосування спеціальних засобів обробки результатів вимірювань. У розділі наведено розроблений метод аналізу інструментальних похибок вимірювання параметрів траєкторій руху ПО ОЕС, пов'язаних з фактичною розбіжністю напрямків осей МДСК та ІДСК ОЕС, тобто похибок юстирування (горизонтування) платформи ОЕС і похибкою прив'язки місцевої системи координат ОЕС до місцевого меридіану – похибкою напрямку осі ОХ з вектором ON – напрямком на північ (NORD) з точки O МДСК.

Місцеві системи координат. На рисунку 2.2 представлені місцеві інструментальні системи координат ОЕС і координати точки P (місця розташування ПО) в момент часу t в місцевій інструментальній сферичній системі координат ОЕС (МІССК) $P(\alpha_p, \beta_p, D_p)$ і місцевій інструментальній декартовій системі координат (МІДСК) $P(x_p, y_p, z_p)$.

Перехід від сферичної до декартової системи координат точки P здійснюється за формулами:

$$y'_p = D \sin \beta, \quad (2.9)$$

$$x'_p = D \cos \beta \cos \alpha, \quad (2.10)$$

$$z'_p = D \cos \beta \sin \alpha. \quad (2.11)$$

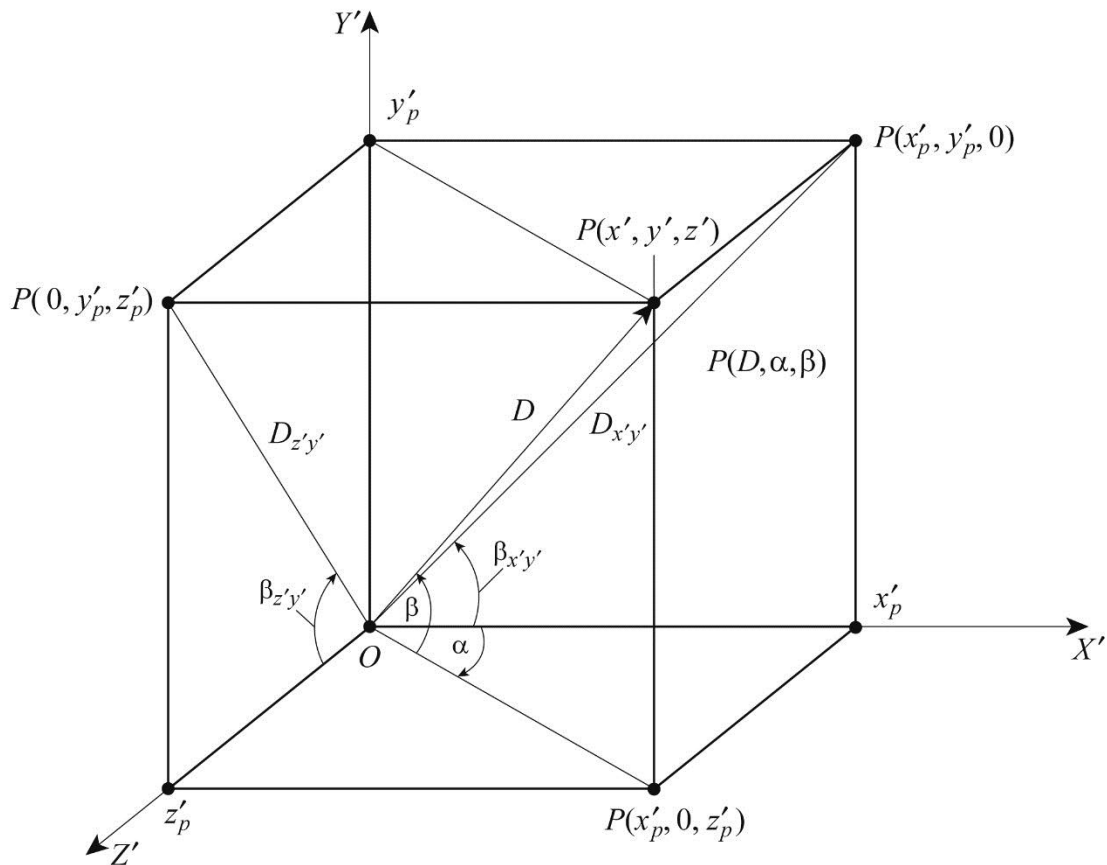


Рисунок 2.2 – Координати точки P у МІССК – $P(D_p, \alpha_p, \beta_p)$
та МІДСК – $P(x'_p, y'_p, z'_p)$ системах координат

Інструментальні системи координат ОЕС. Інструментальні системи координат ОЕС жорстко пов'язані з конструктивними особливостями реалізації ОЕС, її просторовим розташуванням на поверхні землі і напрямком осі OX , відносно якої здійснюється відлік (вимір) азимута.

Основною причиною виникнення інструментальних похибок вимірювання азимута і кута місця ПО є фактичні помилки між напрямками осей МДСК і МІДСК ОЕС. Для їх усунення або, принаймні, мінімізації використовуються різні технології і обладнання, включаючи лазерне, оптичне і навігаційне. Однак повністю усунути інструментальні похибки вимірювання ОЕС азимута, кута місця і похилої дальності практично не вдається. Як вже зазначалося раніше, ОЕС забезпечує прями вимірювання розташування ПО D_p – похилої дальності, α_p – азимута і β_p – кута місця в МІССК ОЕС. Далі ці координати, у відповідності з

виразами (2.9) – (2.11), переводяться в координати (X',Y',Z') МДСК. Оскільки подальша обробка результатів траєкторних вимірювань здійснюється в МДСК, то координати місця розташування ПО (X',Y',Z') повинні бути переведені в координати (X,Y,Z) МДСК. Якщо МДСК повністю співпадає з МДСК, то таке переведення здійснюється шляхом прирівнювання відповідних координат, тобто $X=X'$, $Y=Y'$, $Z=Z'$. У реальності ці системи координат мають спільний початок, але, як правило, відрізняються за напрямком на відповідні кути по кожній з осей координат. Для проведення аналізу інструментальних похибок вимірювання розташування ПО, пов'язаних з похибками юстирування (горизонтування) платформи ОЕС і похибкою прив'язки місцевих систем координат ОЕС до місцевого меридіану, розглянемо моделі перетворення декартових систем координат, пов'язаних з поворотами координатних площин навколо координатних осей.

Повороти координатних площин.

1. Поворот площини $X'OY'$ на позитивний кут навколо осі OZ' . Система координат $Z'X'Y'$ права, тому позитивному куту α_z навколо осі OZ' відповідає поворот осей координат на кут α_z проти годинникової стрілки. На рисунку 1.46 представлені координати проекції точки P на площини $X'OY'$ і XOY .

При повороті площини $X'OY'$ навколо осі OZ' на $\alpha_z > 0$ координати точки P відносно осі OZ не змінюються, не змінюється D і кут $\beta_{x'y'}$.

В цьому випадку координати $x'_p = D_{x'y'} \cos \beta_{x'y'}$, $y'_p = D_{x'y'} \sin \beta_{x'y'}$, відповідно дорівнюють:

$$x'_p = D_{x'y'} \cos \beta_{x'y'}, \quad (2.12)$$

$$y'_p = D_{x'y'} \sin \beta_{x'y'}. \quad (2.13)$$

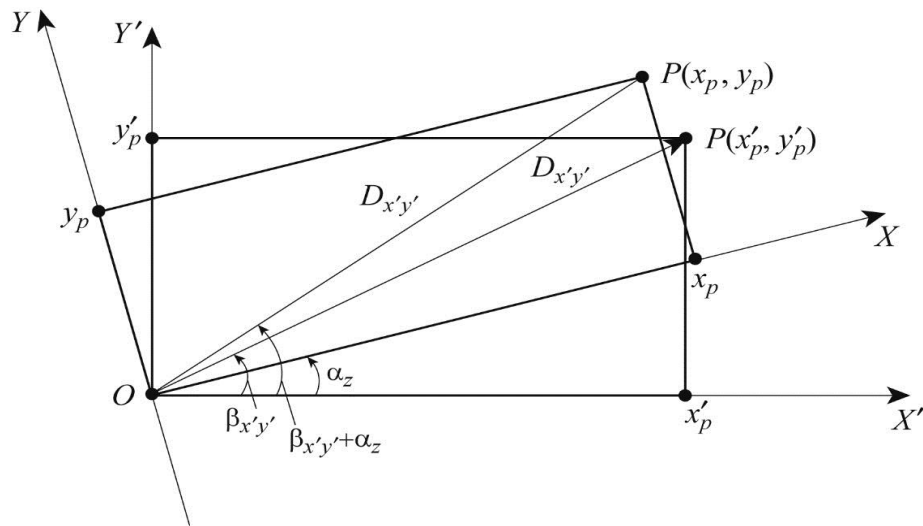


Рисунок 2.3 – Координати проекції точки P на площини $X'OY'$ і XOY , поверненої на додатній кут $\alpha_z > 0$ навколо осі OZ'

Для обчислення координат точки P в МДСК (x_p, y_p) , скористаємося виразом:

$$\begin{aligned} x_p &= D_{x'y'} \cos(\beta_{x'y'} + \alpha_z) = \\ &= D_{x'y'} [\cos \beta_{x'y'} \cos \alpha_z - \sin \beta_{x'y'} \sin \alpha_z] = x'_p \cos \alpha_z - y'_p \sin \alpha_z, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} y_p &= D_{x'y'} \sin(\beta_{x'y'} + \alpha_z) = \\ &= D_{x'y'} [\sin \beta_{x'y'} \cos \alpha_z + \cos \beta_{x'y'} \sin \alpha_z] = x'_p \sin \alpha_z + y'_p \cos \alpha_z. \end{aligned} \quad (2.15)$$

У матричній формі:

$$P_z(\alpha_z) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_z & -\sin \alpha_z & 0 \\ \sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Тоді

$$x_p = P_z(\alpha_z) x'_p. \quad (2.17)$$

При повороті площини $X'OY'$ навколо осі OZ' на негативний кут $\alpha_z < 0$ (по годинниковій стрілці) маємо:

$$\begin{aligned} x_p &= D_{x'y'} \cos(\beta_{x'y'} - \alpha_z) = \\ &= D_{x'y'} [\cos \beta_{x'y'} \cos \alpha_z + \sin \beta_{x'y'} \sin \alpha_z] = x'_p \cos \alpha_z + y'_p \sin \alpha_z, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} y_p &= D_{x'y'} \sin(\beta_{x'y'} - \alpha_z) = \\ &= D_{x'y'} [\sin \beta_{x'y'} \cos \alpha_z - \sin \alpha_z \sin \beta_{x'y'}] = y'_p \cos \alpha_z - x'_p \sin \alpha_z. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В цьому випадку матриця повороту $P_z(-\alpha_z)$ набуває вигляду:

$$P_z(-\alpha_z) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_z & \sin \alpha_z & 0 \\ -\sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

В цьому випадку:

$$x_p = P_z(-\alpha_z) x'_p. \quad (2.21)$$

2. Поворот площини $Y'OZ'$ на позитивний кут $\alpha_x > 0$ навколо осі OX' . Система координат $X'Y'Z'$ – права, тому позитивному куту $\alpha_x > 0$ навколо осі OX' відповідає поворот осей координат на кут $\alpha_x > 0$ проти годинникової стрілки. В цьому випадку матриця повороту набуває вигляду:

$$P_x(\alpha_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & -\sin \alpha_x \\ 0 & \sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

При $\alpha_x < 0$:

$$P_x(-\alpha_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & \sin \alpha_x \\ 0 & -\sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

3. Поворот площини $Z'OX'$ на позитивний кут $\alpha_y > 0$ навколо осі OY' . Система координат $Y'Z'X'$ – права, тому позитивному куту $\alpha_y > 0$ навколо осі OY' відповідає поворот осей координат на кут $\alpha_y > 0$ проти годинникової стрілки. В цьому випадку матриця повороту набуває вигляду:

$$P_y(\alpha_y) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_y & 0 & \sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

При $\alpha_y < 0$:

$$P_y(-\alpha_y) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Визначники матриць $P_x(\cdot)$, $P_y(\cdot)$, $P_z(\cdot)$ дорівнюють 1 і мають властивість ортогональності:

$$P^T(\cdot) \cdot P(\cdot) = P(\cdot) P^T(\cdot) = E,$$

Звідки випливає, що обернення матриці повороту відповідає її транспонуванню:

$$P^{-1}(\cdot) = P^T(\cdot). \quad (2.26)$$

Матрицю поворотів на відповідні кути отримуємо у вигляді добутку матриць поворотів на ті ж кути:

$$P_{xyz}(\cdot) = P_x(\cdot)P_y(\cdot)P_z(\cdot), \quad (2.27)$$

при цьому її визначник буде також дорівнювати 1.

Не порушуючи спільності, розглянемо матрицю поворотів площини $X'OZ'$ (платформи опорно-поворотного модуля ОЕС) на позитивні кути α_x навколо осі OX' ($\alpha_x > 0$) і α_z навколо осі OZ' ($\alpha_z > 0$):

$$\begin{aligned} P_{xz}(\alpha_x, \alpha_z) &= P_x(\alpha_x) \cdot P_z(\alpha_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & -\sin \alpha_x \\ 0 & \sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_z & -\sin \alpha_z & 0 \\ \sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_z & -\sin \alpha_z & 0 \\ \cos \alpha_x \sin \alpha_z & \cos \alpha_x \cos \alpha_z & -\sin \alpha_x \\ \sin \alpha_x \sin \alpha_z & \sin \alpha_x \cos \alpha_z & \cos \alpha_x \end{pmatrix}. \quad (2.28) \end{aligned}$$

В цьому випадку координати точки P у МДСК x дорівнюють:

$$x = P_{xz}(\alpha_x, \alpha_z) \cdot x'_p,$$

де x'_p – координати точки P у МІДСК.

Матриця поворотів системи координат (x', y', z') відносно початку координат на позитивні кути α_x , α_z , α_y має вигляд:

$$P_{xzy}(\alpha_x, \alpha_z, \alpha_y) = P_{xz}(\alpha_x, \alpha_z) \cdot P_y(\alpha_y) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha_z & -\sin \alpha_z & 0 \\ \cos \alpha_x \sin \alpha_z & \cos \alpha_x \cos \alpha_z & -\sin \alpha_x \\ \sin \alpha_x \sin \alpha_z & \sin \alpha_x \cos \alpha_z & \cos \alpha_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_y & 0 & \sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці $P_{xzy}(\alpha_x, \alpha_z, \alpha_y)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} P_{11} &= \cos \alpha_z \cos \alpha_y; \\ P_{12} &= -\sin \alpha_z; \\ P_{13} &= \cos \alpha_z \sin \alpha_y; \\ P_{21} &= \cos \alpha_x \sin \alpha_z \cos \alpha_y + \sin \alpha_x \sin \alpha_y; \\ P_{22} &= \cos \alpha_x \cos \alpha_z; P_{23} = \cos \alpha_x \sin \alpha_z \sin \alpha_y - \sin \alpha_x \cos \alpha_y; \\ P_{31} &= \sin \alpha_x \sin \alpha_z \cos \alpha_y - \cos \alpha_x \sin \alpha_y; \\ P_{32} &= \sin \alpha_x \cos \alpha_z; \\ P_{33} &= \sin \alpha_x \sin \alpha_z \sin \alpha_y + \cos \alpha_x \cos \alpha_y. \end{aligned} \quad (2.29)$$

В цьому випадку координати точки P МДСК дорівнюють:

$$x_p = P_{xzy}(\alpha_x, \alpha_z, \alpha_y) \cdot x'_p, \quad (2.30)$$

де $x_p = (x_p, y_p, z_p)^T$, $x'_p = (x'_p, y'_p, z'_p)^T$ – координати точки P у МДСК і МІДСК.

Матриця поворотів системи координат (x', y', z') відносно початку координат на позитивні кути $\alpha_x, \alpha_z, \alpha_y$ має вигляд:

$$P_{xzy}^{-++} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_z \cos \alpha_y & -\sin \alpha_z & \cos \alpha_z \sin \alpha_y \\ \cos \alpha_x \sin \alpha_z \cos \alpha_y & \cos \alpha_x \cos \alpha_z & \cos \alpha_x \sin \alpha_z \sin \alpha_y + \cos \alpha_x \sin \alpha_y \\ -\sin \alpha_x \sin \alpha_z \cos \alpha_y - \cos \alpha_x \sin \alpha_y & -\sin \alpha_x \cos \alpha_z & -\sin \alpha_x \sin \alpha_z \sin \alpha_y + \cos \alpha_x \sin \alpha_y \end{pmatrix}.$$

Матриця поворотів системи координат (x', y', z') відносно початку координат на позитивні кути $\alpha_x, \alpha_z, \alpha_y$ має вигляд:

$$P_{xzy}^{+-+} = \begin{pmatrix} \cos a_z \cos a_y & \sin a_z & \cos a_z \sin a_y \\ -\cos a_x \sin a_y \cos a_y & \cos a_x \cos a_z & -\cos a_x \sin a_y \sin a_z + \cos a_x \sin a_y \\ -\sin a_x \sin a_z \cos a_y - \cos a_x \sin a_y & \sin a_x \cos a_z & -\sin a_x \sin a_y \sin a_z + \cos a_x \sin a_y \end{pmatrix}.$$

Матриця поворотів системи координат (x', y', z') відносно початку координат на позитивні кути $\alpha_x, \alpha_z, \alpha_y$ має вигляд:

$$P_{xzy}^{++-} = \begin{pmatrix} \cos a_z \cos a_y & -\sin a_z & -\cos a_z \sin a_y \\ \cos a_x \sin a_y \cos a_y - \sin a_x \sin a_y & \cos a_x \cos a_z & -\cos a_x \sin a_y \sin a_z - \cos a_x \sin a_y \\ \sin a_x \sin a_z \cos a_y + \cos a_x \sin a_y & \sin a_x \cos a_z & -\sin a_x \sin a_y \sin a_z + \cos a_x \sin a_y \end{pmatrix}.$$

Матриця поворотів системи координат (x', y', z') відносно початку координат на позитивні кути $\alpha_x, \alpha_z, \alpha_y$ має вигляд:

$$P_{xzy}^{---} = \begin{pmatrix} \cos a_z \cos a_y & \sin a_z & -\cos a_z \sin a_y \\ -\cos a_x \sin a_y \cos a_y + \sin a_x \sin a_y & \cos a_x \cos a_z & \cos a_x \sin a_y \sin a_z + \cos a_x \sin a_y \\ \sin a_x \sin a_z \cos a_y + \cos a_x \sin a_y & -\sin a_x \cos a_z & -\sin a_x \sin a_y \sin a_z + \cos a_x \sin a_y \end{pmatrix}.$$

Моделі вимірювань. ОЕС забезпечує прямі вимірювання розташування ПО в МІССК: похилу дальність – D , азимут – α і кут місця – β .

Введемо наступні позначення: $\xi(\omega)$ – випадкова величина, де $\omega \in \Omega$,

(Ω, B, P) – декартовий добуток ймовірнісних просторів $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$, (Ω_i, B_i, P_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$, $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$; Ω_i – простір елементарних подій; B_i – σ -алгебри подій; P_i – ймовірнісні заходи на B_i); $\xi(\tilde{\omega})$ – конкретна реалізація випадкової величини; $M_{\omega}\{\xi(\omega)\} = \bar{\xi}$ – математичне очікування випадкової величини; σ_{ξ}^2 – дисперсія випадкової величини $\xi(\omega)$. Не порушуючи спільності, будемо вважати, що помилки вимірювань розподілені за нормальним законом з відомими параметрами:

$$D = D(\omega) \cong N(\bar{D}, \sigma_D^2), \quad (2.31)$$

$$\alpha = \alpha(\omega) \cong N(\bar{\alpha}, \sigma_{\alpha}^2), \quad (2.32)$$

$$\beta = \beta(\omega) \cong N(\bar{\beta}, \sigma_{\beta}^2), \quad (2.33)$$

де $D(\omega)$, $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ – випадкові величини, що характеризують помилки (похибки) вимірювань: $D(\omega)$ – дальності, $\alpha(\omega)$ – азимута і кута місця $\beta(\omega)$;

\bar{D} , $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ – математичні очікування і σ_D^2 , σ_{α}^2 , σ_{β}^2 – дисперсії вимірюваних величин;

$D(\tilde{\omega})$, $\alpha(\tilde{\omega})$, $\beta(\tilde{\omega})$ – результати вимірювань (реалізацій) випадкових величин.

Передбачається, що $D(\omega)$, $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ – незалежні випадкові величини.

Для прив'язки місця розташування ОЕС до топооснови (координат точки O – початку місцевих систем координат) використовуються засоби GPS позиціонування, що забезпечують непрямі вимірювання геодезичних координат (В, L, Н).

Передбачається, що помилки вимірювання геодезичних координат також мають нормальний розподіл:

$$B = B(\omega) \cong N(\bar{B}, \sigma_B^2), \quad (2.34)$$

$$L = L(\omega) \cong N(\bar{L}, \sigma_L^2), \quad (2.35)$$

$$H = H(\omega) \cong N(\bar{H}, \sigma_H^2), \quad (2.36)$$

де $\bar{B}, \bar{L}, \bar{H}$; $\sigma_B^2, \sigma_L^2, \sigma_H^2$ – відповідно, математичні очікування і дисперсії вимірюваних величин.

Моделі юстирування платформи ОЕС. Юстирування платформи ОЕС полягає у розв'язанні двох задач: горизонтування і прив'язки осі ОХ МІСК до місцевого меридіану.

Вимірювання значень азимута $\alpha(\omega)$ і кута місця $\beta(\omega)$ здійснюються в МІСК. Необхідно провести горизонтування платформи ОЕС таким чином, щоб її поверхня співпадала (якомога точніше) з площиною ХОZ МДСК. Задача прив'язки осі ОХ МІСК до місцевого меридіану полягає у визначенні точного напрямку на північ з нульової точки O МІСК ОЕС. Розв'язання задачі юстирування платформи ОЕС полягає, в тому, щоб забезпечити виконання рівності нулю математичних очікувань результатів вимірювань кутів поворотів $\alpha_x, \alpha_z, \alpha_y$. У реальних умовах, навіть при використанні сучасних технологій, домогтися цього не вдається ні по одній з осей. Тому в якості моделі юстирування платформи будемо використовувати модель з відмінними від нуля математичними очікуваннями кутів поворотів $\alpha_x, \alpha_z, \alpha_y$ осей платформи виду:

$$\alpha_x = \alpha_x(\omega) \cong N(\bar{\alpha}_x, \sigma_{\alpha_x}^2), \quad (2.37)$$

$$\alpha_z = \alpha_z(\omega) \cong N(\bar{\alpha}_z, \sigma_{\alpha_z}^2), \quad (2.38)$$

$$\alpha_y = \alpha_y(\omega) \cong N(\bar{\alpha}_y, \sigma_{\alpha_y}^2), \quad (2.39)$$

де, як і раніше, $\bar{\alpha}_x, \bar{\alpha}_z, \bar{\alpha}_y$ – математичні очікування, а $\sigma_{\alpha_x}^2, \sigma_{\alpha_z}^2, \sigma_{\alpha_y}^2$ – дисперсії

вимірюваних кутів поворотів платформи.

Для оцінки метрологічних характеристик ОЕС траєкторних спостережень було проведено обчислювальний експеримент.

Обчислювальний експеримент. Для дослідження впливу інструментальних помилок юстирування платформи ОЕС на значення систематичних помилок оцінок розташування ПО, був проведений обчислювальний експеримент, суть якого полягала в наступному.

Задавалися значення математичного очікування кутів повороту платформи ОЕС навколо відповідних осей із наступного діапазону:

$$\bar{\sigma}_x, \sigma_y, \sigma_z \in [0^\circ; 0,5^\circ; 1,0^\circ].$$

1. Задавалися набори значень вимірних величин $D(\tilde{\omega})$, $\beta(\tilde{\omega})$, $\alpha(\tilde{\omega})$ у МІССК із наступних діапазонів:

$$D(\tilde{\omega}) \in [1000 \text{ м}; 5000 \text{ м}; 10000 \text{ м}; 15000 \text{ м}];$$

$$\beta(\tilde{\omega}) \in [0^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 75^\circ];$$

$$\alpha(\tilde{\omega}) \in [0^\circ \div 360^\circ] \text{ с шагом } 1,0^\circ.$$

2. Для кожного набору вимірюваних величин $D(\tilde{\omega})$, $\alpha(\tilde{\omega})$, $\beta(\tilde{\omega})$ обчислювалися координати ПО у МІДСК:

$$x' = x'(\tilde{\omega}) = D(\tilde{\omega}) \sin \beta(\tilde{\omega});$$

$$y' = y'(\tilde{\omega}) = D(\tilde{\omega}) \cos \beta(\tilde{\omega}) \cos \alpha(\tilde{\omega});$$

$$z' = z'(\tilde{\omega}) = D(\tilde{\omega}) \cos \beta(\tilde{\omega}) \sin \alpha(\tilde{\omega}).$$

3. Далі, використовуючи матрицю поворотів (2.29), обчислювалися значення координат ПО в МДСК:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_{xyz}(\bar{\alpha}_x, \bar{\alpha}_z, \bar{\alpha}_y) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

4. Обчислювалося значення систематичної помилки оцінки координат ПО:

$$\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

2.3 Метод аналізу випадкових похибок вимірювання параметрів траєкторій руху повітряних об'єктів оптико-електронними станціями

Визначення координат місця розташування ПО методом відкритого моніторингу повітряного простору мережею ОЕС для кожного моменту часу t здійснюється на основі результатів виміру трьох параметрів – кута місця $\beta(\omega)$, азимута $\alpha(\omega)$ і похилої дальності $D(\omega)$ від ОЕС до ПО. Припускаємо, що всі вимірювання здійснюються з випадковими помилками з нормальним законом розподілу і відомими параметрами:

$$\begin{aligned} \alpha_i(\omega) &\cong N(\bar{\alpha}_i, \sigma_{\alpha_i}^2); \\ \beta_i(\omega) &\cong N(\bar{\beta}_i, \sigma_{\beta_i}^2); \\ D_i(\omega) &\cong N(\bar{D}_i, \sigma_{D_i}^2), \end{aligned} \tag{2.40}$$

де $\bar{\alpha}_i = M_{\omega}\{\alpha_i(\omega)\}$, $\bar{\beta}_i = M_{\omega}\{\beta_i(\omega)\}$, $\bar{D}_i = M_{\omega}\{D_i(\omega)\}$ – математичні очікування;

$\sigma_{\alpha_i}^2$, $\sigma_{\beta_i}^2$, $\sigma_{D_i}^2$ – дисперсії помилок вимірювання азимута, кута місця і похилої дальності. В цьому випадку компоненти вектору координат ПО $\vec{X}_M(\omega) = \|X_M(\omega), Y_M(\omega), Z_M(\omega)\|^T$ в МСК ОЕС визначаються за такими

формулами:

$$Y_M(\omega) = D(\omega) \sin \beta(\omega), \quad (2.41)$$

$$X_M(\omega) = D(\omega) \cos \beta(\omega) \cos \alpha(\omega), \quad (2.42)$$

$$Z_M(\omega) = D(\omega) \cos \beta(\omega) \sin \alpha(\omega). \quad (2.43)$$

Компоненти вектору координат ПО $\vec{X}_M(\omega) = \|X_M(\omega), Y_M(\omega), Z_M(\omega)\|^T$ є нелінійними функціями випадкових аргументів. Це призводить до того, що нелінійні перетворення випадкових величин можуть привести не тільки до зміни параметрів функції випадкових аргументів, а й до зміни виду її функції розподілу. Тому визначення статистичних властивостей залежних змінних нелінійної стохастичної моделі від статистичних властивостей незалежних змінних можливе тільки наближено, з використанням чисельних методів. Розглянемо один з чисельних методів наближеного визначення оцінок статистичних параметрів нелінійної функції випадкових аргументів – метод лінеаризації функції. Коли величини $X_M(\omega), Y_M(\omega), Z_M(\omega)$ некорельовані, дисперсії компоненти вектору координат ПО дорівнюють:

$$\begin{aligned} \sigma_{X_M}^2 &= \left(\frac{\partial X_M}{\partial D} \right)^2 \Big|_m \cdot \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial X_M}{\partial \alpha} \right)^2 \Big|_m \cdot \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial X_M}{\partial \beta} \right)^2 \Big|_m \cdot \sigma_\beta^2, \\ \sigma_{Y_M}^2 &= \left(\frac{\partial Y_M}{\partial D} \right)^2 \Big|_m \cdot \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial Y_M}{\partial \alpha} \right)^2 \Big|_m \cdot \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial Y_M}{\partial \beta} \right)^2 \Big|_m \cdot \sigma_\beta^2, \\ \sigma_{Z_M}^2 &= \left(\frac{\partial Z_M}{\partial D} \right)^2 \Big|_m \cdot \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial Z_M}{\partial \alpha} \right)^2 \Big|_m \cdot \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial Z_M}{\partial \beta} \right)^2 \Big|_m \cdot \sigma_\beta^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Частинні похідні, що входять у вирази для дальності, дорівнюють:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_M}{\partial \alpha} &= -D(\omega) \sin \alpha(\omega) \cos \beta(\omega); \\
\frac{\partial X_M}{\partial \beta} &= -D(\omega) \cos \alpha(\omega) \sin \beta(\omega); \quad \frac{\partial X_M}{\partial D} = \cos \alpha(\omega) \cos \beta(\omega); \\
\frac{\partial Y_M}{\partial D} &= \sin \beta(\omega); \quad \frac{\partial Y_M}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial Y_M}{\partial \beta} = D(\omega) \cos \beta(\omega); \\
\frac{\partial Z_M}{\partial D} &= \sin \alpha(\omega) \cos \beta(\omega); \quad \frac{\partial Z_M}{\partial \alpha} = D(\omega) \cos \alpha(\omega) \cos \beta(\omega); \\
\frac{\partial Z_M}{\partial \beta} &= -D(\omega) \sin \alpha(\omega) \sin \beta(\omega).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Використовуючи ці вирази, відомі математичні очікування і дисперсії помилок вимірювання азимута, кута місця і похилої дальності, обчислюємо.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Як вже помічалось ОЕС для кожного моменту часу t нагляду повітряного об'єкта дозволяє здійснити непрямі вимірювання 3-х параметрів траєкторії повітряного об'єкту (α_t, β_t, D_t) . Значення цих параметрів для кожного моменту часу дозволяє здійснити обчислення проєкцій швидкості руху повітряного об'єкту на ці координати:

$$V_{\alpha t} = \frac{\alpha_t - \alpha_{t-1}}{\Delta t}, V_{\beta t} = \frac{\beta_t - \beta_{t-1}}{\Delta t}, V_{D_t} = \frac{D_t - D_{t-1}}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Таким чином в якості моделі траєкторії повітряного об'єкту будемо брати значення $(\alpha_t, \beta_t, D_t, V_{\alpha t}, V_{\beta t}, V_{D_t}), t = \overline{1, T}$.

Так як вимірювання параметрів траєкторії повітряного об'єкту здійснюється з похибками, то приймаємо, що всі вимірювані й обчислювані параметри траєкторії повітряного об'єкта є випадковими величинами з відомими статистичними характеристиками.

Непрямі вимірювання параметрів траєкторії повітряного об'єкту в сферичній системі координат розглядаємо як випадкові величини:

– $\tilde{\alpha}_t$ – виміряне значення азимуту в момент часу t

$$\tilde{A}_t = \alpha_t(\omega) \cong N(\bar{\alpha}_t, \sigma_{\alpha}^2), t = \overline{1, T}; \quad (3.2)$$

– $\tilde{\beta}_t$ – виміряне значення кут місця в момент часу t

$$\tilde{B}_t = \beta_t(\omega) \cong N(\bar{\beta}_t, \sigma_{\beta}^2), t = \overline{1, T}; \quad (3.3)$$

– \tilde{D}_t – виміряне значення похилій дальності в момент часу t

$$\tilde{D}_t = D_t(\omega) \cong N(\bar{D}_t, \sigma_D^2), \quad t = \overline{1, T}; \quad (3.4)$$

– $\tilde{V}_{\alpha t}$ – проекція швидкості на азимут в момент часу t

$$\tilde{V}_{\alpha t} = V_{\alpha t}(\omega) \cong N(\bar{V}_{\alpha t}, \sigma_V^2), \quad t = \overline{1, T}; \quad (3.5)$$

– $\tilde{V}_{\beta t}$ – проекція швидкості на кут місця в момент часу t

$$\tilde{V}_{\beta t} = V_{\beta t}(\omega) \cong N(\bar{V}_{\beta t}, \sigma_V^2), \quad t = \overline{1, T}; \quad (3.6)$$

– $\tilde{V}_{D t}$ – проекція швидкості на похилу дальності в момент часу t

$$\tilde{V}_{D t} = V_{D t}(\omega) \cong N(\bar{V}_{D t}, \sigma_V^2), \quad t = \overline{1, T}. \quad (3.7)$$

Непрямі вимірювання параметрів траєкторії повітряних об'єктів в прямокутній системі координат розглядаємо як випадкові величини:

$$X_t(\omega) = D_t(\omega) \cdot \cos \beta_t(\omega) \cdot \cos \alpha_t(\omega),$$

$$Y_t(\omega) = D_t(\omega) \cdot \sin \beta_t(\omega),$$

$$Z_t(\omega) = D_t(\omega) \cdot \cos \beta_t(\omega) \cdot \sin \alpha_t(\omega),$$

$$V_{X t}(\omega) = D_t(\omega) \cdot \cos \beta_t(\omega) \cdot \cos \alpha_t(\omega),$$

$$V_{Y t}(\omega) = D_t(\omega) \cdot \sin \beta_t(\omega),$$

$$V_{Z t} = D_t(\omega) \cdot \cos \beta_t(\omega) \cdot \sin \alpha_t(\omega).$$

Нехай $X_t(\omega) = X_1$, $Y_t(\omega) = X_2$, $Z_t(\omega) = X_3$. Тоді випадкова величина $Y = \varphi(X_1, X_2, X_3)$, при чому функція φ не лінійна, але мало відрізняється від лінійної в області практично можливих значень всіх аргументів. Потрібно

наближено знайти числові характеристики величини Y – математичне очікування m_Y та дисперсію D_Y .

Для вирішення задачі піддамо лінеаризації функцію

$$y = \varphi(x_1, x_2, x_3). \quad (3.8)$$

Не порушуючи спільності розглянемо нелінійну функцію $y = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ випадкових аргументів x_1, x_2, x_3 . Випадкові аргументи розглядаються як некорельовані випадкові величини та мають нормальний розподіл із відомими математичними очікуваннями та дисперсією, тобто:

$$x_1 = N(m_{x_1}, \sigma_{x_1}^2), \quad x_2 = N(m_{x_2}, \sigma_{x_2}^2), \quad x_3 = N(m_{x_3}, \sigma_{x_3}^2). \quad (3.9)$$

Зробимо розкладання функції (3.8) в ряд Тейлора в достатньо малій околиці точки $(m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3})$. Так як функція в цій околиці майже лінійна, її можна наближено замінити лінійною.

$$y = \varphi(x_1, x_2, x_3) \approx \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}) + \sum_{i=1}^3 \varphi'(m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3})(x_i - m_{x_i}) + O(x_1, x_2, x_3). \quad (3.10)$$

Зробимо перетворення:

$$[\varphi(x_1, x_2, x_3) - \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3})]^2 = \left[\sum_{i=1}^3 \varphi'(m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3})(x_i - m_{x_i}) \right]^2. \quad (3.11)$$

Беручи математичне очікування від обох частин рівності (3.11) отримуємо:

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2, \quad (3.12)$$

$$\varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}), \quad (3.13)$$

$$\text{де } \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m = \varphi'_{x_i}(m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}).$$

Вираз (3.12), (3.13) дозволяють обчислити статистичні характеристики (математичне очікування та дисперсію) залежної змінної y в залежності від статистичних характеристик (математичне очікування та дисперсію) незалежних змінних x_1, x_2, x_3 .

Вирази (3.12), (3.13) будемо використовувати для метрологічної атестації моделі траєкторних вимірювань (3.8):

$$X_t(\omega) = \bar{D}_t(\omega) \cdot \cos \bar{\beta}_t(\omega) \cdot \cos \bar{\alpha}_t(\omega),$$

$$Y_t(\omega) = \bar{D}_t(\omega) \cdot \sin \bar{\beta}_t(\omega),$$

$$Z_t(\omega) = \bar{D}_t(\omega) \cdot \cos \bar{\beta}_t(\omega) \cdot \sin \bar{\alpha}_t(\omega),$$

$$m_{x_t} = \bar{D}_t \cdot \cos \bar{\beta}_t \cdot \cos \bar{\alpha}_t,$$

$$m_{y_t} = \bar{D}_t \cdot \sin \bar{\beta}_t,$$

$$m_{z_t} = \bar{D}_t \cdot \cos \bar{\beta}_t \cdot \sin \bar{\alpha}_t,$$

$$\frac{\partial X_t}{\partial D_t} = \cos \bar{\beta}_t \cdot \cos \bar{\alpha}_t,$$

$$\frac{\partial X_t}{\partial \beta_t} = -\bar{D}_t \cdot \sin \bar{\beta}_t \cdot \cos \bar{\alpha}_t,$$

$$\frac{\partial X_t}{\partial \alpha_t} = -\bar{D}_t \cdot \cos \bar{\beta}_t \cdot \sin \bar{\alpha}_t,$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial D_t} = \sin \bar{\beta}_t,$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \alpha_t} = 0,$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \beta_t} = \bar{D}_t \cdot \cos \bar{\beta}_t,$$

$$\frac{\partial Z_t}{\partial D_t} = \cos \bar{\beta}_t \cdot \sin \bar{\alpha}_t,$$

$$\frac{\partial Z_t}{\partial \beta_t} = -\bar{D}_t \cdot \sin \bar{\beta}_t \cdot \sin \bar{\alpha}_t,$$

$$\frac{\partial Z_t}{\partial \alpha_t} = -\bar{D}_t \cdot \cos \bar{\beta}_t \cdot \cos \bar{\alpha}_t,$$

$$\sigma_X^2 = (\cos \bar{\beta}_t \cos \bar{\alpha}_t)^2 \sigma_{x_1}^2 + (-\bar{D}_t \sin \bar{\beta}_t \cos \bar{\alpha}_t)^2 \sigma_{x_2}^2 + (-\bar{D}_t \cos \bar{\beta}_t \sin \bar{\alpha}_t)^2 \sigma_{x_3}^2,$$

$$\sigma_Y^2 = (\sin \bar{\beta}_t)^2 \sigma_{x_1}^2 + (-\bar{D}_t \cos \bar{\beta}_t)^2 \sigma_{x_2}^2,$$

$$\sigma_Z^2 = (\cos \bar{\beta}_t \sin \bar{\alpha}_t)^2 \sigma_{x_1}^2 + (-\bar{D}_t \sin \bar{\beta}_t \sin \bar{\alpha}_t)^2 \sigma_{x_2}^2 + (-\bar{D}_t \cos \bar{\beta}_t \cos \bar{\alpha}_t)^2 \sigma_{x_3}^2.$$

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

На рисунку 4.1 наведено залежності зміни значень систематичної помилки ρ оцінки координат місця розташування ПО від зміни азимута при різних значеннях математичних очікувань помилок юстирування платформи ОЕС, різних значеннях похилої дальності до ПО і кута місця при зміні азимута з кроком $1,0^\circ$.

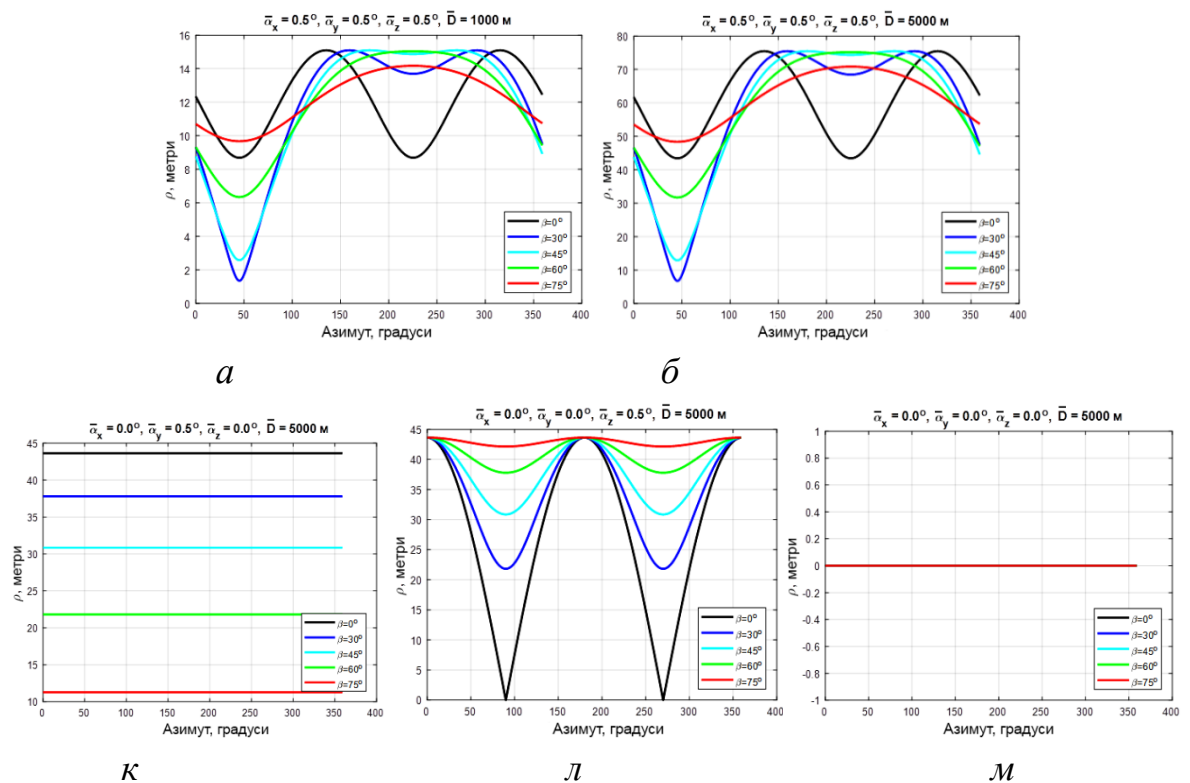


Рисунок 4.1 – Залежності інструментальної похибки від зміни азимута

Чисельні значення математичних очікувань початкових даних представлені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Чисельні значення математичних очікувань початкових даних

МСК	Координати об'єкта в МСК (напрямні коефіцієнти в МСК)			Кути повороту ОПП		Дальність до об'єкта D , км
	X, км	Y, км	Z, км	Азимут α , °	Угол места β , °	
ІАЦ	-5.050	8.972	18.117	105.575478	25.502990	20.838
ОЕС 1	-0.721	8.979	15.613	92.644010	29.876740	18.025
ОЕС 2	-5.029	8.954	23.128	102.267551	20.722113	25.306
ОЕС 3	-9.394	8.972	15.609	121.040886	26.219576	20.307
ЗУПО 1	-0.705	8.965	20.620	91.958186	23.485822	22.496
ЗУПО 2	-9.377	8.958	20.624	114.449606	21.573765	24.362
ЗУПО 3	-5.063	8.983	13.105	111.123595	32.595010	16.675

Чисельні значення математичних очікувань вимірювання азимута, кута місця і похилої дальності приймалися рівними:

для ОЕС 1:

$$\bar{\alpha}_{\text{ОЕС1}} = \frac{92,644010}{180\pi} \text{ рад.}, \sigma_{\alpha_{\text{ОЕС1}}}^2 = \frac{0,2e^{-3}}{3} \text{ рад.},$$

$$\bar{\beta}_{\text{ОЕС1}} = \frac{29,876740}{180\pi} \text{ рад.}, \sigma_{\beta_{\text{ОЕС1}}}^2 = \frac{0,2e^{-3}}{3} \text{ рад.},$$

$$\bar{D}_{\text{ОЕС1}} = 18,025e^3 \text{ м.}, \sigma_{D_{\text{ОЕС1}}}^2 = 0,2 \text{ м.}$$

для ОЕС 2:

$$\bar{\alpha}_{\text{ОЕС2}} = \frac{102,267551}{180\pi} \text{ рад.}, \sigma_{\alpha_{\text{ОЕС2}}}^2 = \frac{0,2e^{-3}}{3} \text{ рад.},$$

$$\bar{\beta}_{\text{ОЕС2}} = \frac{20,722113}{180\pi} \text{ рад.},$$

$$\sigma_{\beta_{\text{ОЕС2}}}^2 = \frac{0,2e^{-3}}{3} \text{ рад.},$$

$$\bar{D}_{\text{ОЕС2}} = 25,306e^3 \text{ м.},$$

$$\sigma_{D_{\text{ОЕС2}}}^2 = 0,2 \text{ м.}$$

для ОЕС 3:

$$\bar{\alpha}_{\text{ОЕС3}} = \frac{121,040886}{180\pi} \text{ рад.},$$

$$\sigma_{\alpha_{\text{ОЕС3}}}^2 = \frac{0,2e^{-3}}{3} \text{ рад.},$$

$$\bar{\beta}_{\text{ОЕС3}} = \frac{26,219576}{180\pi} \text{ рад.},$$

$$\sigma_{\beta_{\text{ОЕС3}}}^2 = \frac{0,2e^{-3}}{3} \text{ рад.},$$

$$\bar{D}_{\text{ОЕС3}} = 20,307e^3 \text{ м.},$$

$$\sigma_{D_{\text{ОЕС3}}}^2 = 0,2 \text{ м.}$$

Результати вимірювань азимута, кута місця і похилої дальності моделювалися обчисленням реалізацій нормально розподілених випадкових величин (ряд зі 100 значеннями) з цими значеннями математичних очікувань і дисперсій. На рисунку 4.2 представлені результати вимірювань азимута, кута місця і похилої дальності для ОЕС 1, ОЕС 2, ОЕС 3.

У таблиці 4.2 наведені значення математичних очікувань і СКО азимута, кута місця, похилої дальності для кожної станції (задані значення для моделювання і значення, отримані в результаті оцінки цих параметрів після генерування випадкових величин).

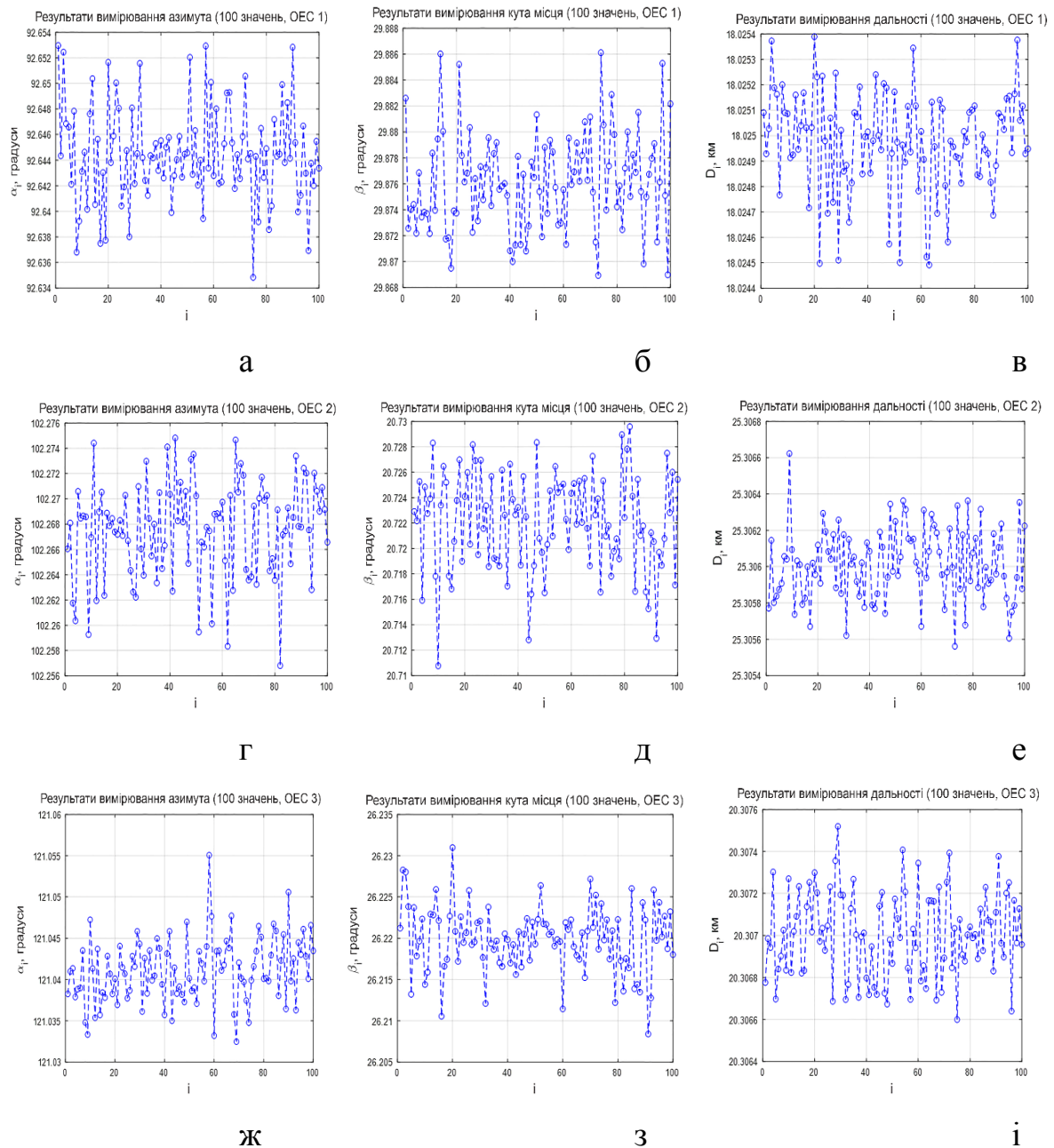


Рисунок 4.2 – Результати вимірювань азимута, кута місця і похилої дальності для ОЕС 1, ОЕС 2, ОЕС 3

На рисунку 4.3 представлені результати обчислення оцінки відстані $\rho_i = \sqrt{(X_i - x_0)^2 + (Y_i - y_0)^2 + (Z_i - z_0)^2}$ між координатами справжнього стану ПО і координатами оцінки положення ПО, отриманими для кожної з ОЕС.

Таблиця 4.2 – Значення математичних очікувань і СКО азимута, кута місця, похилої дальності для кожної станції

	ОЕС 1	ОЕС 2	ОЕС 3
$\bar{x}, \text{ м}$	-721.112921	-5029.101734	-9393.919864
$\sigma_x, \text{ м}$	1.038844	1.563144	1.142725
$\bar{y}, \text{ м}$	8978.724698	8954.155112	8971.989159
$\sigma_y, \text{ м}$	1.034584	1.606381	1.297887
$\bar{z}, \text{ м}$	15612.889888	23128.457278	15608.720223
$\sigma_z, \text{ м}$	0.631407	0.674171	0.819130
$\bar{\rho}, \text{ м}$	1.415	2.083	1.678
$\sigma_{\rho}, \text{ м}$	0.758	1.047	0.915



а



б

Рисунок 4.3 – Результати обчислення оцінки відстані між координатами справжнього стану ПО і координатами оцінки положення ПО, отриманими для кожної з ОЕС

У таблиці 4.3 наведені математичні очікування і СКО координат об'єкту $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ в МСК кожної станції, які отримані в результаті перерахунку з наборів $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{D})$.

Таблиця 4.3 – Математичні очікування і СКО координат об'єкту (\tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z})
в МСК кожної станції

	ОЕС 1	ОЕС 2	ОЕС 3
\bar{x} , м	-721.112921	-5029.101734	-9393.919864
σ_x , м	1.038844	1.563144	1.142725
\bar{y} , м	8978.724698	8954.155112	8971.989159
σ_y , м	1.034584	1.606381	1.297887
\bar{z} , м	15612.889888	23128.457278	15608.720223
σ_z , м	0.631407	0.674171	0.819130
$\bar{\rho}$, м	1.415	2.083	1.678
σ_{ρ} , м	0.758	1.047	0.915

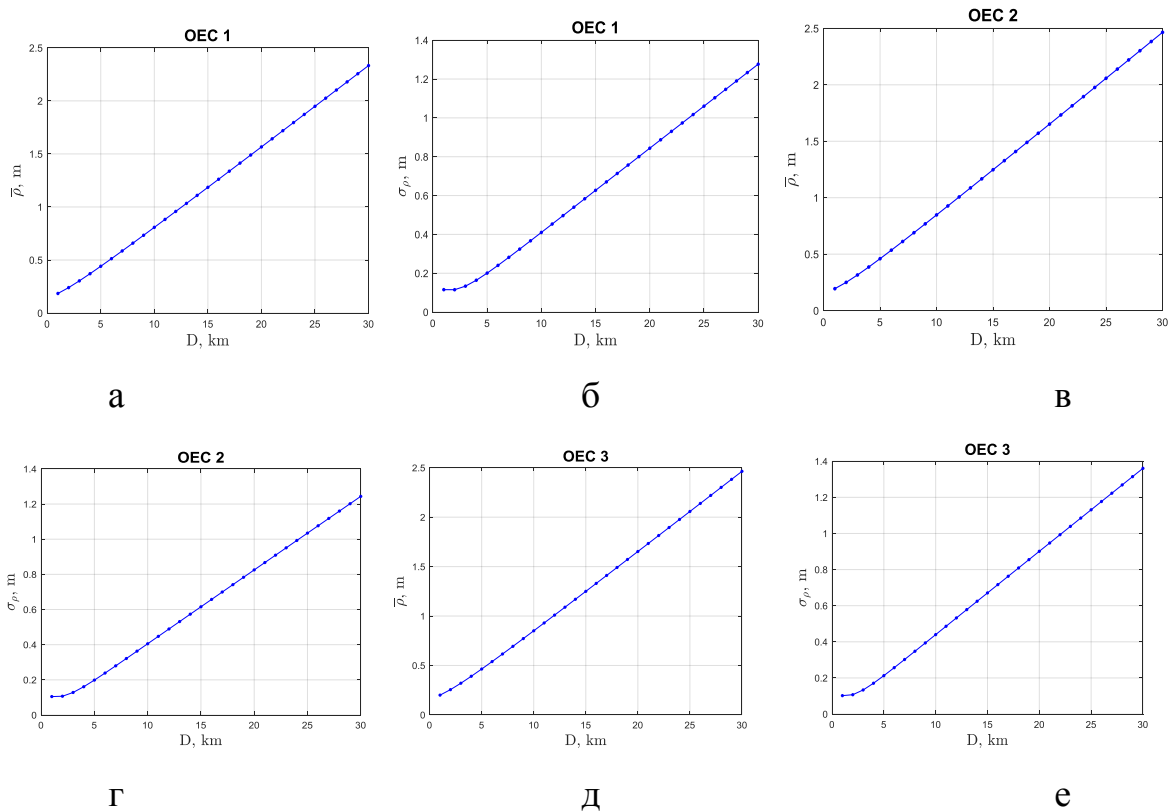


Рисунок 4.4 – Графіки залежності $\bar{\rho}$ і σ_{ρ} від дальності до ПО для кожної ОЕС

Порівняльний аналіз чисельних значень оцінок математичних очікувань і СКО, отриманих аналітичним методом і методом імітаційного моделювання представлений в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4 – Чисельні значення оцінок математичних очікувань і СКО
для $m_\alpha = \pi / 6$, $m_\beta = \pi / 4$

	m_D, M	m_{X_M}, M	m_{Y_M}, M	m_{Z_M}, M	σ_{X_M}, M	σ_{Y_M}, M	σ_{Z_M}, M
Модель	100	61.2372	70.7107	35.3553	0.1226	0.1415	0.0709
Модель	500	306.1862	353.5534	176.7767	0.1247	0.1434	0.0745
Розрахунок		306.1746	353.5342	176.7731	0.1246	0.1410	0.0751
Модель	1000	612.3724	707.1068	353.5534	0.1312	0.1491	0.0850
Модель	3000	1.8371e+03	2.1213e+03	1.0607e+03	0.1871	0.2000	0.1581
Модель	5000	3.0619e+03	3.5355e+03	1.7678e+03	0.2656	0.2749	0.2461
Розрахунок		3.0619e+03	3.5355e+03	1.7678e+03	0.2719	0.2662	0.2444

ВИСНОВКИ

В цій роботі ми на основі результатів прямих вимірювань параметрів горизонтування платформи оптико-електронної станції розробили метод аналізу інструментальних похибок вимірювання параметрів траєкторій руху літальних апаратів оптико-електронними станціями. На основі прямих вимірювань (α_p, β_p, D_p) ми розробили метод аналізу випадкових похибок вимірювання параметрів траєкторій руху повітряних об'єктів оптико-електронними станціями. На основі результатів вимірювань ми оцінили вектори $\|\bar{X}_t, \bar{Y}_t, \bar{Z}_t\|^T$, $\|\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z\|^T$.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Антонов А. В. Системный анализ. Москва : Высшая школа, 2004. 454 с.
2. Волкова В. Н., Денисов А. А. Основы теории систем и системного анализа. Санкт-Петербург : Изд-во СПбГТУ, 1997. 510 с.
3. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва : Радио и связь, 1993. 278 с.
4. Chui C. K., Chen G. Kalman Filtering with Real-Time Applications. 1986. 350 p.
5. Mathematical model and method of optimal placement of optical-electronic systems for trajectory measurements of air objects at test / A.D. Tevjashev, I.S. Shostko, M.V. Neofitnyi [and others] // Odessa Astronomical Publications. 2019. V. 32. P. 171–175.