

Лавинный пробой в данном случае начинается раньше, причем зарождение лавины происходит в области дефекта, что приводит к быстрому перегреву всей зоны канал-сток и катастрофическому отказу. Данные выводы подтверждаются и полученными критерияльными зависимостями Вунша-Белла. Кривая 2 на рис.3,а,б соответствует однородному каналу, а кривая 1 получена с учетом дефекта в виде области с избыточным легированием в канале. Время выхода транзистора из строя в случае наличия такого дефекта меньше, чем в случае однородного канала.

При наличии дефекта в виде области с недостаточным легированием увеличение тока стока (кривые 5, 6 на рис.2) обусловлено увеличением длины свободного пролета носителей тока в канале. В этом случае электроны, пролетая канал, практически не испытывают столкновений с ионами примеси, соответственно время релаксации импульса больше, и они успевают набрать большую энергию. В результате лавинный пробой начинается, как и при наличии дефекта с избыточным легированием в канале, при более низких напряжениях, чем в случае однородного канала. Он начинается в области стока, неравновесные электроны успевают быстро попасть на сток, токовый шнур получается коротким, и пробой не имеет столь резкий и критический характер (кривая 3 на рис.3,а,б). При этом время выхода транзистора из строя в результате пробоя больше, чем в двух других случаях. В области рабочих напряжений наличие дефекта с недостаточным легированием приводит к ухудшению чувствительности транзистора (кривые 5, 6 на рис.2).

#### 4. Заключение

В результате проведенных исследований получены новые данные по влиянию неоднородности в канале ПТШ на его ВАХ и пороговые напряжения пробоя.

*Практическую ценность* имеет вывод о том, что наличие неоднородности в канале транзистора приводит к ухудшению усилительных характеристик, сни-

жает пороговое напряжение пробоя, однако наличие дефекта в виде обедненной области в канале приводит к более медленному течению пробоя и транзистор может выдержать внешнее воздействие более длительное время. Таким образом, неоднородность в канале может иметь и положительный эффект, увеличивая пороговое напряжение пробоя ПТШ.

**Литература:** 1. Wunsch D.C., Bell R.R. Determination of Threshold Failure Levels of Semiconductor Diodes and Transistor Due to Pulsed Voltage // IEEE Trans. On Nucl.Sci. 1968. NS-15, N6. P.244-256. 2. Antinone J. Electrical Overstress Protection for Electronic Devices. 1986, New York. 387p. 3. Зуев С.А., Старостенко В.В., Терещенко В.Ю., Чурюмов Г.И., Унжаков Д.А., Григорьев Е.В. Лавинный пробой в ПТШ на GaAs по результатам численного моделирования // Прикладная радиоэлектроника. 2005. Т.4, №3. С.353–357. 4. Зуев С.А., Старостенко В.В., Терещенко В.Ю., Чурюмов Г.И., Шадрин А.А. Модель ПТШ субмикронных размеров на кремнии. Ч.1, 2 // Радиоэлектроника и информатика, 2004. №3, 4. С.47–53, 17-21.

Поступила в редколлегию 16.05.2006

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Чурюмов Г.И.

**Ахрамович Леонид Николаевич**, доцент каф. теоретической физики Таврического национального университета. Научные интересы: квантовые размерные эффекты в полупроводниках, сверхпроводимость.

**Зуев Сергей Александрович**, ст. преподаватель каф. радиофизики Таврического национального университета. Научные интересы: моделирование полупроводниковых приборов СВЧ. Адрес: Украина, 95000, Симферополь, ул. Лермонтова, 13, кв. 62, тел.: раб. (0652)230360, дом. (0652)573683, e-mail: sa\_zuev@tnu.crimea.ua

**Старостенко Владимир Викторович**, канд. физ.-мат. наук, зав. кафедрой радиофизики ТНУ. Научные интересы: моделирование вакуумных и твердотельных устройств СВЧ, исследование деградационных процессов. E-mail: starostenko@crimea.com

**Терещенко Владимир Юрьевич**, аспирант каф. радиофизики ТНУ. Научные интересы: моделирование вакуумных и твердотельных устройств СВЧ.

УДК 621.385.624

## МНОГОПЕРИОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАГНЕТРОНА

*ЧУРЮМОВ Г.И., БАСРАВИ К.М.,  
СИВОКОНЬ К.В.*

Предлагается многопериодная двумерная математическая модель магнетронного генератора для исследования энергетических и частотных характеристик с учетом процессов переноса (локализации) тепла, выделяемого оседающими электронами на электродах прибора (катоде и аноде). Проводится анализ точности решения самосогласованной системы уравнений движения, возбуждения и Пуассона для расчета сил пространственного заряда с учетом особенностей пространственной и временной дискретизации, а также оценивается степень дискретного представления электронного потока (заряда крупной ча-

стицы) и обосновывается выбор исходных (начальных) данных. Рассматриваются основные причины, определяющие рост вычислительной погрешности и приводящие к вычислительной неустойчивости решения. Предлагаются новые более точные алгоритмы вычисления энергии вылета частиц на электроды прибора.

### 1. Введение

Результатом исследования сложных нелинейных процессов взаимодействия электронного потока с электромагнитной волной является создание большого количества математических моделей: от линейных аналитических до нелинейных численных моделей. Основы численного моделирования нелинейных процессов в магнетронных генераторах методом крупных частиц были изложены в работах Г.Г. Моносова, J.R.M. Vaughan, R.W. Hockney, S.P. Yu, G.P. Kooyers, O. Bunemann, Г.Ф. Филимонова, А.С. Рошаля, А.А. Шадрина, D.M. MacGregor, A. Drobot, В.Б. Байбурина и др. Полученные результаты исследований

позволили объяснить и решить многие сложные вопросы нелинейного взаимодействия в магнетронах. В первую очередь это касается роли сил пространственного заряда (ПЗ) и их влияния на механизм токоотбора с катода, включая процессы ограничения эмиссии ПЗ и образования виртуального катода, особенностей группировки (фазировки) электронного потока и образования спиц ПЗ, что способствовало улучшению энергетических характеристик магнетронов (повышение выходной мощности и КПД) и пониманию характера влияния неоднородностей распределений статических магнитного и электрического полей на работу прибора.

С другой стороны, широкое применение магнетронов в области радиолокации и СВЧ технологий обусловило повышенный интерес к изучению их энергетических, частотных и нагрузочных характеристик [см., например, 1-3], а также к проблеме возбуждения побочных и паразитных колебаний [4]. Методом математического моделирования проводятся исследования новых конструкций магнетронов (комбинированный или двухкаскадный магнетрон [5]). Данные исследования направлены на решение важных задач, среди которых следует выделить улучшение частотных характеристик магнетронов путем применения внешней синхронизации (когерентный магнетрон), исследование разделения функций работы прибора, обеспечивающих высокую стабильность частоты генерации с получением большой выходной мощности и т.п. Последние результаты экспериментальных исследований причин нестабильности колебаний в магнетронах связаны с изучением влияния температуры на качество генерируемых магнетроном колебаний и применением режима синхронизации для улучшения работы прибора [6].

Целью данного исследования является разработка двумерной многопериодной математической модели магнетрона. Особенностью предлагаемой модели (по сравнению с существующими) является возможность проведения полномасштабного моделирования работы магнетрона с учетом влияния теплового режима работы на стабильность генерируемых магнетроном колебаний.

## 2. Исходные положения

Для проведения исследований используются следующие исходные ограничения.

1. Рассматривается двумерное приближение в полярной системе координат (в плоскости  $r - \varphi$ , где  $r$  и  $\varphi$  – радиальная и азимутальная координаты неподвижной (лабораторной) системы координат), полагая,

$$\text{что } \frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

2. Не учитываются релятивистские эффекты, т.е. предполагается, что средняя скорость движения электрона  $v_e \ll c$ ,  $c$  – скорость света в вакууме.

3. Используется приближение «гладкого» анода, т.е. рассматривается неразрезная структура анодного блока.

4. Электронно-волновые процессы рассматриваются в подвижной системе координат  $(r, \varphi')$ , где  $\varphi' = \varphi - \Omega t$ ,  $\Omega$  – «холодная» угловая скорость вращения ВЧ волны.

## 3. Основные уравнения математической модели

Пространство взаимодействия магнетрона схематично представлено на рис. 1. На рис. 1, а-г показаны различные конструкции анодных блоков магнетронов. Как видно из рис. 1, д, электроны, эмитируемые с катода 1, образуют замкнутый электронный поток 2, который вращается в пространстве взаимодействия магнетрона 3 и возбуждает электромагнитные колебания в резонансной системе 4.

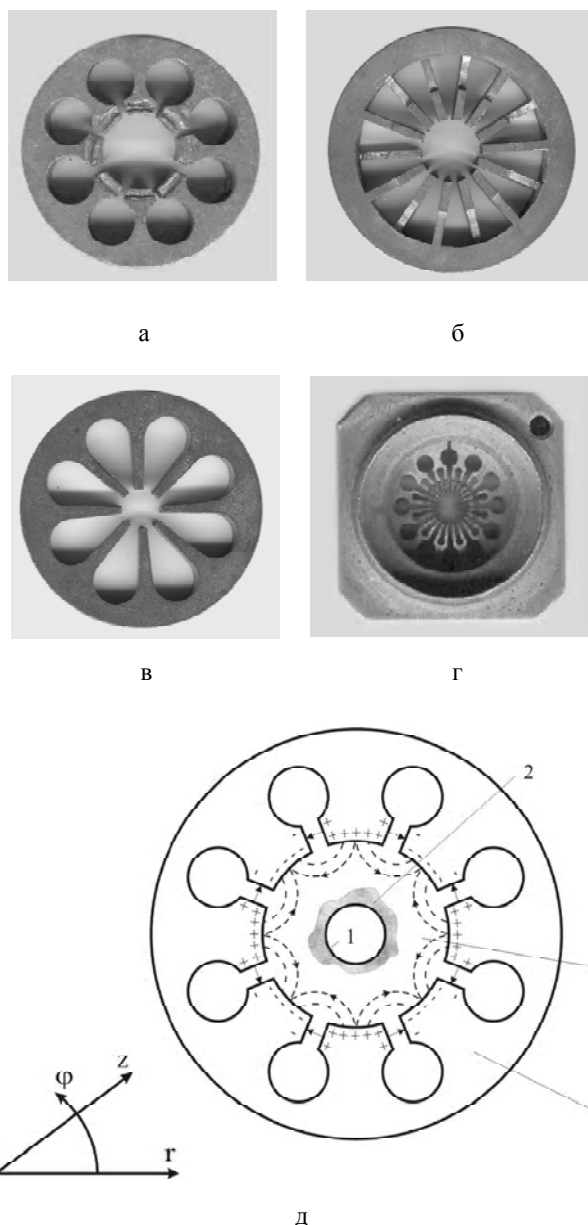


Рис. 1. Схема пространства взаимодействия магнетрона

Взаимодействие электронного потока с ВЧ полем резонансной системы описывается самосогласованной системой уравнений, включающей систему уравнения Максвелла – Лоренца для электронов, движущихся в вакууме ( $\epsilon' = 1$  и  $\mu' = 1$ ):

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho; \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (4)$$

дополненную системой материальных уравнений с условием, что не учитываются потери в стенках резонансной системы (удельная электропроводность  $\sigma = 0$ ):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}; \quad (\epsilon_0 = 0.886 \cdot 10^{-11} \frac{\Phi}{M}); \quad (5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}; \quad (\mu_0 = 1.256 \cdot 10^{-6} \frac{\Gamma_H}{M}) \quad (6)$$

и уравнением для плотности тока возбуждения (плотность конвекционного тока):

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{конв}} = \rho \vec{v}, \quad (7)$$

где  $\rho = \frac{dQ}{dt}$  – плотность ПЗ;  $\vec{v}$  – вектор скорости движения электронов, а также систему уравнений движения для электрона:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\eta(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}); \quad (8)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad (9)$$

Здесь  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  – векторы напряженности электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля;  $\vec{r}$  – радиус-вектор электрона;  $\eta_e = e/m$  – приведенный заряд электрона;  $e$  и  $m$  – заряд и масса покоя электрона.

Решение систем уравнений (1) – (4) и (8), (9) проводится при соответствующих граничных (для составляющих напряженностей электрического и магнитного полей) и начальных (для координат и скоростей электронов) условиях. В качестве метода решения применяется метод конечных разностей (Finite Different Time Domain (FDTD) Method [7]). Использование конечно-разностной схемы “leap-frog” [8] позволяет перейти от дифференциальной формы записи самосогласованной системы уравнений к алгебраической

системе уравнений для составляющих электромагнитного поля. Необходимо отметить, что практическая реализация такого подхода возможна для наиболее простых конструкций анодных блоков магнетронов (например, лопаточных резонансных систем (рис. 1, д)). Более сложные случаи (например, при использовании систем со связками [9]) требуют применения метода конечных элементов (Finite Elements Method (FEM) [10]), который точнее описывает сложные границы области расчета. В целом применение таких методов значительно усложняет весь процесс моделирования и требует значительных вычислительных ресурсов. В целях ускорения процесса вычислений применяются специальные высокопроизводительные аппаратные средства (многопроцессорные ЭВМ) и/или вычислительные алгоритмы, допускающие распараллеливание вычислительного процесса.

С другой стороны, применение FDTD – метода позволяет определить значения составляющих напряженностей электромагнитного поля  $\vec{E}(E_r, E_\phi, E_z)$  и  $\vec{H}(H_r, H_\phi, H_z)$ , которые представляют собой сумму вихревой и потенциальной компонент электромагнитного поля. Невозможность разделить значения данных компонент в процессе расчетов не позволяет оценить их роль и влияние (особенно влияние поля ПЗ) на механизм электронно-волнового взаимодействия. Это приводит к потере физической наглядности расчетов и, в ряде случаев, к невозможности объяснения полученных результатов.

Значительно более простой подход к самосогласованному решению системы уравнений для электромагнитного поля (1) – (4) и уравнений движения электронов (8) и (9) был предложен в [11]. Подход основан на предварительном разделении электромагнитного поля и плотности тока на вихревые и потенциальные компоненты:

$$\vec{E} = \vec{E} + \vec{E}; \quad (10)$$

$$\vec{H} = \vec{H} + \vec{H}; \quad (11)$$

$$\vec{J} = \vec{J} + \vec{J}, \quad (12)$$

где  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{J}$  – вихревые компоненты поля и тока ( $\text{div} \vec{E} = 0$ ,  $\text{div} \vec{H} = 0$  и  $\text{div} \vec{J} = 0$ );  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{J}$  – потенциальные компоненты поля и тока ( $\text{rot} \vec{E} = 0$ ,  $\text{rot} \vec{H} = 0$  и  $\text{rot} \vec{J} = 0$ ). Такое разделение компонент поля и тока позволяет в качестве вихревого поля рассматривать излучение электронов и/или собственные поля резонансных систем, а потенциальные поля связывать со статическими электрическим и магнитным полями, а также с полем ПЗ (квазистатическое приближение), т.е.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{пз}};$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0,$$

где

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= E_{0r}\vec{r}_0 + E_{0\phi}\vec{\phi}_0 + E_{0z}\vec{z}_0 = \\ &= \frac{U_a}{r \cdot \ln(r_a/r_r)} \vec{r}_0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\vec{H}_0 = H_{0r}\vec{r}_0 + H_{0\phi}\vec{\phi}_0 + H_{0z}\vec{z}_0 = H_{0z}\vec{z}_0 \quad (14)$$

– выражения для статических электрического и магнитного полей;  $U_a$  – анодное напряжение,  $r_a$  и  $r_r$  – радиусы анода и катода, соответственно;

$$\vec{E}_{пз} = -\text{grad } U(r, \phi) \quad (15)$$

– вектор напряженности поля ПЗ;  $U(r, \phi)$  – потенциал поля ПЗ.

С учетом выражений (10) – (12) система уравнений для поля (1) – (4) распадается на систему уравнений для вихревых компонент поля:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (16)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (17)$$

и уравнение Пуассона для расчета поля ПЗ:

$$\Delta U(r, \phi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (18)$$

Система уравнений движения электрона в случае нерелятивистского приближения, т.е. при условии, что пренебрегается действием вихревой компоненты магнитного поля ( $\vec{H} = 0$ ), имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\eta(\vec{E}_0 + \vec{E}_{пз} + \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0); \quad (19)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}. \quad (20)$$

Таким образом, процесс моделирования взаимодействия электромагнитного поля с электронным потоком сводится к совместному решению системы уравнений для вихревых компонент поля (16) и (17), уравнения Пуассона (18) для расчета сил кулоновского взаимодействия и системы уравнений движения (19) и (20) для определения возбуждающего конвекционного тока  $\vec{J}$ . Такое решение является самосогласованным.

**Система уравнений поля.** Для решения системы уравнений поля (16) и (17) воспользуемся общей теорией возбуждения добротных колебательных систем электронным потоком, предложенной Л.А. Вайнштейном в [12] и достаточно хорошо апробированной автором применительно к магнетронным генераторам

в [13]. Согласно данной теории электронный поток возбуждает в колебательной системе магнетрона электромагнитные поля на частотах, близких к частотам собственных видов колебаний “холодной” резонансной системы. Условием возбуждения собственных видов колебаний является выполнение условия синхронизма в движениях электронного потока и ВЧ волн, т.е. когда  $\Omega_e = \Omega_\gamma$ , где  $\Omega_e$  – угловая скорость вращения замкнутого электронного потока;  $\Omega_\gamma = \omega/\gamma$  – угловая частота вращения ВЧ поля заданного вида колебания;  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота генерируемых колебаний;  $\gamma = n + mN$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots, N/2$  – номер основного вида колебаний ( $m = 0$ );  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  – целые числа, соответствующие номерам высших пространственных гармоник. Данное условие выполняется автоматически при увеличении анодного напряжения от нуля до рабочего (порогового) значения, вызывая последовательно возбуждение различных видов колебаний в резонансной системе. Каждый вид колебаний соответствует замкнутой вращающейся ВЧ волне, содержащей вдоль окружности резонансного анодного блока целое число  $\gamma$  полных ВЧ периодов (или замедленных длин волн).

Собственные виды колебаний “холодной” резонансной колебательной системы в пространстве взаимодействия магнетрона, представленном на рис. 1, д, определяются из решения однородной системы уравнений Максвелла для свободного пространства. Полагая в (16) и (17), что внешний источник тока отсутствует, т.е.  $\vec{J} = 0$ , окончательно получаем выражения для компонент собственного электромагнитного поля в пространстве взаимодействия магнетрона в виде [14]:

$$\begin{aligned} E_\phi(r, \phi) &= E_m \frac{N\theta}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \gamma\theta}{\gamma\theta} \right) \times \\ &\times \frac{Z'_\gamma(kr)}{Z'_\gamma(kr_a)} \cdot e^{j\gamma\phi}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} E_r(r, \phi) &= -jE_m \frac{N\theta}{\pi kr} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma \cdot \frac{\sin \gamma\theta}{\gamma\theta} \times \\ &\times \frac{Z_\gamma(kr)}{Z_\gamma(kr_a)} \cdot e^{j\gamma\phi}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $2\theta$  – угловая ширина зазора между ламелями резонансной системы;

$$Z_\gamma(kr) = J_\gamma(kr) - \frac{J'_\gamma(kr)}{N'_\gamma(kr_a)} \cdot N_\gamma(kr); \quad (23)$$

$$Z'_\gamma(kr) = J'_\gamma(kr) - \frac{J'_\gamma(kr_r)}{N'_\gamma(kr_a)} \cdot N'_\gamma(kr) \quad (24)$$

– комбинации функций Бесселя и Неймана.

В выражениях (21) и (22) отношения  $\frac{Z'_\gamma(kr)}{Z'_\gamma(kr_a)}$  и  $\frac{\gamma Z'_\gamma(kr)}{kr Z'_\gamma(kr_a)}$  представляют собой структурные функции ВЧ поля, амплитуда которого зависит от радиуса-вектора  $\vec{r}$ . Если выполняется условие  $kr_a \ll \gamma$  (длинноволновое приближение), выражения для структурных функций можно упростить, заменив их более простыми для вычисления:

$$\Psi_r^\gamma(\vec{r}) = \frac{Z'_\gamma(kr)}{Z'_\gamma(kr_a)} \approx \left(\frac{r}{r_a}\right)^{\gamma-1} \cdot \left[ \frac{1 - \left(\frac{r_\Gamma}{r}\right)^{2\gamma}}{1 - \left(\frac{r_\Gamma}{r_a}\right)^{2\gamma}} \right]; \quad (25)$$

$$\Psi_\varphi^\gamma(\vec{r}) = \frac{\gamma Z'_\gamma(kr)}{kr Z'_\gamma(kr_a)} \approx \left(\frac{r}{r_\Gamma}\right)^{\gamma-1} \cdot \left[ \frac{1 + \left(\frac{r_\Gamma}{r}\right)^{2\gamma}}{1 - \left(\frac{r_\Gamma}{r_a}\right)^{2\gamma}} \right]. \quad (26)$$

Таким образом, полученные выражения для компонент поля (21) и (22), с учетом (25) и (26), позволяют определить полное ВЧ поле собственного вида колебания “холодной” резонансной системы в виде:

$$\vec{E}_\gamma(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{-j\omega_\gamma t} \right\}, \quad (27)$$

где  $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \varphi) \vec{r}^0 + E_\varphi(r, \varphi) \vec{\varphi}^0$ ,  $\omega_\gamma = \omega'_\gamma - j\omega''_\gamma$  – комплексные частоты собственных видов колебаний;  $\omega'_\gamma$  – круговая “холодная” частота собственного вида;  $\omega''_\gamma$  – коэффициент затухания.

Общее решение неоднородной системы уравнений Максвелла (16) и (17) относительно вихревых компонент ВЧ поля можно представить в виде [15]:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_\gamma \left\{ C_\gamma \vec{E}_\gamma + C_{-\gamma} \vec{E}_{-\gamma} \right\}; \quad (28)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_\gamma \left\{ C_\gamma \vec{H}_\gamma + C_{-\gamma} \vec{H}_{-\gamma} \right\}, \quad (29)$$

где коэффициенты разложения  $C_\gamma$  и  $C_{-\gamma}$  удовлетворяют следующим выражениям:

$$C_\gamma = -\frac{j}{2(\omega - \omega'_\gamma)} \cdot \frac{1}{N_\gamma} \int_V \vec{j} \vec{E}_\gamma dV; \quad (30)$$

$$C_{-\gamma} = -\frac{j}{2(\omega + \omega''_\gamma)} \cdot \frac{1}{N_\gamma} \int_V \vec{j} \vec{E}_{-\gamma} dV. \quad (31)$$

Данные коэффициенты представляют собой медленно меняющиеся функции времени (по сравнению с  $e^{-j\omega_\gamma t}$ ). Повторяя рассуждения, приведенные в работе

[13], можно показать, что данные коэффициенты удовлетворяют уравнению возбуждения:

$$-\frac{dC_\gamma}{dt} + j(\omega - \omega'_\gamma)C_\gamma = \frac{1}{2N_\gamma} \int_V \vec{J}(t) \vec{E}_\gamma dV, \quad (32)$$

где

$$N_\gamma = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon' \varepsilon_0 \vec{E}_\gamma^2 dV = -\frac{1}{2} \int_V \mu' \mu_0 \vec{H}_\gamma^2 dV \quad (33)$$

– норма собственного вида колебаний резонансной колебательной системы.

Полагаем, что  $C_\gamma = |C_\gamma| e^{j\vartheta_\gamma}$ , где  $|C_\gamma|$  и  $\vartheta_\gamma = (\omega - \omega'_\gamma)t = \Delta\omega t$  – модуль амплитуды и фаза “горячей” ВЧ волны. После подстановки данного выражения в уравнение возбуждения (32) и разделения его на действительную и мнимую части получаем систему уравнений для мгновенных значений амплитуды и фазы возбуждаемого вида колебаний:

$$\frac{d\tilde{V}_\gamma}{dT} + \frac{\omega'_\gamma}{\omega_c} \cdot \frac{1}{2Q_H} \cdot \tilde{V}_\gamma = -\chi_\gamma \sum_i \left\{ (1 + \Theta^i) \times \right. \\ \left. \times \Psi_\varphi^\gamma(\mathbf{R}^i) \cdot \text{Gos}(\bar{\Phi}_\gamma^i) + u_r^i \cdot \Psi_r^\gamma(\mathbf{R}^i) \cdot \sin(\bar{\Phi}_\gamma^i) \right\}; \quad (34)$$

$$\frac{d\vartheta_\gamma}{dT} = \frac{\chi_\gamma}{\tilde{V}_\gamma} \cdot \sum_i \left\{ u_r^i \cdot \Psi_r^\gamma(\mathbf{R}^i) \cdot \text{Gos}(\bar{\Phi}_\gamma^i) - \right. \\ \left. - (1 + \Theta^i) \cdot \Psi_\varphi^\gamma(\mathbf{R}^i) \cdot \sin(\bar{\Phi}_\gamma^i) \right\},$$

где

$$\chi_\gamma = \frac{\omega}{\omega_\Gamma} \cdot \frac{N}{\pi\gamma} \cdot \frac{Q_e}{2U_a C_{\text{эКВ}}} \cdot \frac{\sin \gamma\theta}{\gamma\theta} \cdot \frac{1}{1 - \left[ \frac{r_\Gamma}{r_a} \right]^{2\gamma}}.$$

Система уравнений возбуждения (34) представлена в нормированном виде. Для этого использовались следующие нормированные переменные для координат и скоростей электронов (частиц) электронного потока:

$$\mathbf{R} = \frac{r - r_\Gamma}{r_a - r_\Gamma}; \quad \Phi' = \gamma\varphi - \omega t; \quad (35)$$

$$u_r = \frac{\tilde{V}_\gamma}{\Omega_\gamma r_a}; \quad \Theta = \frac{\tilde{\Omega}}{\Omega_\gamma}; \quad (36)$$

$\Omega_\gamma = \frac{\omega'_\gamma}{\gamma}$  – угловая скорость вращения ВЧ волны рабочего вида колебания;  $\bar{\Phi}_\gamma = \Phi' - \vartheta_\gamma$ ;  $Q_e = K_e \cdot |e|$  – заряд крупной частицы;  $K_e \gg 1$  – коэффициент укрупнения;  $\omega_\Gamma = \eta_e B_0$  – циклотронная частота;  $\tilde{V}_\gamma = |C_\gamma| \cdot \frac{\tilde{U}_m}{U_a}$  – нормированная амплитуда ВЧ поля;  $\tilde{U}_m$  – амплитуда ВЧ потенциала на уровне анода;  $U_a$  – анодное напряжение;  $C_{\text{эКВ}}$  – эквивалентная

емкость резонансной системы магнетрона;  $Q_H$  – нагруженная добротность.

Таким образом, полученная система уравнений возбуждения (34) позволяет определить амплитуду и фазу (частоту) “горячего” ВЧ поля в разных режимах работы магнетрона, а также возможность (или условия) формирования узкополосного сигнала с заданной амплитудной частотной или фазовой модуляцией в полосе пропускания резонансной системы.

**Уравнения движения.** Электроны, влетающие в пространство взаимодействия магнетрона (см. рис. 1, д), движутся в электрическом и магнитном полях. Использование принципа суперпозиции позволяет разделить действие данных полей на электронный поток и таким образом упростить задачу решения самосогласованной системы уравнений поля (1)–(4) и потока (19) и (20). Такое разделение связано с действием вихревой и потенциальной компонент электромагнитного поля. В этом случае упрощается не только реализация алгоритма решения, но и границы области, в которой рассматривается движение электронного потока (см. рис. 1, д).

На рис. 2 схематично представлена модель пространства взаимодействия магнетрона. Там же показана траектория движения электрона, вылетевшего из т. А и движущегося в электронной втулке под действием статического  $\vec{E}_0$  и вихревого ( $\pi$ -вид)  $\vec{E}_{N/2}$  электрических и статического магнитного  $\vec{B}_0$  полей. Движение электронов рассматривается в области, которая ограничена поверхностью катода  $R = 0$  ( $r = r_r$ ) и ламелями резонансной системы (анода)  $R = 1$  ( $r = r_a$ ) (приближение “гладкого” анода).

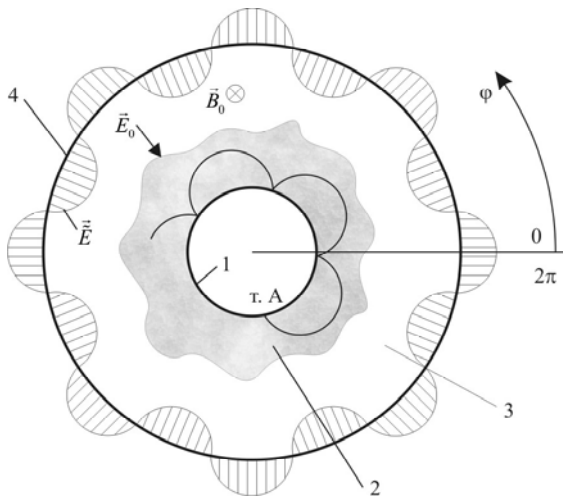


Рис. 2. Модель пространства взаимодействия магнетрона

Система уравнений движения (19) и (20) записывается в подвижной системе координат  $(r, \varphi)$ , вращающейся относительно неподвижной (лабораторной) системы координат  $(r, \varphi)$  с угловой скоростью синхронного ВЧ поля  $\Omega_\gamma$ . С учетом введенной нормиров-

ки для координат и скоростей частиц (35) и (36) система уравнений движения может быть представлена в виде:

$$\frac{du_r}{dT} = -G \left\{ \tilde{\varepsilon}_r + \varepsilon_{C3r} \mp \frac{1}{\zeta(\zeta + R)} \pm G' \times \right. \\ \left. \times (\zeta + R) \times (1 + \Theta) \cdot \left[ 1 \mp \frac{\omega}{\omega_r \gamma} (1 + \Theta) \right] \right\}; \quad (37)$$

$$\frac{d\Theta}{dT} = -G \cdot \left\{ \tilde{\varepsilon}_\varphi + \varepsilon_{C3\varphi} \mp u_r G_0 \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 \mp 2 \frac{\omega}{\omega_r \gamma} (1 + \Theta) \right] \right\} \cdot \frac{1}{\zeta(\zeta + R)}; \quad (38)$$

$$\frac{d\Phi'}{dT} = \frac{\omega}{\omega_r} \Theta; \quad (39)$$

$$\frac{dR}{dT} = \frac{\omega}{\omega_r} \cdot \frac{1}{\zeta \gamma} u_r; \quad (40)$$

где  $\varepsilon = \frac{r_r}{r_a}$ ;  $\zeta = 1 - \varepsilon$ ;  $\zeta = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ ;  $G = \frac{E_{0r=r_a}}{\Omega_\gamma r_a B_0}$ ;

$G_0 = \frac{1}{G}$ ;  $G' = \frac{\zeta}{G}$ ;  $T = \omega_r t$  – нормированное текущее время;  $\tilde{\varepsilon}_r = \tilde{E}_r / E_{0r=r_a}$  и  $\tilde{\varepsilon}_\varphi = \tilde{E}_\varphi / E_{0r=r_a}$  – r-я и  $\varphi$ -я нормированные компоненты напряженности ВЧ поля;  $\varepsilon_{C3r} = E_{C3r} / E_{0r=r_a}$  и  $\varepsilon_{C3\varphi} = E_{C3\varphi} / E_{0r=r_a}$  – r-я и  $\varphi$ -я нормированные компоненты напряженности поля ПЗ.

Верхние знаки в выражениях (37)–(40) соответствуют обычной конструкции магнетрона, а нижние – обращенной конструкции.

**Моделирование поля ПЗ.** Для определения составляющих напряженностей поля ПЗ  $\varepsilon_{C3r}$  и  $\varepsilon_{C3\varphi}$  применяется бесстолкновительная модель “частица в ячейке” (Particle-in-Cell (PIC) Model [16]). Данная модель не учитывает “близкие” взаимодействия (взаимодействия в пределах ячейки сетки разбиения [11]), а рассматривает влияние только дальнедействующих кулоновских сил, влияющих на данную заряженную частицу со стороны всех прочих частиц, которые находятся на расстоянии большем, чем размер элементарной ячейки  $\Delta r$  сетки разбиения. В этом случае кулоновское поле, соответствующее “дальним” взаимодействиям электронов, является сглаженным регулярным полем. Потенциал такого поля определяется из решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (18), которое в подвижной цилиндрической системе координат  $(r, \varphi)$  имеет следующий вид (квазистатическое приближение):

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( r \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -\frac{\rho(r, \varphi)}{\varepsilon_0}. \quad (41)$$

Для упрощения решения данного уравнения введем новые переменные:

$$Y = \ln(r/r_T); \Phi' = \gamma\varphi'. \quad (42)$$

Это позволяет конформно отобразить кольцеобразную область пространства взаимодействия магнетрона между катодом и анодом  $r_T \leq r \leq r_a$  и  $0 \leq \gamma\varphi' < 2\pi\gamma$  на прямоугольную область  $0 \leq Y \leq |\ln(r_a/r_T)|$  и  $0 \leq \Phi' < 2\pi\gamma$ . Переходя к безразмерным переменным  $V = U/U_a$ ,  $Y$  и  $\Phi'$ , получаем нормированное уравнение Пуассона в виде:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \gamma^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi'^2} = -\frac{r^2}{\varepsilon_0 U_a} \rho(r, \varphi'). \quad (43)$$

Учитывая, что установившийся процесс взаимодействия электронного потока с ВЧ полем резонансной колебательной системы магнетрона периодичен во времени и в пространстве, рассмотрим решение уравнения Пуассона (43) для всей области взаимодействия магнетрона, вдоль которой укладывается целое число полных периодов ВЧ волны ( $\gamma$  замедленных длин волн). Это соответствует установлению в пространстве взаимодействия заданного вида колебания, характеризуемого постоянной распространения  $\gamma = n + mN$ . Граничные условия, необходимые для решения уравнения (43), записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} V(0, \Phi') &= 0; & V(\ln(r_a/r_T), \Phi') &= 0; \\ V(Y, \Phi') &= V(Y, \Phi' \pm 2\pi\gamma). \end{aligned} \quad (44)$$

Для определения потенциала поля ПЗ в (43) применяется алгоритм, предложенный R.W. Hockney [17] в сочетании с использованием процедуры быстрого преобразования Фурье [18]. С этой целью участок пространства взаимодействия разбивается равномерной прямоугольной сеткой (лагранжевой сеткой) размером  $(M+1) \times N$ , где  $M = 2^{K+1}$  и  $N = 2^{P+1}$ , а  $K$  и  $P$  – целые числа.

На рис. 3 схематично показана пространственная сетка, используемая для дискретизации пространства взаимодействия магнетрона. Такой выбор количества строк и столбцов сетки делает возможным факторизацию матриц преобразований при циклической редукции, Фурье – анализе и синтезе, а также ускоряет выполнение этих операций.

Используя конечно-разностную аппроксимацию, дифференциальное уравнение (43) заменяется системой конечно-разностных уравнений, связывающих потенциалы и заряды, отнесенные к узлам сетки разбиения  $(M+1) \times N$  (см. рис. 3). Данное разностное уравнение, записанное для  $(i, j)$  узла сетки разбиения, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &V(i+1, j) - 2V(i, j) + V(i-1, j) + \alpha^2 \times \\ &\times [V(i, j+1) - 2V(i, j) + V(i, j-1)] = \\ &= S(i, j), \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} S(i, j) &= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\gamma \ln(r_a/r_T)}{U_a} \times \\ &\times \frac{Q_e}{\Delta Z} \cdot \frac{N-1}{M-1} \cdot N(i, j); \end{aligned} \quad (46)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, (M+1)$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, (N+1)$  – целочисленные индексы узлов, соответствующие центру элементарной ячейки со сторонами  $\Delta Y = \ln(r_a/r_T)/(M-1)$  и  $\Delta\Phi' = 2\pi\gamma/(N-1)$ ;

$\alpha = \gamma^2 \Delta Y / \Delta\Phi'$ ;  $Q_e / \Delta Z$  – линейная плотность заряда крупной частицы;  $N(i, j)$  – функция распределения заряда в узлах лагранжевой сетки разбиения  $(M+1) \times N$ .

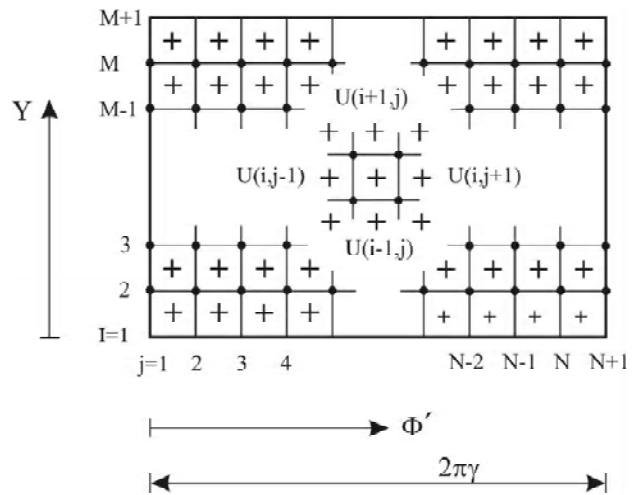


Рис. 3. Дискретная сетка разбиения пространства взаимодействия магнетрона

Особо необходимо остановиться на подходах, связанных с определением значений функции распределения заряда  $Q(i, j)$  в узлах сетки  $(M+1) \times N$ . Для этой цели наиболее часто применяются две схемы дискретизации заряда [16]: Near Grid Point (NGP) – схема, когда весь заряд крупной частицы приписывается ближайшему узлу сетки, и Cloud – in – Cell (CIC) – схема, которая подразумевает, что заряд частицы распределяется между четырьмя ближайшими узлами ячейки, обратно пропорционально площадям областей, на которые делится площадь элементарной ячейки. Следствием дискретизации электронного потока и пространства взаимодействия являются флуктуации значений потенциала  $V(i, j)$  в узлах выбранной сетки разбиения. Данные флуктуации поля пространственного заряда рассматриваются как «машинный»

шум [8,16,19]. В результате вычисление кулоновских сил сопровождается значительными погрешностями, что отрицательно отражается на динамике электронного потока и может привести к его неустойчивости. В целях уменьшения аномального влияния «машинных» шумов применяется локальное сглаживание функции распределения потенциала  $V(i, j)$ . Для этого с помощью метода наименьших квадратов дискретная функция потенциала ПЗ аппроксимируется ее аналитической зависимостью в виде алгебраического полинома в области  $(i - 1 \div i + 1; j - 1 \div j + 1)$ :

$$V(x', y') = a_1 + a_2 x' + a_3 y' + a_4 x' y' + a_5 x'^2 + a_6 y'^2; \quad (47)$$

где  $x' = \frac{\Phi' - \Phi'_{i,j}}{\Delta\Phi'}$ ;  $y' = \frac{Y - Y_{i,j}}{\Delta Y}$  – нормированные координаты;  $Y_{i,j}$  и  $\Phi'_{i,j}$  – координаты узла сетки разбиения, ближайшего к точке, в которой находится частица, т.е. точка с текущими координатами  $Y$  и  $\Phi'$ ;  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  – постоянные коэффициенты полинома, определяемые с помощью метода наименьших квадратов [20].

Окончательно, выражения для нормированных составляющих напряженностей поля ПЗ  $\varepsilon_{C3r}$  и  $\varepsilon_{C3\phi}$  с учетом (15) можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_{C3r} = - \frac{M - 1}{\zeta(\zeta + R)} \cdot \frac{\partial V}{\partial y'}; \quad (48)$$

$$\varepsilon_{C3\phi} = - \frac{|\ln r_a / r_\Gamma|}{2\pi} \cdot \frac{\gamma(N - 1)}{\zeta(\zeta + R)} \cdot \frac{\partial V}{\partial x'}. \quad (49)$$

Выражения (48) и (49) являются универсальными и позволяют определить компоненты напряженности поля ПЗ в азимутально-симметричных магнетронных системах обычной и обращенной конструкций без изменения алгоритма и программы расчета.

**Расчет теплового режима.** Процесс бомбардировки электродов магнетрона (катода и анода) вылетающими электронами вызывает нагрев данных электродов и приводит к росту их температуры. Изменение температурного режима прибора ухудшает его характеристики, в частности, приводит к уходу частоты генерируемых колебаний. Для учета тепловых процессов, обусловленных вылетом электронов на катод и анод, модель магнетрона дополняется уравнением теплопроводности. В случае изотропной однородной среды (“гладкие” электроды (см. рис. 2)) данное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_T \Delta T + Q, \quad (50)$$

где  $\alpha_T = K_M / \rho_M \Gamma_V$  – коэффициент температуропроводности;  $K_M$  – теплопроводность материала катода и анода (меди);  $\rho_M$  – плотность материалов

катода и анода;  $\Gamma_V$  – удельная теплоемкость материалов катода и анода;  $T$  – температура;  $Q = q / \rho_M \Gamma_V$ ;  $q$  – заданная плотность тепловых источников (тепловыделения), в качестве которой выступает плотность энергии, выделяемой на электродах прибора бомбардирующими их электронами.

Моделирование тепловых процессов на катоде связано с определением дополнительного повышения температуры поверхности катода за счет обратной бомбардировки его первичными электронами. Полная кинетическая энергия, выделяемая на всей поверхности катода возвращающимися электронами, равна:

$$W_\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_\Gamma} M_e \left| (\vec{v}_{уд}^i)_{r=\Gamma} \right|^2, \quad (51)$$

где  $\left| (\vec{v}_{уд}^i)_{r=\Gamma} \right| = r_a \Omega_\gamma \sqrt{(u_\Gamma^2)_{r=\Gamma} + (\varepsilon^2 \Theta^2)_{r=\Gamma}}$  – модуль вектора скорости удара о катод  $i$ -й частицы;  $M_e = K_e m$  – масса крупной частицы;  $N_\Gamma$  – количество частиц, вылетевших на катод за шаг решения по времени  $\Delta T$ . Для упрощения расчетов предполагается, что данная энергия выделяется в бесконечно тонком слое равномерно по всей поверхности катода  $\Delta S_\Gamma = 2\pi r_\Gamma h_\Gamma$ , где  $h_\Gamma$  – высота катода.

Результатом решения уравнения (50) является зависимость повышения и колебаний температуры катода от времени. Знание такой зависимости позволяет определить колебание термоэмиссионного тока и влияние дополнительной термоэлектронной эмиссии на рост вторичноэмиссионного тока и, как следствие этого, на стабильность частоты генерируемых магнетроном колебаний [21].

Аналогичным образом проводится моделирование тепловых процессов на аноде. При вылете частиц на анод ( $R = 1$ ) определяется полная кинетическая энергия, выделяемая на аноде вылетающими частицами в виде:

$$W_a = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_a} M_e \left| (\vec{v}_{уд}^p)_{r=r_a} \right|^2, \quad (52)$$

где  $\left| (\vec{v}_{уд}^p)_{r=r_a} \right| = r_a \Omega_\gamma \sqrt{(u_\Gamma^2)^p_{r=r_a} + (\Theta^2)^p_{r=r_a}}$  – модуль вектора скорости удара о анод  $p$ -й частицы;  $N_a$  – количество частиц, вылетающих на анод за шаг решения по времени  $\Delta T$ . Особенностью моделирования тепловых процессов на аноде является их стационарность во времени, т.е.  $\partial/\partial t = 0$ . В этом случае решением уравнения (50) является установившееся распределение температуры в анодном блоке магнетрона (без применения принудительных способов охлаждения: воздушного или водяного). Это позволяет определить излишек энергии, который необходимо отвести с помощью специальных способов охлаждения анодного блока.

**Начальные условия.** Для решения самосогласованной системы уравнений (34), (37) – (40) и (43) необходимо определить начальные условия, характеризующие состояние ВЧ поля и электронного потока в пространстве взаимодействия. Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  под действием статических электрического и магнитного полей электронный поток формируется в виде втулки ПЗ в прикатодной области  $0 < R \leq R_{\text{вт}}$  и  $0 \leq \Phi' < \tau\pi$ , где  $R_{\text{вт}} = \tau v_e / [\omega_{\Gamma} \cdot (r_a - r_{\Gamma})]$  – высота втулки ПЗ. Частицы с зарядом  $Q_e$  равномерно распределены в указанной области в виде  $L_e$  слоев по  $P_e$  частиц в слое. Начальные координаты данных частиц определяются из следующих выражений:

$$R_{i,j} = \frac{R_{\text{вт}}}{L_e} \cdot i_j \quad \text{и} \quad \Phi'_{i,j} = \frac{\tau\pi}{P_e} \cdot (j_i - 1), \quad (53)$$

где  $i = 1, \tau, \infty$ ,  $L_e$  – номер слоя;  $j = 1, \tau, \infty$ ,  $P_e$  – номер частицы в слое.

Начальное распределение скоростей частиц определяется в соответствии с законом сохранения энергии частицы, движущейся в статических электрическом и магнитном полях, т.е.

$$(u_{\Gamma})^0_{i,j} = \frac{(\tilde{v}_{\Gamma})^0_{i,j}}{\Omega_{\gamma} r_a} = \sin\left(\frac{\mathfrak{R}_{i,j}}{R_{\text{вт}}} \pi\right); \quad (54)$$

$$\Theta^0_{i,j} = \frac{\tilde{\Omega}^0_{i,j}}{\Omega_{\gamma}} = \text{Gos}\left[\left(1 + \frac{\mathfrak{R}_{i,j}}{R_{\text{вт}}}\right)\pi\right].$$

При этом знак продольной составляющей скорости частиц в потоке выбирается случайным образом, т.е. если для  $(i, j)$  частицы  $\mathfrak{R}_{i,j} > 0.5$ , то  $(u_{\Gamma})^0_{i,j} > 0$ , если  $\mathfrak{R}_{i,j} < 0.5$ , то  $(u_{\Gamma})^0_{i,j} < 0$ , где  $\mathfrak{R}_{i,j}$  – случайное число, равновероятное в интервале  $[0, 1]$ .

Необходимо отметить, что такое состояние электронного облака является первичным и его наличие вполне обосновано в приближении малой плотности ПЗ, т.е. когда его плотность удовлетворяет условию, что  $\rho \ll \rho_{\text{бр}}$ ,  $\rho_{\text{бр}} = \varepsilon_0 \omega_{\Gamma}^2 / \eta$  – бриллюэновская плотность ПЗ.

Для частиц, вводимых с катода, выбор начальных условий для их координат и скоростей зависит от условий их эмиссии. В модели учитываются три ее вида: термоэлектронная, вторичноэлектронная и автоэлектронная эмиссии.

В случае применения термоэмиссионных катодов предполагается, что плотность тока эмиссии определяется из выражения Ричардсона – Дэшмана:

$$j_{\text{те}} = j_0 e^{\frac{e\gamma/\tau}{kT_k}} \sqrt{\frac{E_0}{4\pi\epsilon_0}}, \quad (55)$$

где  $j_0 = A_R \bar{D} T_k^{\tau} e^{-\frac{\bar{\phi}}{kT_k}}$  – плотность тока насыщения;

$A_R = 1\tau 0 \mathfrak{A} \frac{A}{\text{см}^{\tau} \text{К}^{\tau}}$  – постоянная Ричардсона;

$\bar{D} = (1 - \bar{\Gamma})$  – прозрачность потенциального барьера;  $\bar{\Gamma}$  – коэффициент отражения электронов от поверхности катода (усредненный по энергиям);  $\bar{\phi}$  – работа выхода электрона;  $E_0$  – напряженность внешнего электрического поля у катода;  $T_k$  – абсолютная температура катода;  $k$  – постоянная Больцмана.

Применение выражения (55) позволяет определить плотность тока термоэмиссии и рассчитать количество точек эмиссии

$$N_{\text{те}} = \frac{\tau\pi^{\tau} r_{\Gamma}^{\tau} h_{\Gamma}}{5\omega_{\Gamma} Q_e} \cdot K_{\tau}. \quad (56)$$

Начальные координаты и скорости термоэмиссионных электронов, эмитируемых в пространство взаимодействия, равны:

$$R_g = 0; \quad \Phi'_g = \frac{\tau\pi\gamma}{N_{\text{те}}} \cdot g; \quad (57)$$

$$(u_r^0)_g = \sqrt{\tau\eta(U_{\text{те}} - U_{i,K}^g)}; \quad \Theta_g = 0,$$

где  $g = 1, \tau, \infty$ ,  $N_{\text{те}}$ ;  $U_{\text{те}}$  – энергия вылета термоэмиссионных частиц с катода, диапазон изменения которой равен  $(15 \div 25)$  эВ [19];  $U_{i,K}^g$  – разность потенциалов статического поля и поля ПЗ над точкой эмиссии. Термоэлектронная эмиссия учитывается только тогда, когда  $U_{\text{те}} - U_{i,K}^g > 0$ . В противном случае наступает режим ограничения эмиссии полем ПЗ и эмиссия частицы отсутствует.

Для моделирования процесса вторично-эмиссионного размножения применяется модель вторичной эмиссии, достаточно подробно описанная в [19, 20, 22]. В общем случае коэффициент вторичной эмиссии  $\sigma$  представляется в виде суммы коэффициентов упругого отражения  $\tau$ , неупругого отражения  $\eta$  и коэффициента истинной вторичной эмиссии  $\delta$ , т.е.  $\sigma = \tau + \eta + \delta$ .

Особенностью применяемой модели вторичной эмиссии является использование экспериментальных зависимостей коэффициента вторичной эмиссии от энергии падающих частиц для разных типов катодов: термоэмиссионных оксидных катодов, вторичноэмиссионных катодов с “поджигом” (сплавы Pd – Ba или Pt – Ba) и холодных металлических (Cu или Pt) автоэмиссионных катодов.

На рис. 4 представлены усредненные по количеству образцов экспериментальные зависимости для вторичноэмиссионного и холодного катодов. Данные кривые аппроксимируются полиномиальной зависимостью  $\sigma = \sigma(U_{\text{уд}})$ , которая используется для определения текущего значения коэффициента вторичной эмиссии. При расчете значения  $\sigma$  учитываются мате-

риал, из которого изготовлен эмиттер (значение максимального коэффициента вторичной эмиссии  $\sigma_{\max}$ ), характер поверхности катода, энергия обратной бомбардировки катода  $U_{уд}$ , а также угловая зависимость  $\sigma(\varphi)$ , где  $\varphi$  – угол падения электрона на катод [23]. Также учитывается изменение температуры поверхности катода, вследствие дополнительной энергии, привносимой бомбардирующими катод частицами.

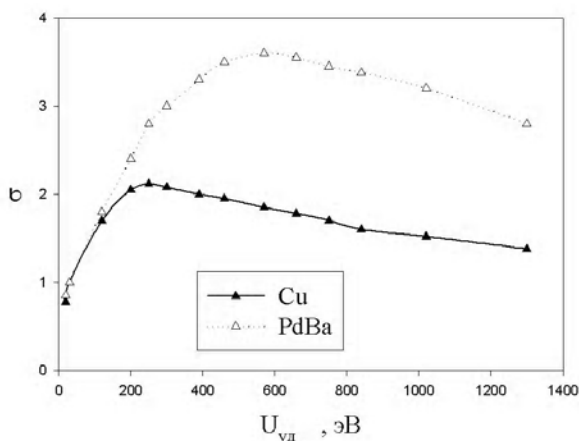


Рис. 4. Зависимость кривой вторичной эмиссии от энергии падающих частиц

Важной задачей при моделировании вторичноэмиссионных процессов является точное вычисление потенциала обратной бомбардировки катода первичными частицами  $U_{уд} = |(\vec{v}_{уд})_{r=r\Gamma}|^T / \Gamma \eta$ , где  $|(\vec{v}_{уд})_{r=r\Gamma}|$  – модуль скорости частицы в точке вылета на катод при  $R = 0$ . Ошибки вычисления координат и скоростей частиц, вылетевших на катод, приводят к завышенному значению их энергии вылета и, как следствие этого, к значительным погрешностям в определении  $\sigma$ .

На рис. 5 схематично показана траектория движения частицы в прикатодной области. Траектория частицы построена по результатам решения системы уравнений движения на каждом временном шаге  $\Delta T$  (дискретные точки  $k - t, k - 1$  в пространстве взаимодействия и точка  $б$ , соответствующая случаю вылета частицы на катод). Для вычисления кинематических характеристик частицы в плоскости катода (точка  $A$ ) можно использовать интерполяцию значений в точках  $(k - 1)$  и  $б$  (линейная интерполяция) или в точках  $(k - t), (k - 1)$  и  $б$  (квадратичная интерполяция). Однако такой подход требует значительной дополнительной памяти и к тому же имеет повышенную вычислительную погрешность (из-за учета в расчетах значений в точке  $б$ ). Поэтому предлагается достаточно простой и, как показали расчеты, точный алгоритм вычисления энергии частицы в плоскости касания катода (точка  $A$ ). Данный алгоритм связан с определением кинетической энергии вылетающей частицы в точке, предшествующей ее вылету на катод, т.е. в точке  $(k - 1)$ . Для вылета данной частицы на катод необходимо преодолеть потенциальный барьер, определяемый как  $Q_e U_{сум}$ , где  $U_{сум}$  – суммарный потенциал статического электрического поля в точке  $(k - 1)$

с учетом экранирующего действия поля ПЗ, определяемого в ближайшем узле разностной сетки  $(Y, \Phi')$ . С учетом этого выражение для потенциала вылета частицы на катод можно представить в виде:

$$U_{уд} = \frac{|(\vec{v})_{r=r_{k-1}}|^T}{\Gamma \eta} - \frac{\ln(r_{k-1}/r_\Gamma)}{\ln(r_a/r_\Gamma)} \cdot U_a - U_{C3}^{i,K}, \quad (58)$$

где  $|(\vec{v})_{r=r_{k-1}}| = r_{k-1} \Omega_y \sqrt{(u_r^T)_{r=r_{k-1}} + (\Theta^T)_{r=r_{k-1}}}$  – модуль скорости частицы в точке  $(k - 1)$ ;  $U_{C3}^{i,K}$  – потенциал поля ПЗ в ближайшем узле сетки разбиения.

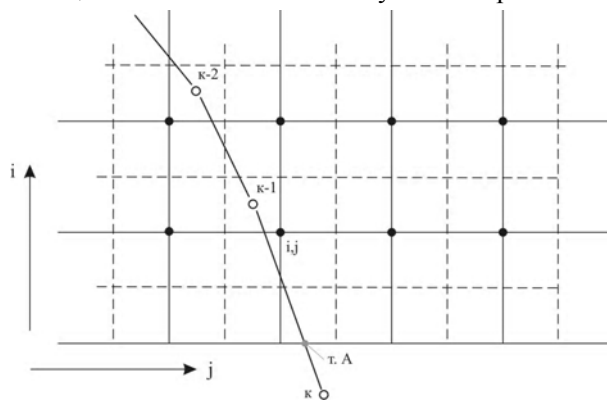


Рис. 5. Траектория частицы, вылетающей на катод

Анализ вычисленного значения  $U_{уд}$  позволяет определить составляющие коэффициента вторичной эмиссии. В случае, когда  $U_{уд} < U_1$ , где  $U_1$  – значение первого критического потенциала при  $\sigma = 1$ , рассматриваются упруго и неупруго отраженные частицы для конкретного материала катода. При условии, что  $U_{уд} > U_1$  рассматриваются истинно вторичные частицы, количество которых определяется с помощью экспериментальных зависимостей, представленных на рис. 4.

Начальные координаты вторичных частиц совпадают с координатами первичных частиц в лабораторной системе координат. Однако координаты вторичных частиц в подвижной системе координат вводятся с учетом времени запаздывания вылета вторичной частицы, которое равно  $\sim 10^{-13}$  с. Начальные скорости для вводимых вторичных частиц выбираются случайным образом в интервале значений энергии вылета от 5 до 20 эВ [19].

Начальное значение амплитуды  $\tilde{V}_y^0$  ВЧ поля, возбуждаемого электронным потоком в резонансной колебательной системе, выбирается из условия наличия в предгенерационном режиме магнетрона слабого ВЧ поля в виде “нерезонансного” фона, который можно рассматривать как шумовую составляющую колебаний, возбуждаемых статическим облаком ПЗ на фронте импульса анодного напряжения. Амплитуду и спектральное распределение энергии, излучаемой ускоренно движущимися электронами в свободном пространстве магнетрона, можно оценить воспользовавшись результатами работы [24]. Проведенные тестовые расчеты показывают, что амплитуда

данных колебаний меньше уровня “машинных” шумов и не превышает – 60 дБ от уровня колебаний, соответствующих стационарному режиму работы.

Начальная фаза ВЧ колебаний  $\tilde{\varphi}_\gamma^0$  выбирается случайным образом в интервале значений  $[0, \pi]$ . Это соответствует случаю генерации магнетроном некогерентного сигнала с произвольной (случайной) начальной фазой. При синхронизации магнетрона внешним сигналом начальная фаза генерируемого сигнала  $\tilde{\varphi}_\gamma^0$  определяется фазой внешнего синхронизирующего сигнала.

#### 4. Анализ вычислительной погрешности модели

Погрешность численного решения самосогласованной системы уравнений (34), (37) – (40) и (43) связана с пространственно-временной дискретизацией, а также с дискретным представлением сплошного электронного потока в виде совокупности крупных частиц с зарядом  $Q_e$  (метод крупных частиц). Наличие такой погрешности может привести к появлению вычислительной неустойчивости решения и затрудняет анализ физических результатов и их объяснение. Для того чтобы оценить величину вычислительной погрешности модели магнетрона, необходимо определить возможные причины ее появления. Количественно величина погрешности зависит от значений модельных параметров: шага интегрирования по времени  $\Delta T$ , размеров ячейки пространственной сетки разбиения  $\Delta Y$  и  $\Delta \Phi'$ , а также числа крупных частиц  $N_e$  (или заряда частицы  $Q_e$ ). Остановимся более подробно и проанализируем связь каждого из данных модельных параметров с вычислительной погрешностью.

Для определения погрешности численного решения дифференциальных уравнений движения сравним результаты их решения с расчетами, проведенными по аналитическим выражениям для наиболее простых случаев взаимодействия (например, расчет траекторий частиц в статическом режиме работы без учета действия поля ПЗ). В этом случае относительная погрешность равна

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \frac{D_{\text{числ}} - D_{\text{анал}}}{D_{\text{анал}}} \cdot 100 \%, \quad (59)$$

где  $D_{\text{числ}}$  – значение параметра, определяемого с помощью численного метода решения;  $D_{\text{анал}}$  – точное значение параметра, определяемого из аналитического выражения.

На рис. 6 представлена обобщенная зависимость относительной погрешности решения уравнений движения  $\varepsilon_{\text{отн}}$  для частицы, движущейся в скрещенных статических электрическом и магнитном полях. Расчеты проводились разными численными методами: одношаговыми (методом Эйлера, методом Рунге-Кутты 4-го порядка) и многошаговыми (методом прогноза и коррекции, методом Адамса-Башфорта, мето-

дом Нюстрема) с обычной (кривая 1) и двойной (кривая 2) точностью.

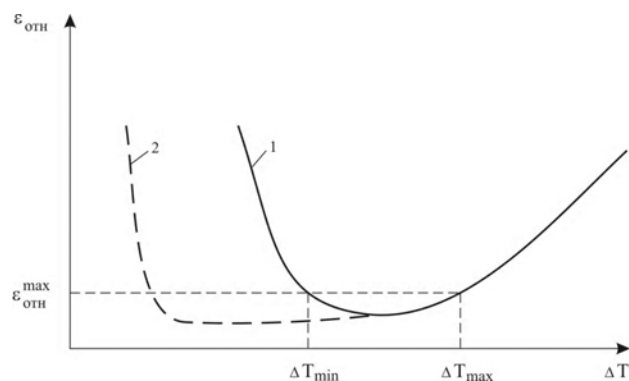


Рис. 6. Зависимость относительной погрешности решения уравнений движения с обычной (1) и двойной (2) точностью

Из представленных зависимостей видно, что численный подход к решению характеризуется определенным интервалом значений шага интегрирования  $\Delta T$ , в пределах которого относительная погрешность  $\varepsilon_{\text{отн}}$  не превышает заданного приемлемого значения. С увеличением шага интегрирования ( $\Delta T > \Delta T_{\text{max}}$ ) или его уменьшением ( $\Delta T < \Delta T_{\text{min}}$ ) имеет место рост погрешности вычислений. При этом наблюдается увеличение энергии, запасенной в электронном потоке (так называемый «псевдонагрев» [19]). Минимизация модуля вычислительной погрешности  $\varepsilon_{\text{отн}}$  является критерием правильности выбора шага интегрирования по времени. Необходимо отметить, что причина роста  $\varepsilon_{\text{отн}}$  при увеличении или уменьшении  $\Delta T$  различна и обусловлена в первом случае ( $\Delta T > \Delta T_{\text{max}}$ ) нарушением согласованности дискретной аппроксимации с исходным дифференциальным уравнением, а во втором – ( $\Delta T < \Delta T_{\text{min}}$ ) накоплением ошибок округления чисел ввиду роста количества выполняемых арифметических операций. Таким образом, при выборе значения шага интегрирования  $\Delta T$  следует исходить из условия минимизации вычислительной погрешности. Проведенные тестовые расчеты показали, что в интервале значений шага интегрирования  $\frac{1}{\text{УТ}} T_\Gamma \leq \Delta T \leq \frac{1}{8} T_\Gamma$  (случай обычной точности), где  $T_\Gamma = T\pi/\omega_\Gamma$  – период циклотронных колебаний, относительная погрешность  $\varepsilon_{\text{отн}}$  в точке вылета частицы на катод не превышает 3,4% с минимальным значением 1,2% при  $\Delta T = \frac{1}{1\Gamma} T_\Gamma$ . Это позволяет рассчитывать энергию частицы с абсолютной точностью:

$$\varepsilon_{\text{абс}} = U_a \cdot \frac{\varepsilon_{\text{отн}}}{100}. \quad (60)$$

Анализ вычислительной погрешности, связанной с пространственной дискретизацией, обусловленной вводом пространственной сетки разбиения  $((M+1) \times N)$  для решения уравнения Пуассона. Сеточная дискретизация пространства взаимодействия автоматически ограничивает возможность учета волн, длина которых становится сравнимой с размером

элементарной ячейки сетки  $\Delta r$ . С другой стороны, существует связь между степенью дискретизации пространства взаимодействия и количеством крупных частиц  $N_e$ , участвующих во взаимодействии, а также выбранной схемой «размазывания» частиц по ячейке сетки разбиения. Для того чтобы связать между собой размеры элементарной ячейки пространственной сетки  $\Delta r$  и количество частиц  $N_e$ , вводится характерный пространственный интервал – радиус Дебая  $r_D$  [16]. С физической точки зрения радиус Дебая разграничивает область, где проявляются коллективные свойства системы частиц ( $r > r_D$ ), от области, в которой преобладают микроскопические эффекты парного взаимодействия ( $r < r_D$ ). В приближении учета действия далекодействующих сил кулоновского взаимодействия размер пространственной сетки выбирается из условия, что  $\Delta r \approx r_D$ .

Количество крупных частиц  $N_e$ , участвующих во взаимодействии, связано с величиной заряда  $Q_e$  и автоматически «регулируется» величиной ПЗ в прикатодной области (режим ограничения эмиссии ПЗ [20]). При этом между количеством частиц и их зарядом, как показывают тестовые расчеты, существует прямопропорциональная зависимость, близкая к линейной. Однако значительное уменьшение количества частиц за счет роста их заряда ограничивается ростом вычислительных флуктуаций потенциала ПЗ в узлах сетки разбиения и может привести к появлению аномальных эффектов (например, к «налипанию» частиц на катод, резким скачкам плотности ПЗ и т.д.). К тому же замена NGR-алгоритма «размазывания» частиц в пределах ячейки сетки разбиения на схему SIS-алгоритма имеет ограничения на допустимое минимальное количество частиц, при котором исключаются скачкообразные изменения распределения потенциала ПЗ от шага к шагу по времени.

Для проведения тестовых расчетов рассматривается прибор со следующими параметрами:  $r_a = 0,0075$  м;  $r_r = 0,0048$  м;  $U_a = 14000$  В;  $B_0 = 0,25$  Тл;  $f = 4,0 \cdot 10^9$  Гц. Предполагается, что движение частицы, вылетевшей с катода ( $R = 0$ ), рассматривается в кинематическом приближении (без учета действия поля ПЗ, т.е.  $\varepsilon_{C_{гир}} = 0$ ) с начальными скоростями вылета с катода, равными нулю ( $u_r = 0$  и  $\Theta = 0$ ), и в ВЧ поле постоянной амплитуды, т.е.  $\tilde{V}_{N/T} = 1$  и начальной фазой  $\tilde{\varphi}_y^0 = -\pi$ .

Для выбранного режима работы и шага интегрирования  $\Delta T = \frac{1}{10} T_r$ , согласно (60), абсолютная погрешность определения энергии частицы равна 168 эВ. Как видно из рис. 4, такая абсолютная погрешность определения энергии удара является недопустимой для расчета значения коэффициента вторичной эмиссии. Поэтому для снижения вычислительной погрешности в модели предлагается использовать алгоритм уменьшения шага решения для частиц, вылетающих на катод. В этом случае шаг решения выбирается равным  $\Delta T' = \frac{1}{10} \Delta T$  в прикатодной области пространства

взаимодействия  $\Delta R_{вт} < 0,1$ . В результате абсолютная погрешность  $\varepsilon_{абс}$  снижается и не превышает (3÷5) эВ, что позволяет контролировать поведение малоэнергетичных электронов с энергиями менее 10 эВ.

На рис. 7 представлены результаты моделирования движения частиц в статическом (а) и динамическом (б) режимах работы магнетрона.

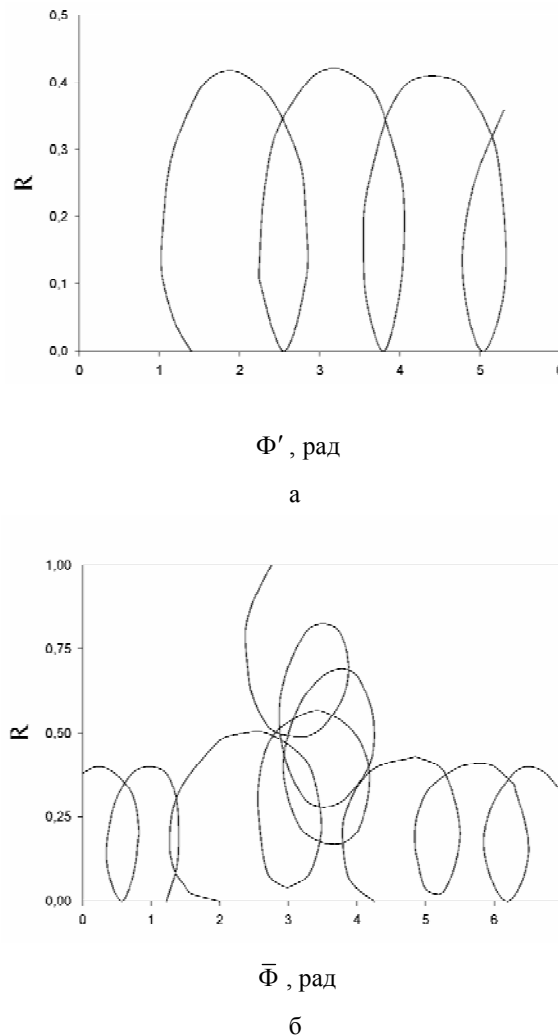


Рис. 7. Траектории движения электронов в статическом (а) и динамическом (б) режимах работы магнетрона

Анализ движения частиц в статическом режиме без учета влияния поля ПЗ показывает, что имеет место бомбардировка катода и эмиссия вторичной частицы. При этом энергия удара составляет единицы электрон-вольт и происходит упругое отражение частицы от катода. Многократность отражения частицы подтверждает отсутствие накопления вычислительной погрешности и корректность выбранного шага решения.

В случае динамического режима (с учетом действия поля ПЗ) движение частицы происходит в ускоряющих  $(-\frac{\pi}{T} < \Phi' < +\frac{\pi}{T})$  и тормозящих  $\frac{\pi}{T} < \Phi' < \frac{3\pi}{T}$  фазах ВЧ поля. В первом случае это приводит к образованию электронных спиц ПЗ и вылету частицы на анод. Движение частиц в ускоряющих фазах ВЧ поля обуславливает бомбардировку электронами катода. В результате вторичноэмиссионного размноже-

ния электронов в пространстве взаимодействия магнетрона поддерживается необходимая плотность электронного потока.

## Выводы

Разработана многопериодная математическая модель магнетрона в двухмерном приближении, включая основные уравнения модели, а также начальные и граничные условия их решения. Проведен анализ вычислительной точности решения уравнений модели с учетом особенностей вылета частиц на катод и анодную резонансную систему. Показано, что для адекватного описания физических процессов в магнетроне и минимизации погрешности вычислений (не более  $(2 \div 3) \%$  для частиц, движущихся в пространстве взаимодействия, и  $0,1 \%$  для частиц, вылетающих на катод и анод) шаги интегрирования по времени не должны превышать  $\Delta T = \frac{1}{1T} T_{\Gamma}$  и  $\Delta T' = \frac{1}{10} \Delta T$ , соответственно. Размер пространственной сетки разбиения для определения сил ПЗ выбирается из условия, что  $\Delta_{\Gamma} \approx r_{D}$ . Для указанных значений модельных параметров проведен тестовый расчет траекторий движения частиц в статическом и динамическом режимах работы магнетрона. Полученный результат адекватно описывает физические процессы, сопровождающие движение электронного потока в магнетроне.

**Литература:** 1. СВЧ-энергетика. Т. 1. Генерирование, передача, выпрямление / Под ред. Э. Окресса. М.: Мир, 1970. 2. Welch H.W. Jr. Prediction of Traveling Wave Magnetron Frequency Characteristics: Frequency Pushing and Voltage Tuning. Proceedings of IRE, 1953, vol. 41, 11, P. 1631 – 1653. 3. Бычков С.И. Магнетронные передатчики. М.: Изд-во Мин. обороны СССР, 1955. 215 с. 4. Churyumov G.I., Frolova T.I., Gritsunov A.V., Nikitenko O.M., Zin'kovsky V.N. The magnetrons – EMI sources: computer modeling and experimental investigations // Proceedings International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC Europe 2004). Vol. 1. Eindhoven (The Netherlands). 2004, September 6-10. P. 327-331. 5. Churyumov G.I., Frolova T.I. Computer modelling of the electron-wave interaction in combined magnetron. International Vacuum Electronics Conference (IVEC'2000). Monterey, California. 2000. P. 551-554. 6. Tahir I., Dexter A., Carter R. Noise performance of frequency and phase locked CW magnetrons operated as current controlled oscillators. IEEE Trans. Electron Devices, vol. ED-52, November, 2005. 7. Taflove A., Hagness S.C. Computational Electrodynamics the Finite-Difference Time-Domain Method // 3-rd ed. – Artech House, Inc., 2005. 1007 p. 8. Хокни Р., Истеуд Д. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 638 с. 9. Силин Р.А., Чепурных И.П. Анализ

характеристик анодного блока малогабаритного магнетрона. Изв. вузов. Радиофизика, т. XLVII, № 5-6, 2004. С. 480 – 486. 10. Silvester P.P., Ferrari R.L. Finite Elements for Electrical Engineers. Cambridge Univ. Press. 1990. 343 p. 11. Лопухин В.М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. М.: Гостехиздат, 1953. 323 с. 12. Вайнштейн Л.А. Общая теория резонансных электронных автогенераторов // В сб. Электроника больших мощностей. Сб. 6. М.: Наука, 1969. С. 84–129. 13. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Изд-во Наука. 1973. 309 с. 14. Магнетроны сантиметрового диапазона. Ч. 1 и 2.: Пер. с англ. под ред. Зусмановского С.А. М.: Сов. радио, 1950, 1951. 15. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Изд-во Сов. радио. 1957. 413 с. 16. Помтер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 392 с. 17. Hockney R.W. A fast direct solution of Poisson's equation using Fourier analysis. J. of the ACM, 1965. vol. 12, № 1, P. 95-113. 18. Cooley J.W., Takey J.W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Math. Comput., 1965, № 19, P. 161-175. 19. Рошаль А.С. Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979. 224с. 20. Чурюмов Г.И. Пути и методы повышения эффективности взаимодействия электронного потока с замедленными электромагнитными волнами в системах со скрещенными полями. Дис. на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Харьков: ИРЭ НАНУ. 1997. 345 с. 21. Кушнир В.А. Формирование и ускорение электронных пучков высокой яркости в инжекторных системах линейных резонансных ускорителей. Дис. на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Харьков: ННЦ «ХФТИ», 2005. 352 с. 22. Бронштейн И.М., Фрайман Б.С. Вторичная электронная эмиссия. М.: Наука, 1969. 407 с. 23. Нормурадов М.Г., Сергеев Г.И. и др. Угловая зависимость вторичной электронной зависимости сплава Pd-Wa. Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ, вып. 3 (427), 1990. С. 45-48. 24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1967. 458 с.

Поступила в редколлегию 2.07.2006

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Лукин К.А.

**Чурюмов Геннадий Иванович**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры физических основ электронной техники ХНУРЭ. Научные интересы: моделирование нелинейных электронно-волновых процессов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (057) 702-10-57.

**Басрави Камал Махмуд**, аспирант кафедры физических основ электронной техники ХНУРЭ. Научные интересы: электроника СВЧ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (057) 702-10-57.

**Сивоконь Константин Валериевич**, аспирант кафедры физических основ электронной техники ХНУРЭ. Научные интересы: электроника и техника СВЧ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (057) 702-10-57.