

М. А. ПРИСЕНКО, К. Л. ШЕВЧЕНКО, А. А. ПОТАПОВ

**ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЧ КООКСИАЛЬНОГО
ДАТЧИКА С ПЛОСКИМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ МАТЕРИАЛАМИ**

При контроле влажности листовых и рулонных материалов во многих случаях используются коаксиальные резонаторы с торцевым зазором. Благодаря высокой напряженности электромагнитного поля в области взаимодействия с исследуемым материалом коаксиальные датчики позволяют измерять малые значения влажности тонких материалов, что труднодостижимо при использовании других типов датчиков.

Известно [1], что влажность материала с достаточной точностью может быть однозначно описана диэлектрическими параметрами материала, в частности диэлектрической проницаемостью. Представляет интерес зависимость между диэлектрической проницаемостью материала, частично заполняющего резонансный преобразователь (рис. 1), и выходными параметрами резонансного датчика — его резонансной частотой. При этом желательно иметь не относительную зависимость резонансной частоты от диэлектрической проницаемости, предполагающую хотя бы одну известную точку на градуировочной кривой, полученную по эталонному образцу, а абсолютную зависимость, создающую возможность вычисления значения резонансной частоты, без использования эталона. В работах [2; 3] решались подобные задачи, однако при использовании их результатов необходима предварительная подготовка образца, который должен иметь форму усеченного конуса [2] либо цилиндра с диаметром, совпадающим с диаметром центрального проводника резонатора [3], что не всегда удобно.

Найдем выражение, связывающее длину волны в резонаторе с диэлектрической проницаемостью материала для случая (рис. 1), когда контролируется влажность листовых и рулонных материалов,

таких, как бумага, ткани, кожа и др. При выводе формулы применим методу [4].

Условно разделим полость резонатора на две области — A и B , одна из которых заполнена воздухом, а другая — исследуемым материалом. Согласно данной методике нужно найти решение волнового уравнения отдельно для областей A и B , потребовать непрерывности составляющих электромагнитного поля на границе раздела областей. Для каждой области рассматриваются симметричные решения волнового уравнения в цилиндрических координатах z, r и φ , для которых компоненты поля E_z, E_r, H_φ отличны от нуля. Для области A , считая, что она заполнена воздухом с $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$, запишем

$$E_z^A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{K_0(x_n^A r_2) I_0(x_n^A r) - I_0(x_n^A r_2) K_0(x_n^A r)}{K_0(x_n^A r_2)} \cos \gamma_n^A z; \quad (1)$$

$$E_r^A = A_0 \frac{N_0(k_0 r_2) I_0(k_0 r) - I_0(k_0 r_2) N_0(k_0 r)}{N_0(k_0 r_2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^A}{x_n^A} A_n \frac{K_0(x_n^A r_2) I_1(x_n^A r) - I_0(x_n^A r_2) K_1(x_n^A r)}{K_0(x_n^A r_2)} \sin \gamma_n^A z; \quad (2)$$

$$H_\varphi^A = j A_0 \frac{N_0(k_0 r_2) I_1(k_0 r) - I_0(k_0 r_2) N_1(k_0 r)}{N_0(k_0 r_2)} + j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_0}{x_n^A} A_n \frac{K_0(x_n^A r_2) I_1(x_n^A r) + I_0(x_n^A r_2) K_1(x_n^A r)}{K_0(x_n^A r_2)} \cos \gamma_n^A z, \quad (3)$$

где

$$x_n^A = \sqrt{(\gamma_n^A)^2 - k_0^2}; \quad n = 1, 2, 3 \dots; \quad \gamma_n^A = \frac{\pi n}{L}; \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{рез}}};$$

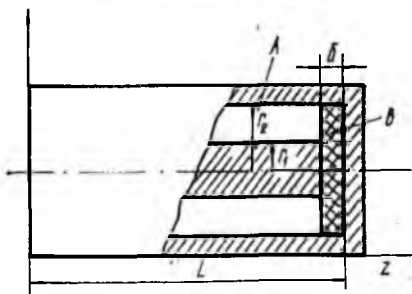


Рис. 1

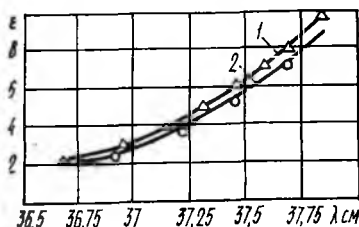


Рис. 2

$\lambda_{\text{рез}}$ — резонансная длина волны; J_0, J_1, N_0, N_1 — функции Бесселя и Вебера соответствующих порядков; $I; K$ — модифицированные функции Бесселя и Вебера.

Аналогично представим компоненты электромагнитного поля для области B :

$$E_z^B = \sum_{m=1}^{\infty} B_m I_0(x_m^B r) \cos \gamma_m^B z; \quad (4)$$

$$E_r^B = B_0 I_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^B}{x_m} B_m I_1(x_m^B r) \sin \gamma_m^B z; \quad (5)$$

$$H_\phi^B = j B_0 \sqrt{\epsilon_x} I_1(kr) + j V \sqrt{\epsilon_x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k}{x_m^B} B_m I_1(x_m^B r) \cos \gamma_m^B z. \quad (6)$$

Здесь

$$x_m^B = \sqrt{(\gamma_m^B)^2 - k^2}; \quad m = 1, 2, 3 \dots; \quad \gamma_m^B = \frac{\pi m}{aL}; \quad k = \sqrt{\epsilon_x k_0};$$

ϵ_x — диэлектрическая проницаемость среды в области B .

Указанные компоненты удовлетворяют граничным условиям в области A : $E_r^A = 0$, $z = L$; $E_z^A = 0$, $r = r_1$ и $r = r_2$ (7). Соответственно в области B имеем $E_r^B = 0$, $z = 0$; $E_z^B = 0$, $r = r_2$ (8). Потребуем выполнения граничных условий для областей A и B на разделяющей их поверхности $z = \delta$. Для области A его можно задать в виде

$$E_r^A = M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} M_m \sin \frac{\pi m}{\delta} z, \quad r_1 < r < r_2. \quad (9)$$

Соответственно для области B

$$E_r^B = 0, \quad r < r_1; \quad E_z^B = M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} M_m \sin \frac{\pi m}{\delta} z, \quad r_1 < r < r_2. \quad (10)$$

При этом считаем, что

$$B_0 I_0(kr_2) = M_0; \quad B_m I_0(x_m^B r_2) = M_m. \quad (11)$$

Условие (9) представим рядом Фурье:

$$E_r^A = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{L} z, \quad (12)$$

где $\delta = aL$ ($a < 1$);

$$C_0 = \frac{1}{L} \int_0^{aL} \left[M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} M_m \sin \frac{\pi m}{aL} z \right] dz = a M_0; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{L} \int_0^{aL} \left[M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} M_m \sin \frac{\pi m}{aL} z \right] \sin \frac{\pi n}{L} z dz = \\ &= 2 M_0 - \frac{\cos \pi a n}{\pi n} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m M_m \left(\frac{m^2 \cos \pi a n}{a^2 - n^2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Чтобы выбранное в области A решение удовлетворяло (9), должны выполняться равенства

$$C_0 = A_0 \frac{J_0(k_0 r_1) N_0(k_0 r_2) - I_0(k_0 r_2) N_0(k_0 r_1)}{N_0(k_0 r_2)}; \quad (15)$$

$$C_n = A_n \frac{I_0(x_n^A r_1) K_0(x_n^A r_2) - I_0(x_n^A r_2) K_0(x_n^A r_1)}{K_0(x_n^A r_2)}, \quad (16)$$

C_0, C_n в (15), (16) определяются выражениями (13) и (14). Тогда, принимая

$$I_0(k_0 r) N_0(k_0 r_2) - J_0(k_0 r_2) N_0(k_0 r) = G_0(k_0 r); \quad (17)$$

$$J_1(k_0 r) N_0(k_0 r_2) - J_0(k_0 r_2) N_1(k_0 r) = G_1(k_0 r); \quad (18)$$

$$I_0(x_n^A r) K_0(x_n^A r_2) - I_0(x_n^A r_2) K_0(x_n^A r) = D_{0n}(x_n^A r); \quad (19)$$

$$I_1(x_n^A r) K_0(x_n^A r_2) - I_0(x_n^A r_2) K_1(x_n^A r) = D_{1n}(x_n^A r), \quad (20)$$

с учетом (1) — (3) записываем

$$E_z^A = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{D_{0n}(x_n^A r)}{D_{0n}(x_n^A r_1)} \cos \gamma_n^A z; \quad (21)$$

$$E_r^A = C_0 \frac{G_0(k_0 r)}{G_0(k_0 r_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^A}{x_n^A} C_n \frac{D_{1n}(x_n^A r)}{D_{0n}(x_n^A r_1)} \sin \gamma_n^A z; \quad (22)$$

$$H_\varphi^A = j C_0 \frac{G_1(k_0 r)}{G_0(k_0 r_1)} + j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_0}{x_n^A} C_n \frac{D_{1n}(x_n^A r)}{D_{0n}(x_n^A r_1)} \cos \gamma_n^A z. \quad (23)$$

Для области B с учетом (11) и (4) — (6) имеем

$$E_z^B = \sum_{m=1}^{\infty} M_m \frac{I_0(x_m^B r)}{I_0(x_m^B r_1)} \cos \gamma_m^B z; \quad (24)$$

$$E_r^B = M_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(kr_1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^B}{x_m^B} M_m \frac{I_1(x_m^B r)}{I_0(x_m^B r_1)} \sin \gamma_m^B z; \quad (25)$$

$$H_\varphi^B = j \sqrt{\epsilon_x} M_0 \frac{J_1(kr)}{J_0(kr_1)} + j \sqrt{\epsilon_x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k}{x_m^B} M_m \frac{I_1(x_m^B r)}{I_0(x_m^B r_1)} \cos \gamma_m^B z. \quad (26)$$

С целью нахождения условия возникновения резонанса в объеме резонатора следует потребовать равенства нормальных составляющих электромагнитного поля на границе раздела областей A и B :

$$(E_r^A)_{z=\delta} = (E_r^B)_{z=\delta}; \quad (27)$$

$$(H_\varphi^A)_{z=\delta} = (H_\varphi^B)_{z=\delta}. \quad (28)$$

Равенство (27), как видно из (9) и (10), выполняется для $r_1 < r < r_2$:

$$(E_r^A)_{z=\delta} = M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} M_m \sin \frac{\pi_m}{aL} z = (E_r^B)_{z=\delta}. \quad (29)$$

Компоненты поля $(H_\varphi^A)_{z=\delta}$ и $(H_\varphi^B)_{z=\delta}$, описываемые выражениями (23) и (26), представим как

$$(H_\varphi^A)_{z=\delta} = R_0^A C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A C_n \cos \frac{\pi n}{L} z, \quad (30)$$

где

$$R_0^A = j \frac{G_1(k_0 r)}{G_0(k_0 r_1)}; \quad R_n^A = j \frac{k D_{1n}(x_n^A r)}{x_n^A D_{0n}(x_n^A r_1)};$$

$$(H_\Phi^B)_{z=\delta} = R_0^B M_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m^B M_m \cos \frac{\pi_m}{aL} z. \quad (31)$$

Здесь

$$R_0^B = j \sqrt{\varepsilon_x} \frac{J_1(kr)}{J_0(kr_1)}; \quad R_m^B = j \frac{k}{x_m^B} \sqrt{\varepsilon_x} \frac{I_1(x_m^B r)}{I_0(x_m^B r_1)}.$$

Для сравнения компонент магнитного поля по выражениям (30) и (31) функцию $(H_\Phi^A)_{z=\delta}$ разложим в ряд Фурье по косинусам в интервале $(0, aL)$. Условие (28) в этом случае приводится к двум равенствам

$$R_0^B M_0 = \frac{1}{aL} \int_0^L \left[C_0 R_0^A + \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n^A \cos \frac{\pi_n}{L} z \right] dz =$$

$$= C_0 R_0^A + \frac{1}{\pi_a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n^A \frac{\sin \pi_{an}}{n}; \quad (32)$$

$$R_m^B M_m = \frac{2}{aL} \int_0^L \left[C_0 R_0^A + \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n^A \cos \frac{\pi_n}{L} z \right] \cos \frac{\pi_m}{aL} z dz =$$

$$= \frac{2}{\pi_a} (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n^A \frac{n \sin \pi_{an}}{(n^2 - m^2)}. \quad (33)$$

Подставляя в (32) и (33) значения C_0 и C_n из (13) и (14), производя деление обоих выражений на M_0 и ограничиваясь тремя первыми членами суммы, получаем

$$\frac{\pi^2}{2a} R_0^B = \frac{\pi^2 R_0^A}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{\sin 2\pi_{an}}{2a^2 n^2} + \frac{M_1}{2M_0} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{\sin 2\pi_{an}}{(a^2 n^2 - 1)} -$$

$$- \frac{M_2}{8M_0} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{\sin 2\pi_{an}}{\left(\frac{a^2 n^2}{4} - 1\right)} + \frac{M_2}{18M_0} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{\sin 2\pi_{an}}{\left(\frac{a^2 n^2}{9} - 1\right)}; \quad (34)$$

$$\frac{\pi^2}{4a} R_1^B \frac{M_1}{M_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi_{an}}{(a^2 n^2 - 1)} - \frac{M_1}{2M_0} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{a^2 n^2 \sin^2 \pi_{an}}{(a^2 n^2 - 1)^2}; \quad (35)$$

$$\frac{\pi^2}{a} R_2^B \frac{M_2}{M_0} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi_{an}}{\left(\frac{a^2 n^2}{4} - 1\right)} + \frac{M_2}{8M_0} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{a^2 n^2 \sin 2\pi_{an}}{\left(\frac{a^2 n^2}{4} - 1\right)^2}; \quad (36)$$

$$\frac{9\pi^2}{4a} R_3^B \frac{M_3}{M_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi_{an}}{(a^2 n^2 - 1)} - \frac{M_3}{18M_0} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{a^2 n^2 \sin 2\pi_{an}}{(a^2 n^2 - 1)^2}. \quad (37)$$

Определяя из (35)—(37) соотношения M_1/M_0 , M_2/M_0 , M_3/M_0 и подставляя их в (34), имеем уравнение, описывающее условия возникновения резонанса в коаксиальном резонаторе, частично заполненном плоским диэлектриком:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{2} R_0^A - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi_{an}}{a^2 n^2} = \frac{\pi^2}{2a} R_0^B + \\ & \frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi_{an}}{(a^2 n^2 - 1)} \right)^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{a^2 n^2 \sin 2\pi_{an}}{(a^2 n^2 - 1)^2} + \frac{\pi^2}{4a} R_1^B} + \frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi_{an}}{a^2 n^2 - 4} \right)^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{a^2 n^2 \sin 2\pi_{an}}{(a^2 n^2 - 4)^2} + \frac{\pi^2}{4a} R_2^B} + \\ & \frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^A}{2} \frac{\sin 2\pi_{an}}{a^2 n^2 - 9} \right)^2}{-\sum_{n=1}^{\infty} R_n^A \frac{a^2 n^2 \sin 2\pi_{an}}{(a^2 n^2 - 9)^2} + \frac{\pi^2}{4a} R_3^B} \end{aligned}$$

Найденное выражение позволяет вычислить абсолютное значение длины волны в резонаторе или его резонансной частоты в зависимости от толщины и диэлектрической проницаемости частично заполняющего резонатор плоского диэлектрика. На рис. 2 приведены расчетная и экспериментальная кривые зависимости резонансной длины волны в резонаторе от диэлектрической проницаемости материала. Для экспериментов использовался коаксиальный резонатор с параметрами $L=60$ мм, $r_1=4$ мм, $r_2=16$ мм. Для снятия кривой применяли образцы фторопласта, оргстекла, эбонита, гетинакса и стекла толщиной $0,5 \pm 0,05$ мм.

С помощью приведенных данных определены абсолютные значения диэлектрической проницаемости ряда влагосодержащих материалов, зависимость диэлектрической проницаемости от влажности таких материалов, как кожа, бумага, белковая оболочка для пищевых продуктов и др. Проведенные исследования позволили отыскать аналитические выражения, описывающие зависимость диэлектрической проницаемости от их влажности.

Список литературы: Кичевский Е. С. Высокочастотный контроль влажности. М., 1972. 215 с. 2. Патрушев В. Л. Расчет собственной частоты П-образного объемного контура, частично заполненного поглощающим диэлектриком // Докл. АН СССР. 1955. Т. 107, № 3. С. 409 — 413. 3. Карпова О. В. Об абсолютном методе измерения теоретических параметров твердых веществ с помощью П-образного резонатора // Физика твердого тела. 1959. Т. 1, № 2. С. 246—255. 4. Hahn W. C. On the resonant frequency of Closed Coucncentric Lines // Phys. 1941. Vol. 12, № 62. P. 33 — 45.

Поступила в редколлегию 12.07.87