УДК 621.372.09

А. Г. НЕРУХ, И. Ю. ШАВОРЫКИНА

ПАДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ

Исследования дифракции электромагнитных волн на объектах с нестационарной средой наталкиваются на значительные трудности. Лишь в простейших случаях удается получить ответ в удобной для анализа форме. Например, в работах [1; 2] рассмотрено отражение и прохождение электромагнитных волн через плоскую неподвижную границу раздела сред, диэлектрическая проницаемость одной из которых меняется во времени. Влияние на электромагнитное поле изменения во времени значения проводимости исследовалось в одномерном случае безграничной среды в работе [3], где решена задача о преобразовании стационарных полей, гармонически зависящих от времени и электромагнитных сигналов при скачкообразном изменении проводимости среды.

В предлагаемой работе изучается прохождение электромагнитных волн из стационарного полупространства в нестационарное, где в определенный момент времени $t = 0$ в диэлектрической среде появляется проводимость. Решение проводится на основе интегральных уравнений макроскопической электродинамики [4], которые для рассматриваемой задачи в операторном представлении имеют вид $\vec{E}_2 =$

$= \vec{E}_1 + \widehat{K}\vec{E}_2$, где $\vec{E}_1$ — падающее поле; $\vec{E}_2$ — поле после изменения среды и $\widehat{K}$ — интегральный оператор типа Вольтерра. Их решение находится с помощью резольвенты $\widehat{R}$ и записывается через нее в виде $\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \widehat{R}\vec{E}_1$.

Резольвента для случая скачкообразного появления в безграничной диэлектрической среде конечной проводимости σ найдена в работе [5] и в импульсном представлении имеет вид

$$\langle \vec{p} | \widehat{R}_1 | \vec{p}' \rangle_{ij} = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \frac{v^2 k_i k_j + p\left(p + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\right)\delta_{ij}}{\left(p + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\right)\left(p^2 + p\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} + v^2 k^2\right)} \Delta(\vec{p} - \vec{p}'),$$

$$\vec{p} = (p, \vec{k}), \tag{1}$$

при этом оператор $\widehat{K}_1$ записывается следующим образом:

$$\langle \vec{p} | \widehat{K}_1 | \vec{p}' \rangle_{ij} = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon p} \frac{v^2 k_i k_j + p^2 \delta_{ij}}{p^2 + v^2 k^2} \Delta(\vec{p} - \vec{p}'). \tag{2}$$

Рассмотрим случай, когда нестационарная область занимает полупространство $x \geqslant 0$, а поле имеет только составляющую, нормальную к оси x и не зависящую от поперечных координат y и z.

Тогда для одномерной полуограниченной среды выражение (1) для резольвенты $\widehat{R}_1$ и (2) для ядра $\widehat{K}_1$ преобразуются к виду

$$\langle \vec{p} | \widehat{R}_1 | \vec{p}' \rangle = -\frac{2\sigma_\varepsilon p}{p^2 + 2p\sigma_\varepsilon + v^2 k^2} \cdot \frac{2\pi\delta(k - k')}{p - p'};$$

$$\langle \vec{p} | \widehat{K}_1 | \vec{p}' \rangle = -\frac{2\sigma_\varepsilon p}{p^2 + v^2 k^2} \cdot \frac{2\pi\delta(k - k')}{p - p'}, \tag{3}$$

где $\sigma_\varepsilon = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}$; $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p'$; $\vec{p} = (p, k)$.

Отсюда можно найти координатное представление резольвенты в одномерном случае, произведя обратное преобразование Фурье-Лапласа:

$$\langle \vec{x} | \widehat{R}_1 | \vec{x}' \rangle = \frac{\sigma_\varepsilon}{v} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{p}{\sqrt{p(p + 2\sigma_\varepsilon)}} e^{p(t-t') - \frac{|x-x'|}{v}\sqrt{p(p+2\sigma_\varepsilon)}}, \tag{4}$$

где $\vec{x} = (x, t)$.

Последнее выражение справедливо для безграничной среды. При учете влияния границы на процесс взаимодействия поля с нестационарной средой ядро интегрального уравнения Вольтерра $\widehat{K}_2$ будет отличаться в координатном представлении от ядра $\widehat{K}_1$ для безграничной среды наличием множителя справа, равного $\theta(x')$. Поскольку это уравнение определено только внутри объекта дифракции, то при построении решения это необходимо учитывать, умножая ядро слева на $\theta(x)$, так что полное ядро $\widehat{K}_2$ будет иметь вид

$$\langle\vec{x}|\widehat{K}_2|\vec{x}'\rangle=\theta(x)\langle\vec{x}|\widehat{K}_1|\vec{x}'\rangle\theta(x'), \tag{5}$$

отсюда

$$\langle\vec{p}|\widehat{K}_2|\vec{p}\rangle=\langle\vec{p}|\theta\widehat{K}_1\theta|\vec{p}'\rangle.$$

Найдем импульсное представление оператора $\widehat{K}_2$, для чего необходимо сперва найти импульсное представление функции $\theta(x)$:

$$\langle\vec{p}|\theta(x)|\vec{p}'\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{0}^{\infty}dt\,e^{-pt-ikx}\theta(x)e^{p't+ik'x}=-\frac{i}{(p-p')(k-k'-io)}.$$

Свернем теперь оператор $\widehat{K}_1$ с θ-функциями, и для импульсного представления ядра $\widehat{K}_2$ будем иметь

$$\langle\vec{p}|\widehat{K}_2|\vec{p}'\rangle=\frac{\sigma_\varepsilon}{p-p'}\left\{\frac{2pi}{(k-k'-io)(p^2+v^2k^2)}+\frac{v}{(p-ikv)(p-ik'v)}\right\} \tag{6}$$

Аналогичным образом найдем свертку выражения (3) для $\widehat{R}_1$ с θ-функциями:

$$\langle\vec{p}|\theta R_1\theta|\vec{p}'\rangle=\frac{\sigma_\varepsilon}{p-p'}\left\{\frac{2ip}{(k-k'-io)(p^2+2p\sigma_\varepsilon+v^2k^2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{pv}{\sqrt{p(p+2\sigma_\varepsilon)}\,(\sqrt{p(p+2\sigma_\varepsilon)}-ikv)\,(\sqrt{p(p+2\sigma_\varepsilon)}-ik'v)}\right\}. \tag{7}$$

Резольвенту $\widehat{R}_2$ согласно методу отражений [5] будем искать в виде, сходном с (7):

$$\langle\vec{p}|\widehat{R}_2|\vec{p}'\rangle=\frac{\sigma_\varepsilon}{p-p'}\left\{\frac{2pi}{(k-k'-io)(p^2+2p\sigma_\varepsilon+v^2k^2)}+\right.$$
$$+\frac{pv}{\sqrt{p(p+2\sigma_\varepsilon)}\,(\sqrt{p(p+2\sigma_\varepsilon)}-ikv'}\times$$
$$\left.\times\left[\frac{1}{\sqrt{p(p+2\sigma_\varepsilon)}-ikv}-\frac{R(p)}{\sqrt{p(p+2\sigma_\varepsilon)}+ikv}\right]\right\}. \tag{8}$$

Неизвестный коэффициент $R(p)$ найдем из условия, что резольвента (8) должна удовлетворять уравнению

$$\langle\vec{p}|\widehat{R}_2|\vec{p}'\rangle-\int d\vec{p}_1\langle\vec{p}|\widehat{K}_2|\vec{p}_1\rangle\langle\vec{p}_1|\widehat{R}_2|\vec{p}'\rangle=\langle\vec{p}|\widehat{K}_2|\vec{p}'\rangle, \tag{9}$$

где $\int d\vec{p}_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_1}{2\pi}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dp_1}{2\pi i}$. Для проверки этого уравнения найдем свертку операторов $\widehat{K}_2$ и $\widehat{R}_2$ и, подставив ее в (9), получим для коэффициента отражения

$$R(p)=(\sqrt{p(p+2\sigma_\varepsilon}-p)/(\sqrt{p(p+2\sigma_\varepsilon)}+p).$$

Теперь резольвента $\widehat{R}_2$ принимает вид

$$\langle \vec{p} | \widehat{R}_2 | \vec{p'} \rangle = \frac{2\sigma_\varepsilon}{p - p'} \cdot \frac{p}{p^2 + 2p\sigma_\varepsilon + v^2k^2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{i}{k - k' - io} + \frac{v(p + ikv)}{(\sqrt{p(p + 2\sigma_\varepsilon)} - ik'v)(\sqrt{p(p + 2\sigma_\varepsilon)} + ikv)} \right\}. \quad (10)$$

Последняя формула дает нам импульсное представление резольвенты. Для нахождения поля после скачка σ необходимо координатное представление $\widehat{R}_2$, которое можно получить с помощью обратного преобразования Фурье—Лапласа:

$$\langle \vec{x} | \widehat{R}_2 | \vec{x'} \rangle = -\frac{\sigma_\varepsilon}{v} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{dq}{2\pi i} \frac{q - \sigma_\varepsilon}{\sqrt{q^2 - \sigma_\varepsilon^2}} e^{(q - \sigma_\varepsilon)\tau} \times$$

$$\times \left\{ e^{-\frac{|x - x'|}{v}\sqrt{q^2 - \sigma_\varepsilon^2}} - \frac{q - \sigma_\varepsilon - \sqrt{q^2 - \sigma_\varepsilon^2}}{q - \sigma_\varepsilon + \sqrt{q^2 - \sigma_\varepsilon^2}} e^{-\frac{(x + x')}{v}\sqrt{q^2 - \sigma_\varepsilon^2}} \right\}, \quad (11)$$

$$q = p + \sigma_\varepsilon, \quad \alpha \geqslant \sigma_\varepsilon, \quad \tau = t - t'.$$

Решим теперь с помощью резольвенты $\widehat{R}_2$ конкретную задачу о прохождении плоской монохроматической волны $\vec{E}_1(x, t) = \vec{E}_0 \times \exp\left\{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right\}$ в нестационарное полупространство $x \geqslant 0$, где в нулевой момент времени в диэлектрической среде появляется проводимость σ.

Поле $\vec{E}_2$ внутри нестационарной среды записывается через резольвенту в виде

$$\vec{E}_2(x, t) = \vec{E}_1(x, t) + \int\limits_0^\infty dx' \int\limits_0^\infty dt' \widehat{R}_2 \vec{E}_1(x', t'). \quad (12)$$

Подставим в (12) явный вид поля $\vec{E}_1$ и резольвенты $\widehat{R}_2$. Тогда после интегрирования по t' и по x' последнее выражение примет вид

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)} - 2\sigma_\varepsilon \vec{E}_0 \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{dq}{2\pi i} \frac{q - \sigma_\varepsilon}{(q^2 - \sigma_\varepsilon^2 + \omega^2)(i\omega - q + \sigma_\varepsilon)} \times$$

$$\times e^{(q - \sigma_\varepsilon)t} \left\{ e^{-i\frac{\omega}{v}x} - \frac{q - \sigma_\varepsilon + i\omega}{q - \sigma_\varepsilon + \sqrt{q^2 - \sigma_\varepsilon^2}} e^{-\frac{x}{v}\sqrt{q^2 - \sigma_\varepsilon^2}} \right\}. \quad (13)$$

Первый интеграл по q в (13) может быть вычислен с помощью вычетов, в результате чего для поля $\vec{E}_2$ будем иметь

$$\vec{E}_2=\frac{\sigma_\varepsilon\vec{E}_0}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2-\omega^2}}e^{-i\frac{\omega}{v}x}\left\{\frac{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2-\omega^2}-\sigma_\varepsilon}{i\omega-\sqrt{\sigma_\varepsilon^2-\omega^2}+\sigma_\varepsilon}e^{\left(\sqrt{\sigma_\varepsilon^2-\omega^2}-\sigma_\varepsilon\right)t}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2-\omega^2}+\sigma_\varepsilon}{i\omega+\sqrt{\sigma_\varepsilon^2-\omega^2}+\sigma_\varepsilon}e^{-\left(\sqrt{\sigma_\varepsilon^2-\omega^2}+\sigma_\varepsilon\right)t}\right\}+2\sigma_\varepsilon\vec{E}_0\times \tag{14}$$
$$\times\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{dq}{2\pi i}\frac{(q-\sigma_\varepsilon)(i\omega+q-\sigma_\varepsilon)}{(q^2-\sigma_\varepsilon^2+\omega^2)(i\omega-q+\sigma_\varepsilon)\left(\sqrt{q^2-\sigma_\varepsilon^2}+q-\sigma_\varepsilon\right)}e^{(q-\sigma_\varepsilon)t-\frac{x}{v}\sqrt{q^2-\sigma_\varepsilon^2}}.$$

Трактовка первых двух слагаемых в (14) зависит от соотношения σ_ε и ω. Если $\sigma_\varepsilon\geqslant\omega$, эти слагаемые не представляют собой распространяющиеся волны, тогда как при $\sigma_\varepsilon<\omega$ первое описывает прямую волну (распространяющуюся в положительном направлении оси x), а второе — обратную, образовавшуюся в результате отражения от временной неоднородности. Сумма амплитуд этих волн равна амплитуде падающего поля $\vec{E}_0$. Третье слагаемое содержит информацию о трансформированном в результате скачка прошедшем поле. Выражение (14) справедливо внутри области $x\geqslant 0$. Внешнее, т. е. отраженное от нестационарного полупространства поле, может быть найдено с помощью прямого интегрального преобразования [4]. В это поле будет вносить вклад не только отраженная от границы волна, но и обратная волна, образовавшаяся в результате расщепления прошедшей в нестационарную область волны под действием скачка проводимости.

Список литературы: 1. *Morgenthaller F. R.* // IRE Trans. on microwave theory and techniques. 1958. Vol. MTT-6. P 167—172. 2. *Fante R. L.* // IEEE Trans. on antennas and propagation. 1971. Vol. AP-19. № 3. P. 417—424 3. *Борисов В. В.* Трансформация электромагнитного поля при изменении проводимости среды со временем // Геомагнетизм и аэрономия. 1989. Т. 29, № 5. С. 730—737. 4. *Хижняк Н. А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. К., 1986. 280 с. 5. *Нерух А. Г.* Метод резольвенты в задачах нестационарной дифракции электромагнитных волн. К., 1987. Деп. в УкрНИИНТИ 22.01.87. № 462-Ук87.

Поступила в редколлегию 04.06.90