

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ФИЛЬТРА КАЛМАНА-БЬЮСИ К ОТКЛОНЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ВЫБРАННОЙ МОДЕЛИ

Введение

Рекурсивные процедуры оптимальной оценки играют важную роль в различных задачах телекоммуникации, в частности в задачах мониторинга, управления элементами, структурой сети и сетью в целом. Так, поступающие по сети сигнализации данные не всегда удается интерпретировать как детерминированную последовательность и непосредственно использовать для указанных задач. Эти данные, как правило, несут в себе значительную долю стохастичности и требуют дополнительной статистической обработки. Обработка в виде получения выборочных статистик и соответствующих оценок является мало эффективной, как для задач мониторинга, так и для задач управления, поскольку наличие задержки времени на получение выборки и получаемая при этом оценка может служить лишь для анализа истории развития процесса, а не для оперативного управления. Нестационарность же статистик приводит к потере эффективности выборочных оценок.

Более конструктивной, по сравнению с выборочной, является рекурсивная оценка, которая уточняется с каждым новым поступлением выборочных данных и которая может быть использована для задач управления в реальном масштабе времени.

Формализация задачи рекурсивной оценки и управления

Известно, что оптимальной, в смысле минимума среднего квадрата ошибки оценки, является процедура фильтра Калмана-Бьюси (ФКБ). Эта оценка часто имеет самостоятельное значение, однако наибольший интерес она вызывает при решении задач управления состоянием телекоммуникационной системы, где она является составной процедурой.

Алгоритм оптимального управления в телекоммуникациях чаще всего реализуется с использованием среднеквадратического критерия [1]:

$$\min_u \mathfrak{J}(x, u) = \frac{1}{2} x^T(t_F) D(t_F) x(t_F) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_F} x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t) dt, \quad (1)$$

где D , Q – действительные, симметричные и не отрицательно определенные матрицы, матрица R – действительная, симметричная и положительно определенная; t_F – финальное значение времени, когда цель (минимум $\mathfrak{J}(x, u)$) будет достигнута. Первое слагаемое в правой части (1) обеспечивает необходимое значение состояния $x(t)$ в конечный момент времени t . Второе слагаемое обеспечивает оптимальность управления вдоль траектории системы на интервале $(t_F - t_0)$ и удерживает соответствующее значение состояния $x(t)$ в определенных рамках, без чрезмерных выбросов. Третье – определяет ограничение на величину самих управляющих значений $u(t)$. Часто это третье слагаемое опускают, поскольку в телекоммуникациях расход ресурса на само управление не учитывается. Значение матриц D , Q и R зависят от важности соответствующих составляющих для конкретной задачи.

Как следует из теории, само управление находится из соотношения:

$$u(t) = L(t) \hat{x}(t), \quad (2)$$

где $L(t)$ – линейный функционал, $\hat{x}(t)$ – оптимальная оценка, случайного процесса $x(t)$ получаемая на выходе ФКБ.

Формализация алгоритма ФКБ включает три основные рекурсивные уравнения: уравнение состояния, уравнение наблюдения и уравнение оценки [2].

Уравнение состояния, являющееся математической моделью оцениваемого процесса отображает динамику случайного поведения системы:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t) + G(t)\xi(t), \quad (3)$$

где $F(t)$ и $G(t)$ – коэффициенты, соответственно состояния и генерации, $\xi(k)$ – случайный процесс генерации типа белого гауссового шума со спектральной плотностью мощности $N_\xi(t)$.

Уравнение наблюдения отображает процедуру измерения состояния:

$$y(t) = H(t)x(t) + v(t), \quad 0 \leq t \leq t_F. \quad (4)$$

Здесь процессы $y(t)$, $x(t)$ и $v(t)$ в общем случае являются векторными с M компонентами; $H(t)$ – масштабирующая матрица $M \times N$; $x(t)$ – векторный случайный процесс, определяющий состояние (3), значения которого необходимо оценить, $v(t)$ – случайный гауссов белый шум наблюдения. Шум $v(t)$ образуется как совокупность шумов в канале сигнализации, погрешностей измерения датчиками состояния $x(t)$, погрешностей модели и др., он обычно имеет среднее значение равное нулю и ковариационную матрицу:

$$\text{cov}\{v(t), v(\tau)\} = N_v(t)\delta_D(t - \tau). \quad (5)$$

Уравнение оценки отображает динамику изменения состояния в каждый момент времени наблюдения:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - H(t)\hat{x}(t)], \quad (6)$$

где $K(t) = V(t)H(t)N_v^{-1}(t)$ – коэффициент, обеспечивающий оптимальность оценки и скорости сходимости процедуры.

Дифференциальное уравнение отображает изменение апостериорной дисперсии:

$$\frac{dV(t)}{dt} = F(t)V(t) + V(t)F^T(t) - V(t)H^T(t)N_v^{-1}(t)H(t)V(t) + G(t)N_\xi G^T(t). \quad (7)$$

Апостериорная дисперсия ошибки оценки в установившемся состоянии ФКБ может быть также определена как выборочная характеристика:

$$V(t) = \frac{1}{T} \int_T \Delta\tilde{x}^2(t) dt, \quad (8)$$

где $\Delta\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ – является текущей ошибкой оценки.

Анализ аналогового алгоритма ФКБ

Как следует из анализа процедуры оценки (6), апостериорную дисперсию (7) можно рассчитать, не проводя анализа самого фильтра, поскольку в выражение (7) не входят значения оцениваемого процесса $x(t)$. Приравнявая производную к нулю, можем получить значения апостериорной дисперсии в установившемся состоянии $V(\infty)$ в зависимости от соотношения сигнал/шум $h^2 = N_\xi / N_v$. Проводя соответствующие арифметические операции, получим [3]:

$$V(\infty) = 2N_\xi / (1 + \sqrt{1 + h^2}). \quad (9)$$

На рис. 1 представлен график относительного значения апостериорной дисперсии в установившемся состоянии. Штриховой линией представлены предельные значения, отображающие идеальные условия функционирования. Сплошными линиями показаны графики, характеризующие апостериорную дисперсию при отклонении параметров процесса $x(t)$ от модели ФКБ в одну и другую сторону (интервала корреляции $\tau_{\text{кор}}$) в десять раз. При этих отклонениях происходит ошибка в выборе полосы частот фильтра $\Delta F \approx \tau_{\text{кор}}^{-1} = \alpha_{ij}$ (α_{ij} – элементы матрицы F).

Приведенный анализ показывает чувствительность ФКБ к отклонениям выбранной модели. Из анализа следует, что наибольшие потери эффективности имеют место при малых значениях $h^2 \leq 10 \dots 10^2$, где ФКБ может терять устойчивость (апостериорная дисперсия $V(\infty)$ больше априорной). Эти потери несимметричны при отклонении в одну и другую сторону, то есть: “зарезание” спектра оцениваемого сигнала приводят к большим потерям, чем выбор большей полосы частот.

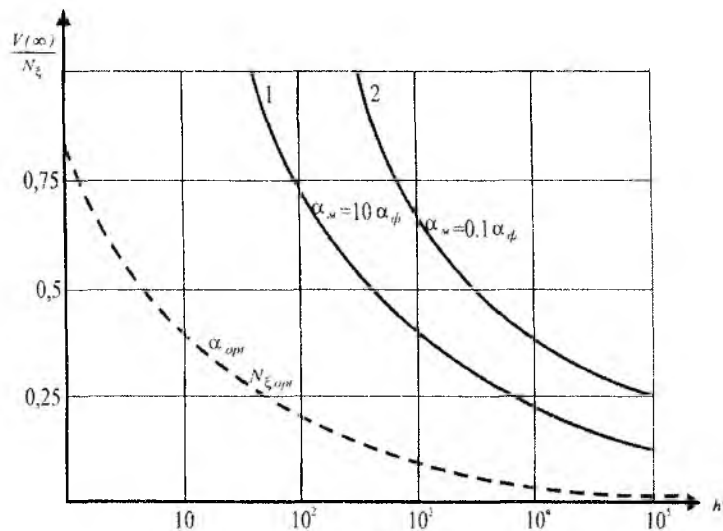


Рис. 1

Данные исследования аналогового ФКБ носят теоретический, идеализированный характер и могут рассматриваться как предельные значения эффективности. Практическое использование ФКБ показывает, что на указанные зависимости накладываются еще существенные реализационные ограничения.

Анализ дискретного алгоритма ФКБ

Реальные устройства оценки и управления в телекоммуникационных системах являются дискретными:

$$u(k) = L(k)\hat{x}(k). \quad (10)$$

Дискретность обусловлена тем, что данные по линиям связи поступают в цифровом виде и через определенный интервал $\Delta t = k_n - k_{n-1}$, определяемый той или иной технологией. Поэтому на качество оценок дополнительно влияют такие факторы, как темп поступления данных, алгоритмические особенности реализации процедуры ФКБ, нестационарность оцениваемого процесса $x(k)$ и др.

Исследования влияния отклонений параметров дискретного ФКБ от выбранной модели (чувствительность ФКБ) проведем на макете, включающем модель наблюдения, модель оценки и модель обработки. Структурная схема машинного эксперимента представлена на рис. 2.

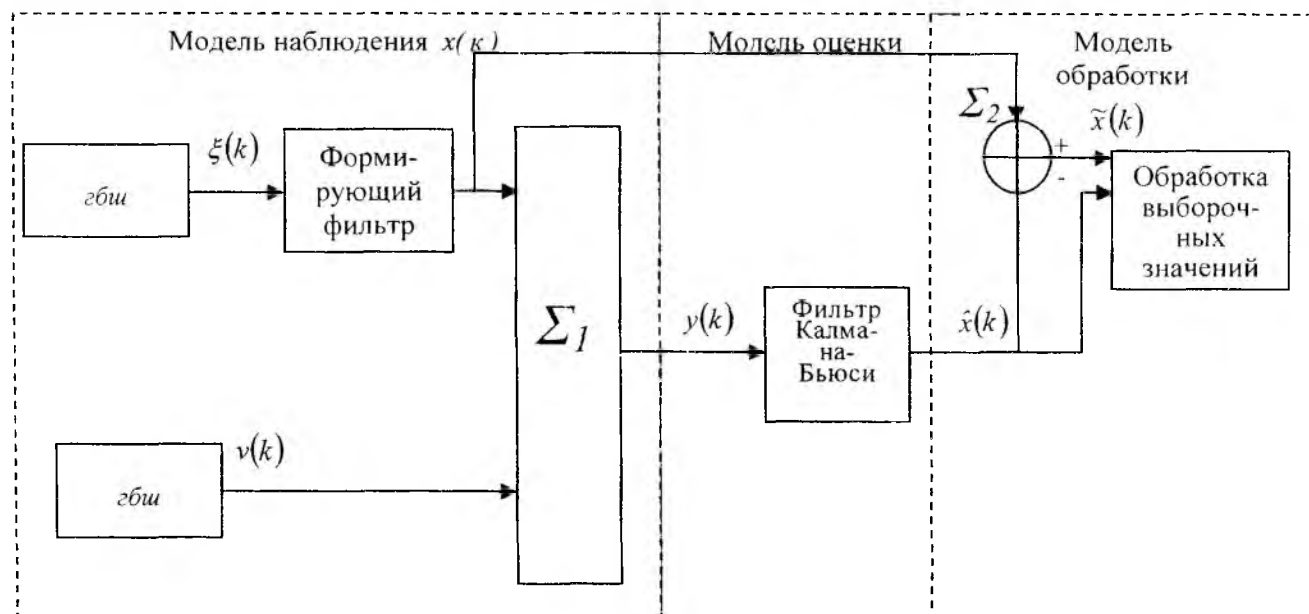


Рис. 2

Данная схема машинного эксперимента позволяет выбирать те или иные параметры модели оцениваемого процесса $x(k)$ и модели шума наблюдения $N_v(k)$. Модель наблюдаемого сигнала $x(k)$ соответствует уравнению (4), где сам сигнал формируется по алгоритму (3). Отдельные генераторы шумов $\hat{x}(k)$ и $v(k)$ представляют собой стандартные процедуры формирования “белых” последовательностей, с выбором соответствующих значений спектральных плотностей мощностей $N_v(k)$ и $N_x(k)$. Практика показывает, что полученные последовательности $\hat{x}(k)$, $v(k)$, $y(k)$ и $x(k)$ как правило имеют определенные отклонения параметров от заданных. Поэтому корректность выбираемых параметров моделей контролировалась путем получения выборочных оценок этих параметров. При этом, для удобства интерпритации результатов, значение $N_v(k)$ выбиралось с единичным уровнем. Матрицу наблюдения для стационарного случая выбрано из условия $H(k) = \text{const} = 1$, что не сужает общности результатов. Модель оценки соответствует алгоритму (6 и 7), которые реализованы в дискретном виде [2]:

$$\hat{x}(k) = F(k, k-1)\hat{x}(k-1) + K(k)[y(k) - H(k)F(k, k-1)\hat{x}(k-1)]. \quad (11)$$

Уравнение апостериорной дисперсии представляется в виде

$$V_{\hat{x}}(k) = [I - K(k)H(k)]V_{\hat{x}}(k|k-1). \quad (12)$$

Получаемые на выходе фильтра оценки сигнала $\hat{x}(k)$, сопоставляются с теми значениями $x(k)$, которые сформированы в модели сигнала. Имеющая место на выходе Σ_2 ошибка оценки $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ используется далее для получения выборочной оценки апостериорной дисперсии (8) и гистограммы распределения вероятностей.

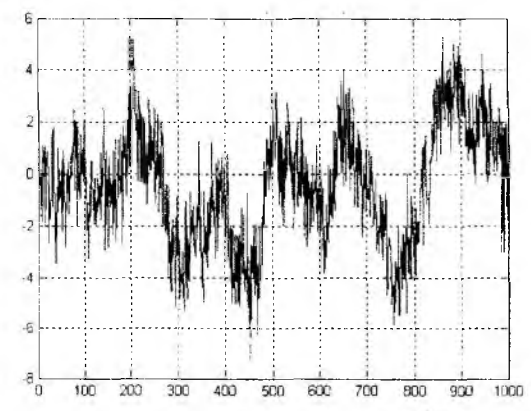
В результате машинного моделирования получены различные результаты анализа ФКБ при стационарных наблюдениях $y(k)$. На рис. 3, представлены типовые зависимости: а) наблюдаемого процесса $y(k)$ при шаге дискретизации $T/\tau_{\text{кор}} = 0,1$ и при $h^2 = 10$; б) оценки $\hat{x}(k)$; в) ошибки оценки $\tilde{x}(k)$; г) гистограммы распределения ошибки оценки $\tilde{x}(k)$; д) расчетное по формуле (9) значение апостериорной дисперсии ошибки оценки $V_x(k)$ при $T/\tau_{\text{кор}} = 0,01$; $D = 10$, ж) расчетное значение апостериорной дисперсии ошибки оценки $V_x(k)$ при $T/\tau_{\text{кор}} = 0,01$; $D = 70$, д) расчетное значение апостериорной дисперсии ошибки оценки $V_x(k)$ при $T/\tau_{\text{кор}} = 0,01$; $D = 100$.

Из приведенных графиков можно заключить, что характер сходимости при одних и тех же параметрах модели зависит от выбранных параметров рекурсивной процедуры и от величины шага дискретизации $T/\tau_{\text{кор}}$.

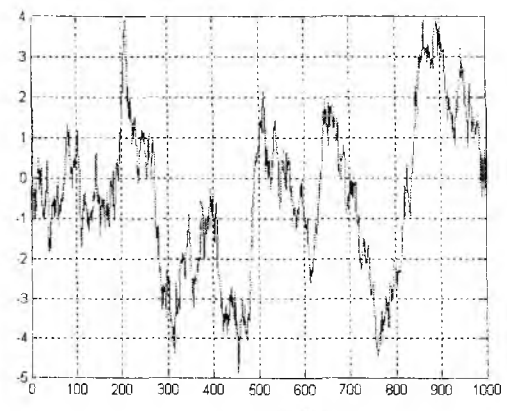
Отмечается различная скорость сходимости процедуры оценки к установившемуся состоянию: высокая (рис. 3, д), слабая (рис. 3, ж), и плохая, когда ФКБ расходится, неустойчивый режим (рис. 3, з). В лучшем случае сходимость фильтра наступает уже на 4-10 шагах дискретизации.

На рис. 4 представлены обобщенные графики, позволяющие проанализировать особенности сходимости в зависимости от выбора двух основных параметров ФКБ $T/\tau_{\text{кор}}$ и h^2 – параметра фильтра, соответствующего значению N_x .

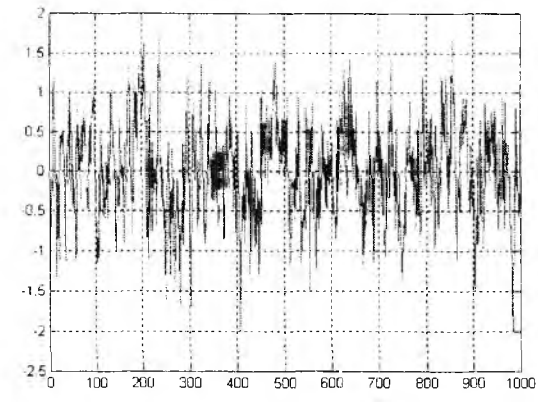
Из графиков следует, что время сходимости к установившемуся состоянию возрастает с увеличением уровня оцениваемого сигнала (h^2). Это время может возрастать до бесконечности, что является признаком расходимости процедуры. Особенно критичным является режим при больших шагах дискретизации (при $T/\tau_{\text{кор}} = 0,1$). Здесь фильтр устойчиво сходится лишь при малых соотношениях сигнал/шум ≤ 20 .



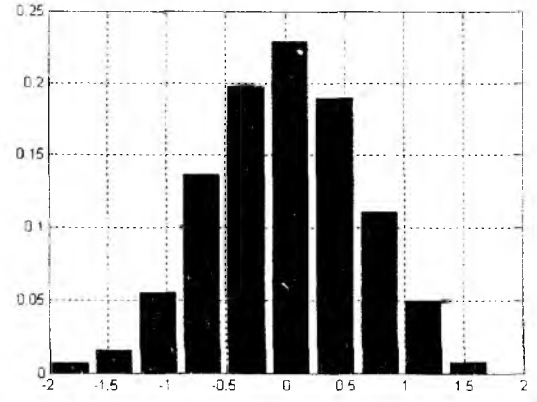
а – реализация $y(k)$



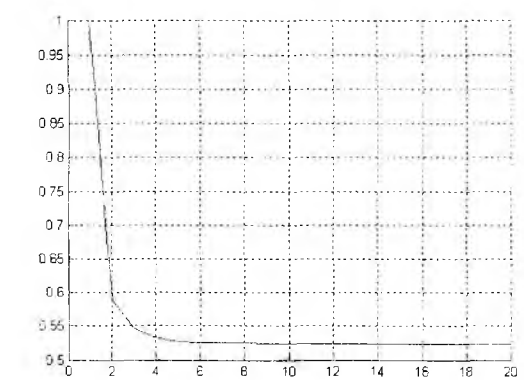
б – оценка $\hat{x}(k)$



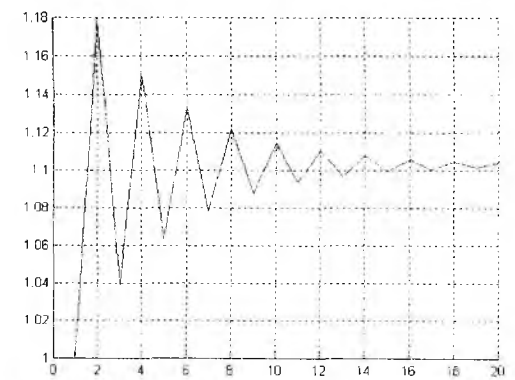
в – ошибка оценки $\tilde{x}(k)$



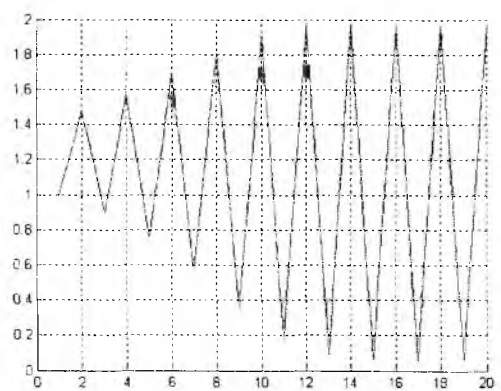
г – гистограмма распределения ошибки оценки $\tilde{x}(k)$



д – значение апостериорной дисперсии ошибки оценки $V_x(k)$



е – значение апостериорной дисперсии ошибки оценки $V_x(k)$



з – дисперсии ошибки оценки $V_x(k)$

Рис. 3

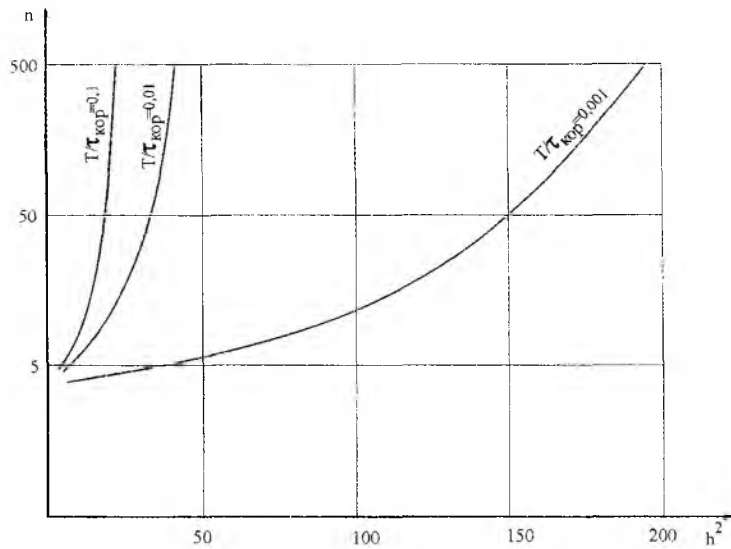


Рис. 4

На рис. 5 представлена зависимость времени сходимости фильтра при отклонении модели по соотношению сигнал/шум (отклонения дисперсии оцениваемого сигнала к спектральной плотности мощности шума наблюдения).

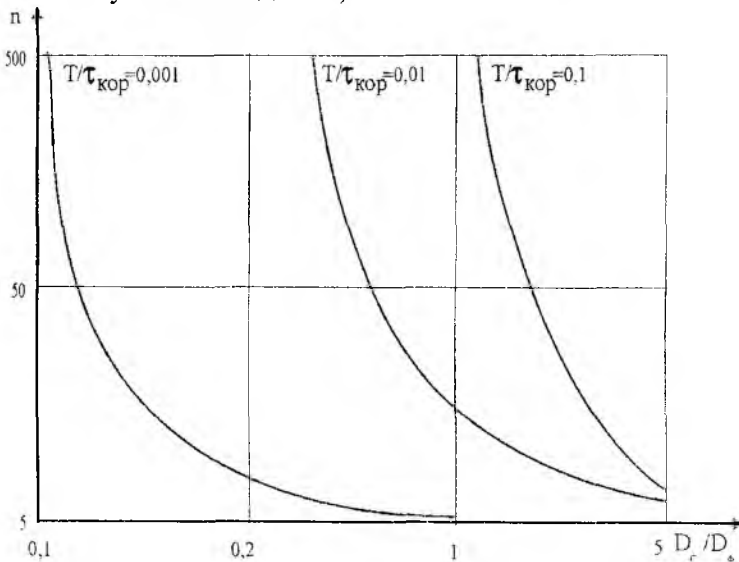


Рис. 5

Из графиков следует, что чувствительность процедуры оценки к отклонению параметров выбранной модели в одну и другую сторону не обладает симметрией. Более того, выбор заниженного соотношения сигнал/шум не только не ухудшает сходимость, а даже ее улучшает, что позволяет сделать важный практический вывод: соотношение сигнал/шум в процедуре оценки следует занижать, что будет способствовать улучшению сходимости, при этом качество оценки (апостериорная дисперсия ошибки оценки практически не изменяется). Большие соотношения сигнал/шум, очевидно, приводят к тому, что с уменьшением спектральной плотности мощности шума наблюдения, которая входит в отрицательной степени в коэффициент усиления фильтра $K(k)$, приводит к плохой обусловленности этого матричного коэффициента. Другой метод улучшения сходимости: повышения точности оценок, которая наступает при сокращении шага дискретизации. На рис. 6 представлена зависимость времени сходимости фильтра к установившемуся состоянию при больших шагах дискретизации. Такая ситуация, когда $T \approx (0.1 \dots 1)\tau_{kop}$, типична для сетей сигнализации.

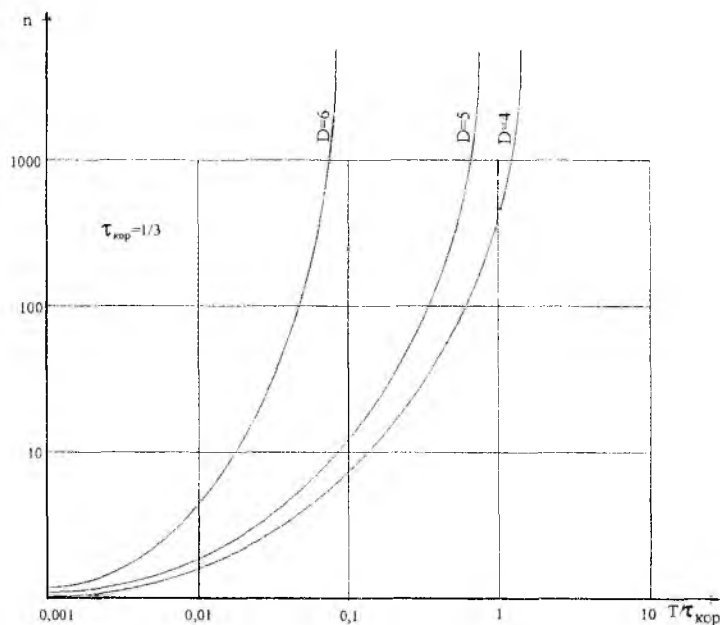


Рис. 6

На рисунке изображены графики сходимости в области достаточно больших шагов дискретизации $T/\tau_{кор} > 0,1$. Такие условия характерны для выборки, организованной по сети сигнализации. Так, данные, которые поступают в пакетах RTSP, имеют темп поступления около 5 сек. Учитывая, что интервал корреляции изменений трафика имеет величину 10...50 сек., то на этом интервале размещается 2...10 отсчетов. Устойчивое функционирование в этом случае, как следует из графиков, можно обеспечить за счет выбора малых отношений сигнал/шум, на уровне 4-6 раз.

При проведении эксперимента вычислялось также выборочное значение апостериорной дисперсии по формуле

$$D_{ps} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N [\hat{x}(k) - x(k)]^2. \quad (13)$$

На рис. 7 представлен график выборочной апостериорной дисперсии ошибки оценки.

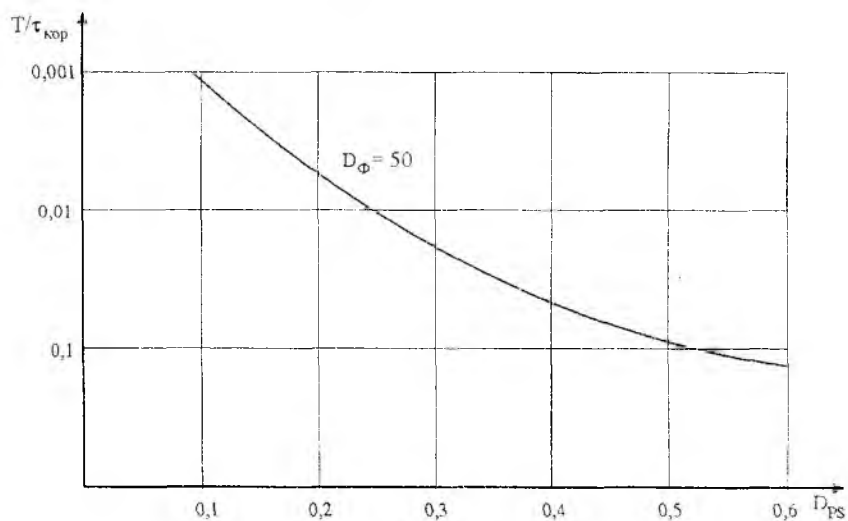


Рис. 7

Из графика следует, что апостериорная дисперсия D_{ps} , а соответственно и точность оценки, может быть существенно улучшена за счет увеличения быстродействия рекурсивной процедуры, или же соответственно за счет сокращения шага дискретизации.

Заключение

Анализ качества оценки стационарного состояния показал, что ФКБ оказывается весьма чувствительным к выбору реализационных параметров, которые накладывают дополнительные качественные и количественные ограничения, которые необходимо учитывать в реальных задачах организации мониторинга и оптимального управления.

Анализ чувствительности стационарного состояния фильтра показал, что в целом расчетные и экспериментальные данные совпадают. Однако имеются и важные отличия связанные с реализационными особенностями. Оказалось, что время сходимости фильтра к установившемуся состоянию при удачном выборе параметров составляет 4-10 шагов дискретизации, и это время существенно зависит от выбора частоты дискретизации, и от выбора коэффициента усиления фильтра, в частности от выбора отношения сигнал/шум.

Хорошо сходятся те процедуры, которые организованы таким образом, что на интервале корреляции $\tau_{кор}$ оказывается несколько десятков или даже несколько сотен шагов дискретизации. Кроме того, время сходимости в значительной степени зависит от соотношения сигнал/шум (дисперсии процесса). В типичных условиях, когда данные по сети сигнализации поступают через достаточно большой интервал, добиться устойчивого режима ФКБ можно за счет занижения параметра сигнал/шум, хотя реальное отношение сигнал/шум может быть достаточно большим. Качество оценки при этом не претерпевает заметных ухудшений.

Список литературы: 1. *Справочник по теории автоматического управления* / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с. 2. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 496с. 3. *Родимов А. П., Поповский В. В.* Статистическая теория поляризационно-временной обработки сигналов и помех. М.: Радио и связь, 1984. 272с. 4. *Математичні основи теорії телекомунікаційних систем* / За заг. ред. В.В. Поповського. Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. 564 с.

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 07.11.2007