

142

---

К ТЕОРИИ ЭФФЕКТА ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА  
ПРИ ДВИЖЕНИИ ПОТОКА ЭЛЕКТРОНОВ НАД СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ  
РАЗДЕЛА

Э. И. Черняков, О. А. Третьяков, В. П. Шестопапов

В последнее время вызывает интерес излучение электромагнитных волн, обусловленное движением электронного потока или отдельного электрона над периодической структурой. Механизм такого излучения наглядно объясняется с помощью модели «мигающего» диполя [1]–[3], которая остается пригодной и для рассматриваемого случая дифракционной решетки, лежащей на границе полубесконечного диэлектрика с произвольным значением проницаемости  $\epsilon$ . Такая задача представляет определенный интерес, поскольку наличие диэлектрика влияет на амплитуду и направление излучения движущегося заряда или системы зарядов.

Впервые излучение заряда, движущегося над дифракционной решеткой, экспериментально наблюдалось Смитом и Парселлом в 1953 г. [2]. Оценка этого эффекта как источника светового и инфракрасного излучения содержится в работе [3].

Теоретическое рассмотрение излучения, обусловленного движением плоского монохроматического электронного потока над дифракционной решеткой, впервые проведено в работе [4].

В настоящей работе приводится строгое математическое решение задачи об излучении плоского монохроматического электронного потока, движущегося над бесконечно протяженной ленточной решеткой, помещенной на границе раздела вакуум-диэлектрик.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим электронный пучок с переменной составляющей комплексной амплитуды

$$\rho = \rho_0 \delta(z) e^{i(ky - \omega t)}, \quad (1)$$

который движется в вакууме над металлической решеткой вдоль оси  $Oy$  с постоянной скоростью  $\bar{v} = j\beta c$ ; решетка расположена на границе диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$  в плоскости  $z = -a$ . Здесь введены следующие обозначения:

$\rho_0$  — амплитуда модуляции пучка,

$\omega$  — частота модуляции,

$c$  — скорость света,

$$k = \frac{\omega}{v};$$

$\delta(z)$  — дельта-функция Дирака;

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  — орты прямоугольной системы координат.

Период решетки  $l$  и ширина лент  $d$ ; образующие лент параллельны оси  $Ox$ .

Для удобства рассмотрения обозначим полупространство над решеткой ( $\epsilon = 1$ ) через область I, а полупространство под решеткой ( $\epsilon \neq 1$ ) через область II.

Векторный и скалярный потенциалы для области находятся из решения уравнений

$$\square \vec{A}_I = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (2)$$

$$\square \Phi_I = -4\pi\rho, \quad (3)$$

где ток  $\vec{J} = \vec{j} \rho \beta c$ .

Из (2) и (3) следует простая связь между их частными решениями:

$$a_I = \vec{j} \beta \varphi_I. \quad (4)$$

Следовательно, для области I задача сводится к отысканию общего решения уравнений (2), (3) и частного решения неоднородного дифференциального уравнения

$$\square \varphi_I = -4\pi\rho_0 \delta(z) e^{i(ky - \omega t)}. \quad (5)$$

Разделив на оператор Даламбера, получим решение в виде, аналогичном приведенному в [5]:

$$\varphi_I = \frac{2\pi\rho_0}{q} e^{-q|z|} e^{i(ky - \omega t)}, \quad (6)$$

где  $q = k\theta = k \sqrt{1 - \beta^2}$ .

Используя свойство градиентной инвариантности потенциала, общее решение уравнений (2), (3) будем искать в виде

$$\vec{a}_I^0 \neq 0; \quad \varphi_I^0 = 0. \quad (7)$$

Ввиду однородности структуры пучок—решетка вдоль оси и периодичности вдоль оси  $Oy$  вектор  $\vec{a}_I^0$  должен иметь только  $y$ - и  $z$ -компоненты, которые целесообразно представить в виде ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \vec{a}_I^0 = \vec{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{ny} e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y} + \\ + \vec{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k+2\pi\frac{n}{l}\right)y}. \end{aligned} \quad (8)$$

Постоянная распространения  $q_n = k\theta_n = k \sqrt{\beta^2 - \left(1 + n \frac{\beta}{\alpha}\right)^2}$  находится из подчинения (8) однородному уравнению (2). Здесь и дальше подразумевается зависимость от времени  $\exp(-i\omega t)$ .

Связь между неизвестными коэффициентами определяется из условия Лоренца:

$$a_{ny} = -a_n \frac{q_n}{1 + n \frac{\beta}{\alpha}} = -a_n \tau_n,$$

где  $\alpha = \frac{l}{\lambda}$ ;  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ .

Во второй области ( $\epsilon \neq 1$ ) векторный и скалярный потенциалы подчиняются однородным уравнениям

$$\square \vec{A}_{II} = 0, \quad (9)$$

$$\square \Phi_{II} = 0. \quad (10)$$

Решение их находится в следующей форме:

$$\Phi_{II} = 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{II} = \bar{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{ny} e^{-iq_{2n}(z+a)} e^{i\left(k+2\pi \frac{n}{l}\right)y} + \\ + \bar{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-iq_{2n}(z+a)} e^{i\left(k+2\pi \frac{n}{l}\right)y}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подчинив  $\bar{A}_{II}$  однородному уравнению (9), найдем

$$q_{2n} = k\theta_{2n} = k \sqrt{\epsilon^2 \beta^2 - \left(1 + n \frac{\beta}{\kappa}\right)^2}.$$

Из условия Лоренца легко получим

$$b_{ny} = b_n \frac{q_{2n}}{1 + n \frac{\beta}{\kappa}} = b_n \tau_{2n}.$$

Электромагнитное поле для каждой области определится через векторный и скалярный потенциалы —  $\bar{A}_I = \bar{a}_I + \bar{a}_I^0$ ;  $\Phi_I = \varphi_I + \varphi_I^0$ ;  $\bar{A}_{II}$ ;  $\Phi_{II}$ :

$$\begin{aligned} \bar{E}_I = \left( -i\theta \bar{j} + \frac{d|z|}{dz} \bar{k} \right) F e^{-q|z|} e^{iky} + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-\tau_n \bar{j} + \bar{k}) A_n e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k+2\pi \frac{n}{l}\right)y}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\bar{H}_I = \bar{e} \left\{ F \frac{d|z|}{dz} e^{-q|z|} e^{iky} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{1}{1 + n \frac{\beta}{\kappa}} e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k+2\pi \frac{n}{l}\right)y} \right\}; \quad (14)$$

$$\bar{E}_{II} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tau_{2n} \bar{j} + \bar{k}) B_n e^{-iq_{2n}(z+a)} e^{i\left(k+2\pi \frac{n}{l}\right)y}; \quad (15)$$

$$\bar{H}_{II} = \bar{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \frac{1}{1 + n \frac{\beta}{\kappa}} e^{-iq_{2n}(z+a)} e^{i\left(k+2\pi \frac{n}{l}\right)y}, \quad (16)$$

где  $F = 2\pi\beta_0$ ,  $A_n = ik\beta a_n$ ;  $B_n = ik\beta b_n$ .

Излучение возможно только в том случае, когда величины  $q_n$  и  $q_{2n}$  вещественны, что имеет место при

$$\beta^2 > \left(1 + n \frac{\beta}{\kappa}\right)^2 \quad \text{и} \quad \epsilon\beta^2 > \left(1 + n \frac{\beta}{\kappa}\right)^2. \quad (17)$$

Когда выполняются оба условия, излучение существует в обеих областях. Соответствующим выбором соотношения между диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon$ , скоростью пучка  $\beta$  и параметром  $\kappa$  можно добиться существования излучения только в области II. Заметим, что в отличие от случая решетки в свободном пространстве [4], где условие излучения выполняется только для  $n < 0$ , в рассматриваемом случае излучение возможно и при  $n > 0$ . Когда  $n = 0$ , наблюдается эффект Вавилова — Черенкова.

Из анализа поля обнаруживается простая связь между длиной волны излучения и направлением ее распространения:

$$\cos \gamma_n = \frac{1}{\beta} + n \frac{\lambda}{l}; \quad (18)$$

$$\cos \gamma_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left( \frac{1}{\beta} + n \frac{\lambda}{l} \right), \quad (19)$$

где  $\gamma_n$  — угол между плоскостью решетки и направлением излучения, отсчитываемый в положительном направлении, а  $\gamma_{2n}$  — в отрицательном.

Для количественного анализа излучения необходимо определить коэффициенты Фурье поля  $A_n$  и  $B_n$ , подчинив уравнения (13) — (16) граничным условиям на одном из периодов решетки, например,  $-\frac{l}{2} < y < \frac{l}{2}$ .

Потребуем выполнения точных граничных условий: равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля на металле и непрерывности всего электромагнитного поля на щелях:

$$z = -a \quad E_{1t} = E_{11t} = 0 \quad (\text{на металле}); \quad (20)$$

$$E_{1t} = E_{11t}; \quad H_{1t} = H_{11t} \quad (\text{на щели}). \quad (21)$$

Подставляя выражения для поля (13) — (16) в (20) — (21), получим равенства для коэффициентов  $A_n$ ,  $B_n$ :

$$F_a + A_0 = -B_0 \frac{\theta_{20}}{\theta_0}; \quad A_n = -B_n \frac{\theta_{2n}}{\theta_n}, \quad (22)$$

где  $F_a = Fe^{-qa}$ ;  $\theta_{20} = \sqrt{\epsilon\beta^2 - 1}$ ;  $\theta_0 = \sqrt{\beta^2 - 1}$ ,  
и пару уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \tau_n e^{i(k+2n\frac{\pi}{l})y} = -i\theta F_a e^{iky}; \quad |y| < \frac{d}{2}; \quad (23)$$

$$\left[ A_0 \left( 1 + \epsilon \frac{\theta_0}{\theta_{20}} \right) - F_a \left( 1 - \epsilon \frac{\theta_0}{\theta_{20}} \right) \right] e^{iky} + \sum_{n \neq 0} \frac{A_n}{1 + n \frac{\beta}{\lambda}} \left( 1 + \epsilon \frac{\theta_n}{\theta_{2n}} \right) e^{i(k+2n\frac{\pi}{l})y} = 0; \quad (24)$$

$$\frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}$$

Вводя новые коэффициенты

$$2C_0 = A_0 \left( 1 + \epsilon \frac{\theta_0}{\theta_{20}} \right) - F_a \left( 1 - \epsilon \frac{\theta_0}{\theta_{20}} \right);$$

$$2C_n = A_n \left( 1 + \epsilon \frac{\theta_n}{\theta_{2n}} \right)$$

и сделав соответствующие преобразования в (23) и (24), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{1}{1 + n \frac{\beta}{\lambda}} e^{i(k+2n\frac{\pi}{l})y} = 0; \quad (25)$$

$$\frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{e^{-in}}{1 + \varepsilon \frac{\theta_n}{\theta_{2n}}} e^{i(k+2\pi \frac{n}{l})y} = -\frac{i\theta F_a}{1 + \varepsilon \frac{\theta_n}{\theta_{2n}}} e^{iky}, \quad (26)$$

$$|y| < \frac{d}{2}$$

## 2. Решение граничной задачи

Продифференцировав (25) по  $y$  и проделав некоторые преобразования с (26), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n \frac{y}{l}} = 0; \quad \frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}; \quad (27)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{|1 + n \frac{\beta}{x}|}{1 + n \frac{\beta}{x}} \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon \frac{\theta_n}{\theta_{2n}}} \sqrt{\frac{\beta^2}{(1 + n \frac{\beta}{x})^2} - 1} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} = -i\mathcal{E}, \quad (28)$$

$$|y| < \frac{d}{2},$$

где

$$\mathcal{E} = \theta \mathcal{E}_0 = \theta \frac{F_a (1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon \frac{\theta_n}{\theta_{2n}}} \text{ и } 1 + n \frac{\beta}{x} \neq 0.$$

К равенствам (27) — (28) добавим еще одно, получающееся после подстановки в (25) конкретного значения  $y$ , например,  $y = \frac{l}{2}$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{(-1)^n}{1 + n \frac{\beta}{x}} = 0. \quad (29)$$

Обозначим

$$g_n = \frac{(1 + n \frac{\beta}{x})}{1 + n \frac{\beta}{x}} \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon \frac{\theta_n}{\theta_{2n}}} \sqrt{\frac{\beta^2}{(1 + n \frac{\beta}{x})^2} - 1};$$

$$\chi_n = 1 + i \frac{|n|}{n} g_n; \quad \delta = \pi \frac{d}{l}; \quad \psi = 2\pi \frac{y}{l}. \quad (30)$$

Заметим, что  $\chi_n \rightarrow 0$  при  $|n| \rightarrow \infty$  и

$$g_n = i \frac{|n|}{n} (1 - \chi_n). \quad (31)$$

Уравнения (27) — (28) с учетом (30) — (31) примут вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\psi} = 0; \quad \delta < |\psi| < \pi; \quad (32)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{|n|}{n} (1 - \chi_n) e^{in\psi} = -\mathcal{E}; \quad |\psi| < \delta. \quad (33)$$

Эта пара уравнений образует задачу Римана — Гильберта, подробности решения которой приведены в работе [7]. Окончательное решение уравнений (32), (33) совместно с (29) запишем в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье и неизвестной промежуточной константы  $C$

$$\left. \begin{aligned} 2CR_\sigma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{|n|}{n} \chi_n V_\sigma^n &= \mathcal{E}V_\sigma^0; \\ 2CR_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left( \frac{|n|}{n} \chi_n V_m^n - \delta_{mn} \right) &= \mathcal{E}V_m^0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Величины  $R_m$ ,  $V_m^n$ ,  $R_\sigma$  и  $V_\sigma^n$  вычислены в работах [6] и [7].

Система (34) допускает получение решения методом редукции. При всех достижимых значениях диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  и относительной скорости  $\beta$  можно найти такое  $N$ , что  $\chi_n \rightarrow 0$  для всех  $|n| > N$  и, следовательно, в (34) слагаемыми с  $|n| > N$  можно пренебречь. Это выполняется при  $\beta \sqrt{\epsilon} \ll \left| 1 + n \frac{\beta}{x} \right|$ .

Следовательно, бесконечную систему уравнений (34) можно свести к ограниченной. Для отыскания численных значений необходимо использовать ЭВМ.

### 3. Энергетические характеристики излучения

Определим среднее значение вектора Умова — Пойнтинга  $\vec{S}$  на единичной площадке произвольной плоскости  $z = h$ ; для этого достаточно найти его среднюю величину на участке

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2};$$

$$\vec{S}_I = \sum_{n=-1}^{-N} \left( \vec{j} \frac{1}{\eta+n} + \vec{k} \frac{\sqrt{x^2 - (\eta+n)^2}}{(\eta+n)^2} \right) \frac{\sqrt{\epsilon x^2 - (\eta+n)^2}}{(\sqrt{\epsilon x^2 - (\eta+n)^2} + \epsilon \sqrt{x^2 - (\eta+n)^2})^2} \times$$

$$\times \frac{\epsilon C}{2\pi} |C_n|^2 \text{ при } h > -a; \quad (35)$$

$$\vec{S}_{II} = \left( \vec{j} \frac{1}{\eta} - \vec{k} \frac{\sqrt{\epsilon x^2 - \eta^2}}{\eta^2} \right) \frac{x^2 - \eta^2}{(\sqrt{\epsilon x^2 - \eta^2} + \epsilon \sqrt{x^2 - \eta^2})^2} - \frac{\epsilon x C}{2\pi} |C_0 + F_a|^2 +$$

$$+ \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \left( \vec{j} \frac{1}{\eta+n} - \vec{k} \frac{\sqrt{\epsilon x^2 - (\eta+n)^2}}{(\eta+n)^2} \right) \frac{x^2 - (\eta+n)^2}{(\sqrt{\epsilon x^2 - (\eta+n)^2} + \epsilon \sqrt{x^2 - (\eta+n)^2})^2} \times$$

$$\times \frac{\epsilon x C}{2\pi} |C_n|^2 \text{ при } h < -a, \quad (36)$$

где  $\eta = \frac{x}{\beta}$  и индекс  $n$  принимает все значения, для которых выполняются условия излучения.

Таким образом, монохроматический электронный поток при движении над периодической структурой, расположенной на плоской границе раздела вакуум — диэлектрическая среда, возбуждает электромагнитные колебания (13) — (16), частота которых совпадает с частотой модуляции

пучка, а направление излучения образует дискретный спектр, аналогичный дифракционному спектру. Из анализа уравнений (18) — (19) и (35) — (36) следует, что излучение является несимметричным относительно границы раздела и по направлению и по амплитуде, в отличие от излучения пучка, движущегося над решеткой в свободном пространстве [4]. Необходимо отметить принципиальную возможность излучения на пространственных гармониках с индексом  $n \geq 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Джелли. Черенковское излучение, ИЛ, 1960.
  2. S. J. Smith, E. M. Purcell. Phys. Rev., 92, № 4, 1069 (1953).
  3. K. Ishiguro, T. Tako. International Journal Optica Acta, 8, 1 (1961).
  4. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопапов. «Радиотехника и электроника», 10, 7, 1965.
  5. M. Dapos. Journal Appl. Phys., 26, № 1 (1955).
  6. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 32, № 4, 381 (1962).
  7. А. И. Адонина, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 33, № 6 (1963).
-