О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕННОГО КЛАССА

А. Г. Евдокимов
Харьков

Математическая модель установившихся процессов потокораспределения в сложных сетевых системах (шахтной вентиляционной, водопроводной, газовой сети и т. д.) описывается системой нелинейных уравнений определенной структуры. В настоящей работе доказывается единственность решения этих уравнений относительно переменных, характеризующих состояния потокораспределения, при соблюдении некоторых условий, которые, как правило, имеют место для реальных инженерных сетей.

К числу задач, имеющих важное практическое применение, относится задача цифрового моделирования процессов потокораспределения в сетевой системе в установившемся режиме. Здесь под сетевой системой, или инженерной сетью, подразумевается сеть [1], для которой справедливы первый и второй постулаты сетей (известные для электрических цепей как законы Кирхгофа) и которую можно представить как ориентированный связный граф, каждой дуге которого поставлены в соответствие ряд активных и пассивных элементов и две переменные величины — последовательная переменная h_i и параллельная переменная q_i, связанные между собой определенной зависимостью

$$h_i = h_i(q_i). \tag{1}$$

Совокупность величин q_i и h_i ($i = 1, \ldots, e$) образует два e-мерных вектора (e — число дуг графа сети) $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_e)$ и $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_e)$, характеризующих состояние потокораспределения в сетевой системе. Математическая модель процессов потокораспределения в сетевой системе, отображающая взаимосвязь между переменными, параметрами и геометрической структурой сети, определяется выражением (1) и математической формулировкой первого и второго постулата сетевых систем, которые при специальной нумерации дуг графа сети могут быть записаны в виде [2]

$$q_i = \sum_{r=v}^{e} b_{ri} q_r \quad (i = 1, \ldots, v-1); \tag{2}$$

$$h_r = \sum_{i=1}^{v-1} b_{ri} h_i \quad (r = v, \ldots, e), \tag{3}$$

где v — число вершин графа сетевой системы;

b_{ri} — элемент цикломатической матрицы для ветвей дерева.

Ветви дерева занумерованы от 1 до $v-1$, а хорды (ветви антидерева) — от v до e.

Для широкого подкласса сетевых систем (шахтной вентиляции, водопроводных, газовых сетей и т. д.) уравнение (1) для установившегося потокораспределения может быть представлено в виде

$$h_i = \sum_{j=1}^{m_i} h_{ij}^{(n)}(q_i) - \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij}^{(a)}(q_i) \quad (i = 1, \ldots, e), \tag{4}$$

где $h_{ij}^{(n)}$ — монотонно возрастающая нечетная функция q_i, т. е.

$$\frac{d}{dq_i} h_{ij}^{(n)}(q_i) > 0, \tag{5}$$

а $h_{ij}^{(a)}(q_i)$ — постоянная или монотонно убывающая функция q_i в рабочей области $q_i^* \leqslant q_i \leqslant q_i^{**}$.

$$\frac{d}{dq_i} h_{ij}^{(a)}(q_i) \leqslant 0. \tag{6}$$

В уравнении (4) $h_{ij}^{(n)}$ и $h_{ij}^{(a)}$ — параллельные переменные j-го пассивного и активного элементов i-й ветви; m_i — число пассивных, а n_i — число активных элементов этой ветви (считается, что q_i положительна, если направление этой переменной совпадает с направлением i-й дуги, и отрицательна в противном случае).

Цифровое или дискретное моделирование установившихся процессов потокораспределения для таких сетевых систем состоит в решении системы уравнений (2) — (4) относительно векторов-переменных $\bar{q}$ и $\bar{h}$ или в решении μ нелинейных уравнений (7), получаемых в результате подстановки значений параллельной переменной из (4) в (3), при $(v-1)$-линейном уравнении связи (2) относительно вектора $\bar{q}$

$$f_r = \sum_{j=1}^{m_r} h_{rj}^{(n)}(q_r) - \sum_{j=1}^{n_r} h_{rj}^{(a)}(q_r) + \sum_{i=v}^{e} b_{ri}\left[\sum_{j=1}^{m_i} h_{ij}^{(n)}(q_i) - \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij}^{(a)}(q_i)\right] = 0$$
$$(r = v, \ldots, e). \tag{7}$$

Докажем, что *если система уравнений* (7) *и* (2) *при условии* (5) *и* (6) *имеет решение, то оно единственно.*

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi = \sum_{i=1}^{e} \int \left[\sum_{j=1}^{m_i} h_{ij}^{(n)}(q_i) - \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij}^{(a)}(q_i)\right] dq_i, \tag{8}$$

переменные которой связаны между собой соотношением (2).

Взяв частные производные этой функции по переменным q_r ($r = v, \ldots, e$), приравнивая их нулю и учитывая из (2), что $\frac{\partial q_i}{\partial q_r} = b_{ri}$, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_r} = f_r = 0, \tag{9}$$

т. е. стационарные точки функции (8) при условии (2) совпадают с корнями системы уравнений (7), (2).

Подставляя значения последовательной переменной q_i ($i = 1, \ldots, v-1$) из (2) в (8), получим

$$\Phi = \Phi(\bar{q}_2), \tag{10}$$

где $\bar{q}_2 = (q_v, \ldots, q_e)$ — μ-мерный вектор, составляющая q_i которого соответствует значению последовательной переменной в i-й хорде графа сетевой системы.

Разложение функции (10) в ряд Тейлора в окрестности точки $\bar{q}_2^{(k)}$ дает

$$\partial\Phi = \nabla\Phi^{(k)}\partial\bar{q}_2 + \frac{1}{2}\partial\bar{q}_2 H^{(k)}\partial\bar{q}_2 + O_3(\partial\bar{q}_2), \qquad (11)$$

где H — матрица вторых частных производных функции (10) относительно вектора $\bar{q}_2$; $O_3(\partial\bar{q}_2)$ — остаток, включающий в себя дифференциалы третьего и более высокого порядков. В стационарной точке $\bar{q}_2^{(0)}$ $\nabla\Phi(\bar{q}_2^{(0)}) = \nabla\Phi^{(0)} = 0$ [3]. Стационарная точка $\bar{q}_2^{(0)} = \bar{q}_2^*$ является минимумом, если квадратичная форма

$$\varkappa^* = \partial\bar{q}_2' H^* \partial\bar{q}_2 \qquad (12)$$

положительна для всех $\partial\bar{q}_2 \neq 0$.

Покажем, что квадратичная форма $\varkappa$ функции (8) при условии (2) или, что одно и то же, функции (10) положительно определена для любого $\bar{q}_2$.

Определим элементы матрицы H:

$$h_{rr} = \frac{\partial f_r}{\partial q_r} = \sum_{j=1}^{m_r} \frac{\partial h_{rj}^{(n)}(q_r)}{\partial q_r} - \sum_{j=1}^{n_r} \frac{\partial h_{rj}^{(a)}(q_r)}{\partial q_r} + \sum_{i=1}^{v-1} (b_{ri})^2 \left[\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\partial h_{ij}^{(n)}(q_i)}{\partial q_i} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial h_{ij}^{(a)}(q_i)}{\partial q_i} \right] (r = v, \ldots, e); \qquad (13)$$

$$(h_{rk})_{r\neq k} = \left(\frac{\partial f_r}{\partial q_k}\right)_{r\neq k} = \sum_{i=1}^{v-1} b_{ki} b_{ri} \left[\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\partial h_{ij}^{(n)}(q_i)}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial h_{ij}^{(a)}(q_i)}{\partial q_i} \right] (r, k = v, \ldots, e). \qquad (14)$$

Теперь, подставляя выражения (13) и (14) в (12), производя перемножения матриц и учитывая из (2), что

$$\partial q_i = \sum_{r=v}^{e} b_{ri}\partial q_r \quad (i = 1, \ldots, v-1), \qquad (15)$$

а также выражения (5) и (6), получим

$$\varkappa(\bar{q}_2, \partial\bar{q}_2) = \sum_{r=1}^{e} \left[\sum_{j=1}^{m_r} \frac{\partial h_{rj}^{(n)}(q_r)}{\partial q_r} (\partial q_r)^2 - \sum_{j=1}^{n_r} \frac{\partial h_{rj}^{(a)}(q_r)}{\partial q_r} (\partial q_r)^2 \right] > 0 \qquad (16)$$

для всех $\bar{q}$, удовлетворяющих условию (2).

Поскольку квадратичная форма (16) (а соответственно и матрица H) всегда положительно определена, функция (10) может иметь не более одной стационарной точки, являющейся ее минимумом, а следовательно, система μ нелинейных уравнений (7) при $(v-1)$-м линейном уравнении связи (2) имеет (в случае существования) единственное решение.

В качестве примера, иллюстрирующего единственность решения системы (7) и (2), можно рассмотреть задачу дискретного моделирования установившегося процесса воздухораспределения в шахтной венти-

ляционной сети [2], для которой зависимости (5) и (6) могут быть представлены в следующем виде:

$$h_{ij}^{(a)} = \operatorname{sign} q_i r_{ij} \left| q_i \right|^{\varkappa_{ij}}, \tag{17}$$

$$h_{ij}^{(a)} = \psi_{0ij} + \psi_{1ij} q_i + \psi_{2ij} q_i^2, \tag{18}$$

где $h_{ij}^{(a)}$ задана в рабочей области

$$q_i^{*} \leqslant q_i \leqslant q_i^{**} \tag{19}$$

и

$$\frac{\partial h_{ij}^{(a)}}{\partial q_i} = \psi_{1ij} + 2\psi_{2ij} q_i \leqslant 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial h_{ij}^{(a)}}{\partial q_i} = \varkappa_{ij} r_{ij} \left| q_i \right|^{\varkappa_{ij}-1} > 0 \tag{21}$$

для всех r_{ij} и q_i, отличных от нуля.

Результаты решения рассматриваемой задачи на ЦВМ «М-20» применительно к шахтной вентиляции одной из шахт Кривбасса при использовании различных методов решения системы уравнений (7), (2) и различных начальных приближениях, приведенные в [2], убедительно свидетельствуют о единственности решения данной системы нелинейных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Ермольев, И. М. Мельник. Экстремальные задачи на графах. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1968.

2. А. Г. Евдокимов, Б. Д. Яловкин. Анализ методов дискретного моделирования на ЦВМ установившегося воздухораспределения в шахтных вентиляционных сетях. Изв. вузов, Горный журнал, 1965, № 3.

3. D. I. Wilde, C. S. Beightler. Foundations of Optimization. Prentice-Hall. INC, 1967.

МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ ПЛОТНОСТИ НАКОПИТЕЛЕЙ ДОЛГОВРЕМЕННЫХ ЗАПОМИНАЮЩИХ УСТРОЙСТВ НА МАГНИТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Ю. Ю. Завизиступ

Харьков

Долговременные запоминающие устройства (ДЗУ) с накопителями на магнитных элементах получили широкое распространение. Существующие методы их построения [1—3] обеспечивают возможность хранения в каждом элементе одного разряда многих чисел, либо многих разрядов одного числа. При таком построении накопителей необходимое количество магнитных элементов (сердечников) определяется разрядностью хранимого массива чисел и количеством проводников, которые по конструктивным соображениям могут быть пропущены через выбранный сердечник. Для накопителей ДЗУ большой емкости и разрядности возникают трудности, связанные с увеличением количества магнитных сердечников и прошивок; необходимо также принимать меры по уменьшению паразитных емкостей и индуктивностей числовых шин. В существующих устройствах магнитные элементы накопителя располагаются в виде одномерного массива (числовой линейки), причем числовые шины для хранимого массива чисел выполнены в виде жгута.