ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 519.7

ТЕОРИЯ ЦВЕТОВОГО ЗРЕНИЯ. VII[1]

БОНДАРЕНКО М.Ф.,
ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО С.Ю.

Рассматривается аксиоматическая теория цветового зрения человека. В рамках этой теории описываются механизмы иррадиации, инерции и адаптации цветового зрения для общего случая, когда световое излучение произвольно изменяется во времени и в пространстве, и для различных частных случаев (излучение изменяется только во времени, только в пространстве или постоянное во времени и пространстве).

7.1. Трехпараметрические семейства (параметр − пространственно-временная координата). (Продолжение раздела 6.3)

Пусть t − произвольное число,

$$\Omega_t = \{(\lambda, \tau, p, q) \mid \lambda \in [0,1], \tau \in (-\infty, t], \; p, q \in (-\infty, \infty)\},$$

$K(\Omega_t)$ − пространство измеримых на Ω_t функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^t \iint e^{\tau} e^{-(p^2+q^2)} x^2(\lambda, \tau, p, q)\, d\lambda\, d\tau\, dp\, dq < \infty, \quad (7.1)$$

$K(\Omega_t)$ − положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_{t,z}$ $(t \in R^1, z \in R^2)$, каждый из которых определен при соответствующем t на $K(\Omega_t) \times K(\Omega_t)$ и удовлетворяет условиям 1-3. Установим условия, гарантирующие существование n линейно-независимых функций $g_i \in L^2[0,1]$ почти всюду неотрицательной функции $Q(\tau, u, v)$ таких, что при всех $t \in R^1$, $z = (\xi, \eta) \in R^2$ и всех $x, y \in K(\Omega_t)$ равенство

$$\Phi_{t,z}(x, y) = 1 \quad (7.2)$$

эквивалентно системе равенств

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i^{(t,z)}(y), \quad i = 1, 2, ..., n, \quad (7.3)$$

где

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \int_0^1 \int_{-\infty}^t \iint g_i(\lambda) Q(t-\tau, \xi-p, \eta-q) \times x(\lambda, \tau, p, q)\, d\lambda\, d\tau\, dp\, dq. \quad (7.4)$$

Рассмотрим вначале частный случай, заключающийся в том, что рассматриваемые функции $x(\lambda, \tau, u, v)$ зависят только от λ. Такие функции мы будем обозначать символами u и v. Для этих функций сформулированный выше вопрос состоит в следующем. При каких условиях можно гарантировать существование почти всюду ограниченных неотрицательных функций $g_i(\lambda)$ таких, что при всех $t \in R^1$, всех $z \in R^2$ и всех u, v из положительного конуса K пространства $L^2[0,1]$ равенство

$$\Phi_{t,z}(u, v) = 1 \quad (7.5)$$

эквивалентно системе равенств

$$\alpha_i(u) = \alpha_i(v), \quad i = 1, 2, ..., n, \quad (7.6)$$

где $\alpha_i(u) = \int_0^1 g_i(\lambda) u(\lambda)\, d\lambda, \quad i = 1, 2, ..., n,$? (7.7)

Решение этого вопроса дает теорема 4.1. Будем, как и в предыдущей статье, именовать совокупность условий этой теоремы условиями A. Соответственно через Φ будем обозначать предикат на $K \times K$ такой, что $\Phi(u, v) = 1$, если $\Phi_{t,z}(u, v) = 1$ при каких-либо (а следовательно, в силу условий A, и при любых) $t \in R^1$, $z \in R^2$.

Кроме того, мы выделим частный случай функций вида

$$x(\lambda, \tau, p, q) = \beta(\tau, p, q) \cdot u(\lambda). \quad (7.8)$$

Здесь $\beta \in K_t(R^2)$, $u \in K$. Для этого случая сформулированный выше вопрос состоит в следующем. При каких условиях для любой функции $u \in K$ существует функция $\theta_u(\tau, p, q)$, удовлетворяющая условию (6.60) и такая, что для любой функции $\beta(\tau, p, q)$ равенство

$$\Phi_{t,z}(\beta u, cu) = 1 \quad (7.9)$$

выполняется тогда и только тогда, когда константа $c = f_u^{(t,z)}(\beta)$,

где

$$f_u^{(t,z)}(\beta) = \int_{-\infty}^t \iint Q_u(t-\tau, \xi-p, \eta-q) \beta(\tau, p, q)\, d\tau\, dp\, dq. ? \quad (7.10)$$

[1] Ч. I-VI см. в журнале “Радиоэлектроника и информатика”, 1998-2000 гг.

Этот вопрос был решен теоремой 6.4. Условия этой теоремы ниже именуются условиями C.

Теорема 7.1. *Для того чтобы для семейства предикатов* $\Phi_{t,z}$ *нашлась линейно-независимая система функций* $\{q_i\}_{i=1}^n \subset L^2[0,1]$ *и почти всюду неотрицательная на* $[0,\infty)\times R^2$ *функция* Q*, удовлетворяющая условиям (6.60), и такая, что равенства (7.2) и (7.3) эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло условиям* A, C *и*

4) *для любых* $t \in R^1$, $z \in R^2$ *и* $x, x', y, y' \in K(\Omega_t)$ *из равенств*

$$\Phi_{t,z}(x, x') = 1, \quad \Phi_{t,z}(y, y') = 1$$

следует, что $\Phi_{t,z}(x+y, x'+y') = 1.$;

5) *для любых* $t \in R^1$, $z \in R^2$ *и* $x \in K(\Omega_t)$ *существует (не единственная) функция* $u \in K$ *такая, что*

$$\Phi_{t,z}(x, u) = 1; \qquad (7.11)$$

6) *для любой последовательности* $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset K(\Omega_t)$, *сходящейся к нулю в* $L^2(\Omega_t)$, *существует последовательность* $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset K$, *сходящаяся к нулю в метрике* $L^2[0,1]$ *и такая, что*

$$\Phi_{t,z}(x_k, u_k) = 1.$$

Доказательство теоремы мы проведем по той же схеме, что и доказательство теоремы 6.1. Проверим достаточность. Пусть при некоторых $t \in R^1$, $z \in R^2$ x − произвольный элемент $K(\Omega_t)$. Положим

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i(u), \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad (7.12)$$

где u − какой-либо элемент из K, для которого справедливо (7.11). Элемент u не определяется равенством (7.11) однозначно. Поэтому следует проверить, что равенство (7.12) определяет величину $\alpha_i^{(t,z)}(x)$ вне зависимости от выбора u. Мы опустим эту проверку.

Покажем теперь, что при всех $t \in R^1$, $z \in R^2$ и $x, y \in K(\Omega_t)$ равенства

$$\Phi_{t,z}(x, y) = 1 \qquad (7.13)$$

и $\qquad \alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i^{(t,z)}(y), \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (7.14)$

эквивалентны. Подберем для x и y какие-либо элементы $u, v \in K$ такие, что

$$\Phi_{t,z}(x, u) = 1, \quad \Phi_{t,z}(y, v) = 1. \qquad (7.15)$$

Если для x и y имеет место равенство (7.13), то из (7.15) на основании условий 2 и 3 легко вывести, что $\Phi_{t,z}(u, v) = 1.$ Но тогда и

$$\alpha_i(u) = \alpha_i(v), \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (7.16)$$

Отсюда и из определения (7.12) вытекают равенства (7.14). Пусть, обратно, для x и y справедливо (7.14). Подберем для x и y элементы $u, v \in K$ так, чтобы имело место (7.15). Тогда справедливо (7.16) и, следовательно, $\Phi_{t,z}(u, v) = 1.$ Вместе с (7.15) это дает (7.13).

Таким образом, равенство (7.2) эквивалентно равенству (7.3). Осталось проверить, что для величин $\alpha_i^{(t,z)}(x)$ справедлива формула (7.4). Рассмотрим произвольные элементы $x(\lambda, \tau, p, q)$ и $y(\lambda, \tau, p, q)$ конуса $K(\Omega_t)$. Пусть $u, v \in K$ удовлетворяют равенствам (7.15). Применив к этим равенствам условие 4, получим $\Phi_{t,z}(x+y, u+v) = 1.$

Из этого равенства и (7.15) следует, что

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i(u), \quad \alpha_i^{(t,z)}(y) = \alpha_i(v),$$
$$\alpha_i^{(t,z)}(x+y) = \alpha_i(u+v), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Поскольку $\alpha_i(u+v) = \alpha_i(u) + \alpha_i(v)$, то отсюда вытекает, что

$$\alpha_i^{(t,z)}(x+y) = \alpha_i^{(t,z)}(x) + \alpha_i^{(t,z)}(y), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

т.е. функционалы $\alpha_i^{(t,z)}$ аддитивны. Проверим их непрерывность в нуле. Рассмотрим произвольную последовательность функций, сходящуюся к нулю. Подберем для нее последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset K$ согласно условию 6. Тогда

$$\Phi_{t,z}(x_k, u_k) = 1, \quad \lim_{k\to\infty} u_k = 0.$$

Из последнего равенства и непрерывности функционалов α_i следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_i(u_k) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Но тогда из (7.12) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_i^{(t,z)}(x_k) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Таким образом, функционалы $\alpha_i^{(t,z)}$ определены на воспроизводящем конусе $K(\Omega_t)$ пространства $L^2(\Omega_t)$, аддитивны и непрерывны в нуле. Значит, они однозначно продолжаются до линейных функционалов на всем пространстве. По теореме об общем виде линейного функционала

$$\alpha_i^{(t,z)}(x)=$$

$$=\int_0^1\int_{-\infty}^t\iint e^{\tau}e^{-(p^2+q^2)}S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)d\lambda d\tau dpdq, \quad (7.17)$$

где $S_i^{(t,z)}\in L^2(\Omega_t)$.

Пусть функция $x(\lambda,\tau,p,q)$ имеет вид (7.8). Из (7.9) имеем

$$\Phi_{t,z}(\beta u, f_u^{(t,z)}(\beta)u)=1. \quad (7.18)$$

Поскольку условия (7.2) и (7.3) эквивалентны, из (7.18) можно заключить, что

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u)=\alpha_i^{(t,z)}(f_u^{(t,z)}(\beta)u),\quad i=1,2,...,n,. \quad (7.19)$$

Вынося константу $f_u^{(t,z)}(\beta)$ из аргумента линейных функционалов $\alpha_i^{(t,z)}$, находим

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u)=f_u^{(t,z)}(\beta)\alpha_i^{(t,z)}(u),\quad i=1,2,...,n.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 6.1, можно показать, что на самом деле функция $f_u^{(t,z)}(\beta)$ не зависит от u, так что

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u)=f^{(t,z)}(\beta)\alpha_i^{(t,z)}(u),\quad i=1,2,...,n \quad (7.20)$$

и равенство (7.10) можно переписать в виде

$$f^{(t,z)}(\beta)=$$

$$=\int_{-\infty}^t\iint Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)\beta(\tau,p,q)d\tau dpdq. \quad (7.21)$$

Комбинируя равенство (7.20) с равенствами (7.7), (7.17) и (7.21), получаем

$$\int_0^1\int_{-\infty}^t\iint e^{\tau}e^{-(p^2+q^2)}S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)\beta(\tau,p,q)u(\lambda)d\lambda d\tau dpdq=$$

$$=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)\cdot\int_{-\infty}^t\iint Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)\beta(\tau,p,q)u(\lambda)d\tau dpdq,$$

т.е.

$$\int_0^1\Big(\int_{-\infty}^t\iint\big(e^{\tau}e^{-(p^2+q^2)}S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)-$$

$$-g_i(\lambda)Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)\big)\beta(\tau,p,q)d\tau dpdq\Big)u(\lambda)d\lambda=0.$$

Мы использовали здесь теорему Фубини. Поскольку в последнем равенстве $u(\lambda)$ − произвольный элемент положительного конуса K пространства $L^2[0,1]$ и конус K является воспроизводящим, то из равенства вытекает, что

$$\int_{-\infty}^t\iint e^{\tau}e^{-(p^2+q^2)}(S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)-$$

$$-e^{-\tau}e^{p^2+q^2}g_i(\lambda)Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)\beta(\tau,p,q)d\tau dpdq=0.$$

Далее, $\beta(\tau,p,q)$ − произвольный элемент воспроизводящего конуса $K_t(R^2)$ пространства $L_t^2(R^2)$ и поэтому из последнего равенства следует, что

$$S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)=-e^{-\tau}e^{p^2+q^2}g_i(\lambda)Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q).$$

Подставляя это равенство в (7.17), приходим к (7.4), Достаточность доказана.

Проверим необходимость. Пусть линейно-независимая система функций $\{g_i\}_{i=1}^n\subset L^2[0,1]$ и почти всюду неотрицательная на $[0,\infty)\times R^2$ функция Q, удовлетворяющая условиям (6.60),таковы, что для них равенства (7.2) и (7.3) эквивалентны. Для функций $u\in K$ равенство (7.4) дает

$$S_i^{(t,z)}(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\int_{-\infty}^t\iint Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)d\tau dpdq.$$

Отсюда и из (6.60) следует, что

$$S_i^{(t,z)}(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda..$$

Видим, что величина $S_i^{(t,z)}$ на самом деле не зависит от u. Поэтому из эквивалентности равенств (7.2) и (7.3) вытекает эквивалентность равенств (7.5) и (7.6), где величины $\alpha_i(u)$ определяются формулой (7.7). Таким образом, условия A выполняются.

Перейдем к условиям C. Рассмотрим функции $x(\lambda,\tau,p,q)$ вида (7.8). Для них формула (6.93) принимает вид

$$S_i^{(t,z)}(\beta u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\times$$

$$\times\int_{-\infty}^t\iint Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)\beta(\tau,p,q)d\tau dpdq. \quad (7.22)$$

Определим функционалы α_i на $L^2[0,1]$ формулой (7.7) и функционалы $f^{(t,z)}$ на $L^2(\Omega_t)$ формулой (7.20). Равенство (7.21) может быть переписано в виде (7.19). Но по условию теоремы равенство (7.19) эквивалентно равенству (7.18) Обратно, пусть для некоторого $u\in K$, некоторого $\beta\in K(\Omega_t)$ и числа C имеет место равенство (7.9). Поскольку равенства (7.2) и (7.3) эквивалентны, это значит, что

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u)=c\cdot\alpha_i^{(t,z)}(u),\quad i=1,2,...,n.$$

Комбинируя это равенство с формулой (7.4), найдем, что $c=f^{(t,z)}(\beta)$. Итак, выполнимость условий C проверена.

Перейдем к условиям 4-6. Справедливость 4 вытекает из аддитивности функционала (7.4). Проверим 5. Пусть $x \in K(\Omega_t)$. Положим

$$u(\lambda) = \int_{-\infty}^{t} \iint Q(t-\tau, \xi - p, \eta - q) x(\lambda, \tau, p, q) d\tau dp dq.$$

Очевидно, функция $u(\lambda)$ почти всюду неотрицательна. Далее, используя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} u(\lambda) \le & \sqrt{\int_{-\infty}^{t} \iint e^{-\tau} e^{p^2+q^2} Q(t-\tau, \xi - p, \eta - q) d\tau dp dq} \times \\ & \times \sqrt{\int_{-\infty}^{t} \iint e^{-\tau} e^{p^2+q^2} x^2(t-\tau, \xi - p, \eta - q) d\tau dp dq} \le \\ & \le c_1 \sqrt{\int_{-\infty}^{t} \iint e^{\tau} e^{-(p^2+q^2)} x^2(t-\tau, \xi - p, \eta - q) d\tau dp dq}. \end{aligned} \qquad (7.23)$$

Здесь c_1 — некая положительная константа, существование которой вытекает из неравенства (6.60). Из последнего неравенства получаем

$$\int_0^1 u^2(\lambda) d\lambda \le c_1^2 \sqrt{\int_0^1 \int_{-\infty}^{t} \iint e^{\tau} e^{-(p^2+q^2)} x^2(\lambda, \tau, p, q) d\lambda d\tau dp dq}.$$

Поэтому из (7.1) следует, что $u \in L^2[0, 1]$ и

$$\| u \| \le c_1 \| x \|, \qquad (7.24)$$

где $\| u \|$ – $L^2[0, 1]$-норма элемента u; $\| x \|$ - $L^2(\Omega_t)$ — норма элемента x. Легко видеть, что $\alpha_i^{(t, z)}(x) = \alpha_i^{(t, z)}(u)$. Следовательно, $\Phi_{t, z}(x, u) = 1$ и условие 5 выполняется.

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — сходящаяся к нулю последовательность элементов из $K(\Omega_t)$. Определим для нее последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ по формуле (6.13). Тогда $\Phi_{t, z}(x_k, u_k) = 1$, а из неравенства (7.24) видно, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Значит, условие 6 выполняется.

Теорема 7.1 доказана.

С прикладной точки зрения этот результат является попыткой описать в рамках единой модели явления иррадиации и инерции зрения, учитывая при этом цветовое восприятие. Предположим, что наблюдателю предъявляется зрительная картина с различными спектральными плотностями лучистой яркости в различных точках пространства, меняющимися произвольным образом во времени. Обозначим через $x(\lambda, \tau, p, q)$ спектральную плотность на длине волны λ в точке (p, q) в момент времени τ. Пусть t — произвольный момент времени, $z = (\xi, \eta)$ — произвольная точка зрительной картины. Будем говорить, что две зрительные картины со спектральными плотностями $x(\lambda, \tau, p, q)$ и $y(\lambda, \tau, p, q)$ соответственно (t, z)-метамерны, если их воздействие в точке z в момент времени t представляется наблюдателю одинаковым. Записывать этот факт будем в виде $\Phi_{t, z}(x, y) = 1$. В частном случае, когда спектральная плотность сравниваемых излучений не меняется в пространстве и во времени, отношение (t, z) — метамерности переходит в классическую метамерность. Математической записью этого факта являются условия A. Рассмотрим теперь зрительные картины со спектральным составом вида (7.8), где $u(\lambda)$ — спектральная плотность постоянного во времени и пространстве излучения, а $\beta(\tau, p, q)$ — интенсивность излучения, меняющаяся во времени и пространстве. Этот частный случай изучался в разделе 6.3 и там объяснен физический смысл условий C.

Предположение 4 об аддитивности (t, z)-метамерности для различных частных случаев изменения сигнала (только во времени, только в пространстве или постоянные во времени и пространстве сигналы с различными спектральными плотностями излучений) обсуждалось в предыдущих разделах. Нам не известны какие-либо эксперименты, направленные на проверку выполнимости этого предположения в рассматриваемой здесь общей ситуации.

Предположение 5 является обобщением предположения о существовании эффективной яркости. Его смысл состоит в том, что для любого момента времени t, любой точки пространства z и любой зрительной картины $x(\lambda, \tau, p, q)$ существует единственная постоянная во времени и пространстве зрительная картина $u(\lambda)$, которая (t, z)-метамерна исходной. Наконец, смысл условия 6 примерно такой же, как и в случае аналогичного условия теорем 5.1 и 6.1. Его выполнимость на практике априори представляется обеспеченной.

7.2. Сверточные семейства

Пусть t — произвольное действительное число, L_t^2 — пространство измеримых на $(-\infty, t]$ действительных функций $x(\tau)$, для которых существует и конечен интеграл

$$\int_{-\infty}^{e} e^{\tau} x^2(\tau) d\tau, \qquad (7.25)$$

K_t — положительный конус в этом пространстве.

Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_t(x, y)$ (t — параметр), каждый из которых при соответствующем t определен на $K_t \times K_t$ и удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности. Исследуем возможность представления семейства Φ_t в виде

$$\Phi_t(x, y) = D(x(t) - \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\tau)d\tau,$$
$$\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)y(\tau)d\tau), \tag{7.26}$$

где D – предикат равенства; $B(\xi)$ – некоторая весовая функция на полуоси $[0,\infty)$.

Уточним постановку вопроса. В строгой формулировке элементами пространства L_t^2 являются не квадратично-суммируемые функции, а их классы эквивалентности по отождествлению функций, совпадающих почти всюду. Поэтому для элемента $x \in L_t^2$ не существует понятия значения $x(t)$ в точке t. Например, функции $x(\tau) \equiv 1$ $(\tau \le t)$ и

$$\hat{x}(\tau) = \begin{cases} 1, \tau \ne t, \\ 0, \tau = t, \end{cases}$$

где $x(t)$ – любое действительное число, совпадают как элементы L_t^2. Условимся, чтобы придерживаться аккуратности в формулировках, считать, что в (7.26) $x, y \in K_t \times R^1$. При этом число $x(t)$ может принимать любое значение независимо от поведения функции $x(\tau)$ при $\tau < t$.

Будем, как и в разделе 6.1, обозначать при любом $x \in L_t^2$ и любом положительном ξ через $\tilde{x}_\xi(\tau)$ функцию, определенную на $(-\infty, t+\xi]$ равенством

$$\tilde{x}_\xi(\tau) = x(\tau - \xi).$$

Теорема 7.2. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_t(x, y)$ нашлась функция $B(\xi)$, удовлетворяющая условиям*

$$\int_0^\infty e^\xi B^2(\xi)d\xi < \infty, \quad \int_0^\infty B(\xi)d\xi < \infty, \tag{7.27}$$

и такая, что имеет место равенство (7.26), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло следующим условиям:

4) *для любого $t \in (-\infty, \infty)$ и любого $x \in K_t \times R^1$ существует единственное число $[fx](t)$ такое, что*

$$\Phi_t(x, [\widetilde{fx}](t)) = 1 \tag{7.28}$$

(*здесь* $[\widetilde{fx}](t) = (0, [fx](t) \in K_t \times R^1)$;

5) *величина $[fx](t) - x(t)$ не зависит от выбора числа $x(t)$*;

6) *для любых $t \in (-\infty, \infty)$ и $x, x', y, y' \in K_t \times R^1$ из равенств $\Phi_t(x, x') = 1$ и $\Phi_t(y, y') = 1$ следует, что*

$$\Phi_t(x+y, x'+y') = 1.; \tag{7.29}$$

7) *величина $[fx](t) - x(t)$ непрерывно зависит от функции $x(\tau)$ $\tau < t$ в метрике L_t^2*;

8) *для любого $t \in (-\infty, \infty)$, любых $x, y \in K_t$ и любого положительного ξ из равенства*

$$\Phi_t(x, y) = 1 \tag{7.30}$$

вытекает равенство $\Phi_{t+\xi}(\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_\xi) = 1$.

Доказательство. Проверим справедливость теоремы в сторону необходимости. Условие 4, очевидно, выполняется. При этом

$$[fx](t) = x(t) - \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\tau)d\tau. \tag{7.31}$$

Из равенства (7.30) видно, что величина

$$[fx](t) - x(t) = -\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\tau)d\tau \tag{7.32}$$

и, следовательно, не зависит от выбора числа $x(t)$. Таким образом, выполняется условие 5. Посылка условия 6 означает, что

$$x(t) - \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\tau)d\tau = x'(t) - \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x'(\tau)d\tau$$

и $y(t) - \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)y(\tau)d\tau = y'(t) - \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)y'(\tau)d\tau.$

Из этих равенств следует, что

$$(x(t)+y(t)) - \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)(x(\tau)+y(\tau))d\tau =$$
$$= (x(t)+y'(t)) - \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)(x'(\tau)+y'(\tau))d\tau. ,$$

т.е. (7.29). Для проверки условия 7 положим

$$A(\xi) = B(\xi)e^\xi, \quad \xi \ge 0. \tag{7.33}$$

Тогда из (7.31) следует, что

$$[fx](t) - x(t) = -e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^\tau A(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

С другой стороны,

$$\int_{-\infty}^{t} e^\tau A^2(t-\tau)d\tau = e^t \int_0^\infty e^\xi B^2(\xi)d\xi.$$

Поэтому из (7.27) следует, что $A(t-\tau) \in L_t^2$. Таким образом, как это видно из (7.33), величина $[fx](t) - x(t)$ является линейным функционалом от

$x(\tau)\,(\tau < t)$ на L_t^2. Значит, выполняется условие 7. Проверим условие 8. Оно означает, что

$$x(t)-\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\tau)d\tau = y(t)-\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)y(\tau)d\tau. \quad (7.34)$$

Нужно показать, что отсюда вытекает равенство

$$\widetilde{x}_\xi(t+\xi)-\int_{-\infty}^{t+\xi}B(t-\tau)\widetilde{x}_\xi(\tau)d\tau = \widetilde{y}_\xi(t+\xi)-\int_{-\infty}^{t+\xi}B(t-\tau)\widetilde{y}_\xi(\tau)d\tau.$$

Учитывая определение функции $\widetilde{x}_\xi$, последнее равенство можно переписать в виде

$$x(t)-\int_{-\infty}^{t+\xi}B(t-\tau)x(\tau-\xi)d\tau = y(t)-\int_{-\infty}^{t+\xi}B(t-\tau)y(\tau-\xi)d\tau.$$

Легко видеть, что это равенство, действительно, вытекает из (7.34). Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Рассмотрим при фиксированном t функцию $[fx](t)$. Согласно условию 4, для любых $x, y \in K_t \times R^1$ будет

$$\Phi_t(x,[\widetilde{fx}](t))=1, \quad \Phi_t(y,[\widetilde{fy}](t))=1.$$

Отсюда и из условия 6 следует, что

$$\Phi_t(x+y,[\widetilde{fx}](t)+[\widetilde{fy}](t))=1. \quad (7.35)$$

Согласно условию 5

$$\Phi_t(x+y,[\widetilde{f}(x+y)](t))=1,$$

причем функция $[\widetilde{f}(x+y)](t)$ определяется последним равенством однозначно. Значит,

$$[\widetilde{f}(x+y)](t)=[\widetilde{fx}](t)+[\widetilde{fy}](t).$$

Таким образом, $[fx](t)$ является аддитивным функционалом. Значит, и $[fx](t)-x(t)$ − аддитивный функционал. Согласно условиям 5 и 7 этот функционал при фиксированном t зависит только от функции $x(\tau)\,(\tau < t)$ и указанная зависимость является непрерывной в метрике L_t^2. Тогда $[fx](t)-x(t)$ − линейный функционал на K_t. Он, следовательно, допускает единственное продолжение до линейного функционала на всем пространстве L_t^2. Поэтому существует такая функция $A_t(\tau)\in L_t^2$, что

$$[fx](t)-x(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}A_t(\tau)x(\tau)d\tau. \quad (7.36)$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 5.1, можно показать, используя условие 8, что из (7.36) вытекает формула

$$[fx](t)=x(t)-\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad (7.37)$$

где функция $B(\xi)$ удовлетворяет условиям (7.37). Проверим справедливость равенства (7.26). Нужно показать, что при любом t для любых $x, y\in K_t\times R^1$ равенство

$$\Phi_t(x,y)=1 \quad (7.38)$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$[fx](t)=[fy](t). \quad (7.39)$$

Пусть имеет место (7.38). Вместе с (6.4) это дает

$$\Phi_t(y,[\widetilde{fx}](t))=1. \quad (7.40)$$

Согласно условию 4, отсюда следует равенство

$$[\widetilde{fx}](t)=[\widetilde{fy}](t), \quad (7.41)$$

а значит и (7.39). Обратно, пусть имеет место равенство (7.39). В таком случае выполняется и (7.41). Комбинируя (7.41) и (7.28), получаем

$$\Phi_t(x,[\widetilde{fy}](t))=1. \quad (7.42)$$

Согласно условию 4

$$\Phi_t(y,[\widetilde{fy}](t))=1. \quad (7.43)$$

Требуемое равенство (7.38) вытекает из (7.42) и (7.43).

Теорема 7.2 доказана.

Обсудим теперь физический смысл полученного результата. В качестве примера приложения рассмотрим вопрос об адаптации зрительной системы человека к уровню освещения. Предположим, что наблюдателю предъявляется излучение постоянного относительного спектрального состава с интенсивностью, меняющейся во времени. Обозначим через $x(\tau)$ яркость излучения в момент времени τ. Рассмотрим случай ступенчатого изменения яркости. Пусть

$$x(\tau)=\begin{cases} a, \tau\le T,\\ b, \tau>T.\end{cases}$$

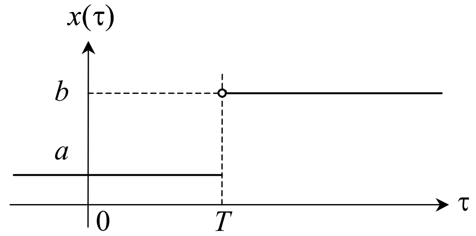
Тогда в соответствии с (7.37)

$$[fx](t)=\begin{cases} a-a\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)d\tau, t\le T,\\ b-a\int_{-\infty}^{T}B(t-\tau)d\tau-b\int_{T}^{t}B(t-\tau)d\tau, t>T,\end{cases}$$

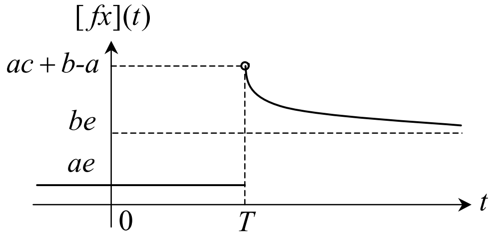
т.е. $$[fx](t)=\begin{cases} ae, t\le T,\\ ac-(b-a)(1-\int_{0}^{t-T}B(u)du), t>T,\end{cases}$$

где $e = 1 - \int\limits_0^\infty B(u)du.$

В случае $a < b$ графики функций $x(\tau)$ и $[fx](t)$ изображены на рис. 1,а и б соответственно.



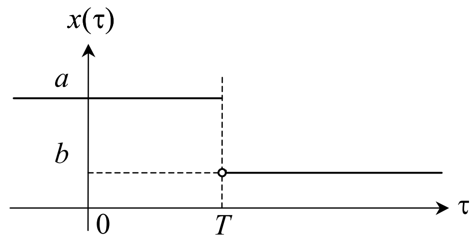
а



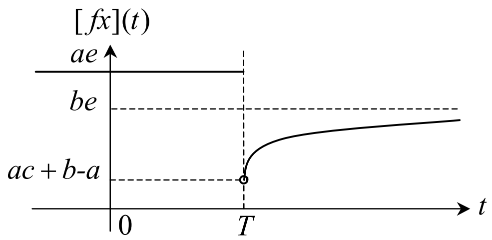
б

Рис. 1

Для случая $a > b$ графики функций $x(\tau)$ и $[fx](t)$ изображены на рис. 2,а и б.



а



б

Рис. 2

Как видно из рис. 1, при скачкообразном увеличении яркости происходит резкое повышение уровня субъективного ощущения яркости, затем зрительная система постепенно адаптируется к новому уровню яркости и через некоторое время величина ощущения практически становится равной величине ощущения bc постоянной яркости b.

При скачкообразном снижении уровня яркости ощущение ее в первый момент резко ослабевает, а затем в результате адаптации чувствительность усиливается. В результате величина ощущения яркости стремится к величине ощущения постоянной яркости b.

Разумеется, приведенные выше выводы из модели справедливы лишь в том случае, если модель обоснована. Для обоснования модели следует экспериментально проверить выполнимость условий 1-8 теоремы 7.2.

Обсудим вопрос о возможности такой проверки на примере для случая субъективного восприятия яркости. Предположение 4 означает, что для любого закона изменения яркости $x(\tau)$, $-\infty < \tau \le t$ существует единственное значение яркости $[fx](t)$ такое, что закон $x(\tau)$ и закон

$$\begin{cases} 0, \tau < t, \\ [fx](t), \tau = t \end{cases}$$

вызывают одинаковое ощущение яркости в момент t. Если это предположение выполняется, то в эксперименте доступны для наблюдения функция $x(\tau)$ $(\tau < t)$ и числа $x(t)$ и $[fx](t)$.

Таким образом, все условия теоремы 7.2 сформулированы в терминах, допускающих экспериментальную проверку.

7.3. Семейства интегральных сумм

Будем, как и ранее, обозначать при произвольном числе t через $\overline{L_t^2}$ пространство измеримых на $[0,1] \times (-\infty, t]$ действительных функций $x(\lambda, \tau)$, для которых конечен интеграл

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^t e^\tau x^2(\lambda, \tau) d\lambda d\tau. \tag{7.44}$$

Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_t(x, y)$, каждый из которых при соответствующем t определен на $\overline{K_t} \times \overline{K_t}$, где $\overline{K_t}$ – положительный конус в пространстве $\overline{L_t^2}$ и удовлетворяет условиям I-3. Нас интересует возможность представления семейства предикатов формулой

$$\begin{aligned} \Phi_t(x, y) = D((\alpha_1^{(t)}(x), ..., \alpha_n^{(t)}(x)), \\ (\alpha_1^{(t)}(y), ..., (\alpha_n^{(t)}(y))), \end{aligned} \tag{7.45}$$

где D – предикат равенства на R^n,

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(t)}(x) = \int\limits_0^1 g_i(\lambda) x(\lambda, t) d\lambda - \\ - \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^t g_i(\lambda) B(t - \tau) x(\lambda, t) d\lambda d\tau, \end{aligned} \tag{7.46}$$

g_i $(i = 1, 2, .., n)$ и B – некоторые функции на $[0, 1]$ и $[0, \infty)$ соответственно.

Как и в предыдущем разделе, постановка вопроса нуждается в уточнении, поскольку для элемента $x \in \overline{L}_t^2$ ограничение на прямую $\tau = t$ не определено.

Поэтому будем считать, что в (7.46) $x \in \overline{K}_t \times L^2[0,1]$, т.е. под x понимается упорядоченная пара: функция $x(\lambda, \tau) \in \overline{K}_t$ и функция от переменной λ при фиксированном t $x(\lambda, t) \in L^2[0,1]$.

Рассмотрим, как и в разделе 6.1, два частных случая. Первый из них заключается в том, что функция $x(\lambda, \tau)$ в действительности не зависит от τ. Такие функции в настоящем параграфе обозначаются символами u и v, В рассматриваемом частном случае равенство (7.45) принимает вид

$$\Phi_t(u,v) = D((\alpha_1(u),...,\alpha_n(u)), (\alpha_1(v),...,\alpha_n(v))), \tag{7.47}$$

где
$$\alpha_i(u) = e\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda. \tag{7.48}$$

Здесь
$$e = 1 - \int_0^\infty B(\xi)d\xi. \tag{7.49}$$

Условия представимости предиката в таком виде установлены в теореме 4.1. Совокупность условий этой теоремы будем именовать условиями A.

Второй частный случай функций из $\overline{K}_t$ — это функции, представимые в виде

$$x(\lambda, \tau) = \beta(\tau)\cdot u(\lambda), \tag{7.50}$$

где $\beta(\tau) \in K_t$, $u(\lambda) \in K$ — положительный конус пространства $L^2[0,1]$. Для таких функций формулы (7.45), (7.46) означают, что для любой функции $u \in K$ существует функция $B_n(\xi)$, удовлетворяющая условиям (7.27) и такая, что при любой функции $\beta(\tau)$ равенство

$$\Phi_t(\beta\cdot u, c\cdot u) = 1 \tag{7.51}$$

выполняется тогда и только тогда, когда число $C = f_u^{(t)}(\beta)$, где

$$f_u^{(t)}(\beta) = \frac{1}{e}(\beta(t) - \int_{-\infty}^t B_n(t-\tau)\beta(\tau)d\tau). \tag{7.52}$$

Условия справедливости формул (7.51),(7.52) установлены в теореме 7.2. Будем именовать их условиями B'.

Теорема 7.3. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_t(x, y)$ нашлась система линейно-независимых функций $\{g_i\}_{i=1}^n \subset L^2[0,1]$ и функция $B(\xi)$, удовлетворяющая условиям (7.27), такие, что имеют место равенства (7.45), (7.46), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло условиям A, B' и*

4) *для любого $t \in (-\infty, \infty)$ и любого $x \in \overline{K}_t \times L^2[0,1]$ существует (не единственная) функция $u \in K$ такая, что*

$$\Phi_t(x,u) = 1.; \tag{7.53}$$

5) *для любых $t \in (-\infty, \infty)$ и любых $x, x', y, y' \in \overline{K}_t \times L^2[0,1]$ из равенств $\Phi_t(x, x') = 1$ и $\Phi_t(y, y') = 1$ следует, что $\Phi_t(x+y, x'+y') = 1$;*

6) *для любой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \overline{K}_t \times L^2[0,1]$, сходящейся к нулю в метрике $L_t^2 \times L^2[0,1]$, существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset K$, сходящаяся к нулю в метрике $L^2[0,1]$ и такая, что $\Phi_t(x_k, u_k) = 1, \quad k = 1, 2,...$*

Доказательство. Проверим необходимость. Пусть для семейства предикатов $\Phi_t(x, y)$ при некоторых функциях g_i $(i = 1, 2,.., n)$ и B имеют место формулы (7.45), (7.46). Для функций $u \in K$ равенство (7.46) принимает вид

$$\alpha_i^{(t)}(u) = \int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda - \int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda \times \int_{-\infty}^t B(t-\tau)d\tau = e\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda. \tag{7.54}$$

Правая часть этого равенства не зависит от t. Значит, и левая часть не зависит от t. Тогда, как видно из (7.45), предикат Φ_t не зависит от t. Следовательно, на $K \times K$ определен предикат Φ такой, что при всех $u, v \in K$

$$\Phi(u,v) = D((\alpha_1(u),...,\alpha_n(u)), (\alpha_1(v),...,\alpha_n(v))),$$

где величины $\alpha_i(u)$ определены равенством (7.48). Это и означает выполнимость условий A.

Рассмотрим теперь случай функций вида (7.50). Для таких функций равенство (7.46) принимает вид

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = \beta(t)\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda - \int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda \times \int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau = \int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda \times (\beta(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau). \tag{7.55}$$

В частности, при $\beta(\tau) = c$ $(\tau \le t)$ имеем

$$\alpha_i^{(t)}(cu) = ce\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda.$$

Таким образом, равенство

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = \alpha_i^{(t)}(cu) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (7.56)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $c = f_u^{(t)}(\beta)$, где величина $f_u^{(t)}(\beta)$ определена равенством (7.52). Поэтому из формулы (7.45) следует, что при фиксированном $u \in K$ для любой функции $\beta(\tau)$ существует единственное число c такое, что $\Phi_t(\beta u, cu) = 1$, причем c определено равенством (7.52). Это означает выполнимость условий B'.

Проверим выполнимость условий 4-6. Рассмотрим при фиксированном t произвольный элемент x пространства $\overline{K}_t \times L^2[0,1]$. Пусть величина $\alpha_i^{(t)}(x)$ определена равенством (7.46). Положим

$$u(\lambda) = \frac{1}{e}(u(\lambda, t) - \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\lambda, \tau)d\tau). \qquad (7.57)$$

Тогда в соответствии с (7.54)

$$\alpha_i^{(t)}(u) = \int_0^1 g_i(\lambda)(x(\lambda, t) - \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\lambda, \tau)d\tau).$$

Сравнивая это равенство с (7.46), получаем

$$\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i^{(t)}(u) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (7.58)$$

Поэтому из (7.45) следует, что $\Phi_t(x, u) = 1$. Нужно лишь проверить, что функция $u(\lambda)$, определенная равенством (7.57), является интегрируемой с квадратом. Для этого достаточно проверить, что каждая из функций от переменной λ

$$x(\lambda, t) \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\lambda, \tau)d\tau$$

удовлетворяет этому условию. По условию, при фиксированном t функция $x(\lambda, t) \in L^2[0,1]$. Далее имеем

$$\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\lambda, \tau)d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} (e^{\sqrt{t-\tau}} B(t-\tau))(e^{\sqrt{t-\tau}} x(\lambda, \tau))d\tau.$$

Таким образом,

$$\left|\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\lambda, \tau)d\tau\right| \le$$

$$\le \sqrt{\int_{-\infty}^{t} (e^{t-\tau} B^2(t-\tau))d\tau} \cdot \sqrt{e^t \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(\lambda, \tau)d\tau}.$$

Отсюда и из неравенства (7.27) следует, что

$$\left|\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\lambda, \tau)d\tau\right| \le ce^{-\frac{t}{2}} \sqrt{\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(\lambda, \tau)d\tau}. \qquad (7.59)$$

Поэтому

$$\int_0^1 (\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\lambda, \tau)d\tau)^2 d\lambda \le c^2 e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x^2(\lambda, \tau)d\lambda d\tau.$$

Поскольку интеграл (7.44) конечен, то из последнего равенства вытекает требуемый результат. Итак, условие 4 выполняется. Выполнимость условия 5 очевидна. Проверим условие 6.

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \overline{K}_t \times L^2[0,1]$ – произвольная сходящаяся к нулю последовательность. Определим для каждого x_k элемент u_k по формуле (7.57). Тогда из (7.59) следует, что

$$\| u_k \| \le \frac{1}{e} \| x_k(.,t) \| + ce^{-\frac{t}{2}} \| x_k \|. \qquad (7.60)$$

Здесь $\| u_k \|$ – $L^2[0,1]$ – норма элемента u_k; $\| x_k(.,t) \|$ – $L^2[0,1]$-норма функции $\lambda \to x_k(\lambda, t)$ ($\lambda \in [0,1]$); $\| x_k \|$ – $\overline{L}_t^2$-норма функции x_k. Из (7.60) видно, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Из (7.58) имеем

$$\alpha_i^{(t)}(x_k) = \alpha_i^{(t)}(u_k), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, $\Phi_t(x_k, u_k) = 1, \quad k = 1, 2, \ldots$.

Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Для любого $x \in \overline{K}_t \times L^2[0,1]$ положим

$$\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i^{(t)}(u), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7.61)$$

где u – произвольный элемент из K, связанный с x условием (7.53), α_i – линейный функционал, заданный формулой (7.48). Условие 4 не гарантирует единственности элемента u, удовлетворяющего равенству (7.53). Поэтому следует проверить, что правые части равенств (7.61) не зависят от выбора элемента u. Рассмотрим какой-либо другой элемент $v \in K$ такой, что $\Phi_t(x, v) = 1$. Из равенств $\Phi_t(x, u) = 1$ и $\Phi_t(x, v) = 1$ следует, что $\Phi_t(u, v) = 1$. Поэтому на основании (7.47) можно заключить, что $\alpha_i(v) = \alpha_i(u), \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Проверим теперь справедливость формулы (7.45). Пусть для некоторых $x, y \in \overline{K}_t \times L^2[0,1]$ имеет место равенство

$$\Phi_t(x, y) = 1. \qquad (7.62)$$

Подберем элементы $u, v \in K$, согласованные с элементами x и y соответственно условием 4, т.е.

$$\Phi_t(x, u) = 1, \; \Phi_t(y, v) = 1. \qquad (7.63)$$

Из равенств (7.62) и (7.63) заключаем, что $\Phi_t(u, v) = 1$. В этих условиях формула (7.47) дает $\alpha_i(u) = \alpha_i(v), \quad i = 1, 2, ..., n.$. Поэтому в соответствии с определением (7.60)

$$\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i^{(t)}(y), \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (7.64)$$

Обратно, пусть для некоторых $x, y \in \overline{K}_t \times L^2[0,1]$ имеет место равенство (7.64). Подберем элементы $u, v \in K$ так, чтобы

$$\Phi_t(x, u) = 1, \; \Phi_t(u, v) = 1. \qquad (7.65)$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i^{(t)}(u), \\ &\alpha_i^{(t)}(y) = \alpha_i^{(t)}(v), \quad (i = 1, 2, ..., n). \end{aligned} \qquad (7.66)$$

Из (7.66) заключаем, что $\alpha_i(u) = \alpha_i(v), \quad i = 1, 2, ..., n.$

Поэтому из (7.47) следует, что $\Phi_t(u, v) = 1$. Вместе с (7.65) это дает (7.62). Справедливость формулы (7.45) доказана. Осталось доказать, что для функционалов $\alpha_i^{(t)}(x)$ имеет место формула (7.46).

Функционалы $\alpha_i^{(t)}$ аддитивны. Действительно, пусть x, y — произвольные элементы из $\overline{K}_t \times L^2[0,1]$. Нужно показать, что

$$\alpha_i^{(t)}(x + y) = \alpha_i^{(t)}(x) + \alpha_i^{(t)}(y), \quad (i = 1, 2, ..., n). \quad (7.67)$$

Подберем элементы $u, v \in K$ так, чтобы выполнялись равенства (7.65) и, следовательно, (7.66). Из (7.65) и условия 5 заключаем, что

$$\Phi_t(x + y, u + v) = 1.$$

Но тогда по определению величины $\alpha_i^{(t)}$

$$\alpha_i^{(t)}(x + y) = \alpha_i^{(t)}(u + v). \qquad (7.68)$$

Функционалы α_i аддитивны:

$$\alpha_i(u + v) = \alpha_i^{(t)}(u) + \alpha_i^{(t)}(v). \qquad (7.69)$$

Комбинируя равенства (7.68), (7.69) и (7.66), получаем (7.67).

Рассмотрим произвольную последовательность элементов $x_k \in \overline{K}_t \times L^2[0,1]$, сходящуюся к нулю в норме $\overline{L}_t^2 \times L^2[0,1]$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ — последовательность, согласующаяся с $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ в смысле условия 6:

$$\lim_{k \to \infty} u_k = 0, \quad \Phi_t(x_k, u_k) = 1. \qquad (7.70)$$

Поскольку α_i — линейные функционалы, то

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_i(u_k) = 0. \qquad (7.71)$$

Но из второго равенства (7.70) следует, что

$$\alpha_i^{(t)}(x_k) = \alpha_i^{(t)}(u_k), \quad (i = 1, 2, ..., n, \; k = 1, 2, ...). \; (7.72)$$

Из (7.71) и (7.72) получаем, что

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_i^{(t)}(x_k) = 0, \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Значит, функционалы $\alpha_i^{(t)}$ на $\overline{K}_t \times L^2[0,1]$ аддитивны и непрерывны в нуле. Так как $\overline{K}_t$ — воспроизводящий конус в $\overline{L}_t^2$, то $\overline{K}_t \times L^2[0,1]$ — воспроизводящий конус пространства $\overline{L}_t^2 \times L^2[0,1]$. Следовательно, функционалы $\alpha_i^{(t)}$ однозначно продолжаются до линейных функционалов на этом пространстве. Общий вид линейного функционала на пространстве $L^2[0,1]$

$$u \to \int_0^1 g(\lambda) u(\lambda) d\lambda, \quad g \in L^2[0,1],$$

а на пространстве $\overline{L}_t^2$

$$u \to \int_0^1 \int_{-\infty}^t e^{\tau} A^{(t)}(\lambda, \tau) x(\lambda, \tau) d\lambda d\tau, \quad A^{(t)} \in \overline{L}_t^2.$$

Поэтому функционалы $\alpha_i^{(t)}$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(t)}(x) = &\int_0^1 g_i(\lambda) x(\lambda, \tau) d\lambda + \\ &+ \int_0^1 \int_{-\infty}^t e^{\tau} A^{(t)}(\lambda, \tau) x(\lambda, \tau) d\lambda d\tau. \end{aligned} \qquad (7.73)$$

Пусть функция x имеет вид (7.50). Из (7.51) имеем

$$\Phi_t(\beta u, f_u^{(t)}(\beta) u) = 1.$$

Комбинируя это равенство с (7.45), получаем

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = f_u^{(t)}(\beta) \alpha_i^{(t)}(u). \qquad (7.74)$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 6.1, можно показать, что функция $f_u^{(t)}(\beta)$, в действительности, не зависит от u. Поэтому

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = f^{(t)}(\beta) \alpha_i^{(t)}(u)., \qquad (7.75)$$

а равенство (7.52) принимает вид

$$f^{(t)}(\beta) = \frac{1}{e}(\beta(t) - \int_{-\infty}^t B(t - \tau) \beta(\tau) d\tau). \qquad (7.76)$$

Подставляя в (7.74) значения $\alpha_i^{(t)}(\beta u)$, $f^{(t)}(\beta)$ и $\alpha_i^{(t)}(u)$ в виде (6.162), (6.165) и (6.137) соответственно, получаем после упрощения

$$\beta(t)\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda + \int_0^1\int_{-\infty}^t e^{\tau}A_i^{(t)}(\lambda,\tau)\beta(\tau)u(\lambda)d\lambda d\tau =$$
$$= (\beta(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau)\cdot\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda.$$

или, после упрощения,

$$\int_0^1\int_{-\infty}^t e^{\tau}A_i^{(t)}(\lambda,\tau)\beta(\tau)u(\lambda)d\lambda d\tau = ,$$
$$= -\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\cdot\int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau).$$

Теорема Фубини позволяет переписать это равенство в виде

$$\int_0^1 u(\lambda)(\int_{-\infty}^t \beta(\tau)(e^{\tau}A_i^{(t)}(\lambda,\tau) + g_i(\lambda)B(t-\tau))d\tau)d\lambda = 0.$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 5.1, из последнего равенства можно заключить, что

$$e^{\tau}A_i^{(t)}(\lambda,\tau) + g_i(\lambda)B(t-\tau) = 0.$$

Поэтому равенство (7.73) можно переписать в виде (7.46). Теорема 7.3 доказана.

Поступила в редколлегию 12.05.99

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Левыкин В.М.

Бондаренко Михаил Федорович, д-р техн. наук, профессор, академик АН ВШ, ректор ХТУРЭ. Научные интересы: информатика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 43-30-53.

Шабанов-Кушнаренко Сергей Юрьевич, д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: идентификация механизмов интеллекта человека. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-46.

УДК 536

К ВОПРОСУ ФОРМИРОВАНИЯ ИЕРАРХИЙ В СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ* СИСТЕМАХ

Я возношу молитву, твердо зная,

Что не предаст природа никогда

Ее так любящего сердца.

Уордстворт [39]

СКЛЯРОВ А.Я.

Рассматривается проблема формирования отношений в синергетических системах, которые принято называть иерархическими, построенными на основе принципа подчинения. Дается анализ основных понятий теории развития и самосовершенствования. Предлагаются базовые принципы создания эволюционной теории иерархических систем.

1. Введение

Одной из важных тенденций в развитии современной науки является то обстоятельство, что объектом ее исследований становятся все более и более сложные системы. Это связано с тем, что, с одной стороны, развитие человеческого общества по технократическому пути требует значительного совершенствования средств обеспечения жизнедеятельности, создание которых неразрывно связано с дальнейшим их усложнением; с другой стороны - логика развития науки для более полного познания объективных законов организации природы** требует принимать во внимание те эффекты, которыми раньше пренебрегали, что также связано с весьма существенным усложнением формальных представлений о реальных объектах и явлениях.

Изучение механизма и причин усложнения объектов “живой” и “неживой” природы требует не только совершенствования существующих методов исследования, но и создания новых, более мощных, в основе которых лежат фундаментальные законы, вытекающие из общих законов сохранения и принципа минимального действия, справедливых для всех форм существования материи и являющихся инвариантами в тех предметных областях, к которым относится конкретный объект исследования [1, 2].

Попытка осознания этой ситуации, с одной стороны, и широкие исследования в области оснований теории синергетических систем [2, 3, 6–13, 21] – с другой привели к тому, что к середине семидесятых годов проблема уточнения общего понятия сложности стала “носиться в воздухе”. Ныне нет по существу ни одной области знаний, не использующей понятия сложности, структуры, динамики, иерархии, которые выражают строение, внутреннюю форму организации и динамическое поведение системы в границах допустимых степеней свободы.

Сознавая, однако, невозможность сколь-нибудь полного охвата относящейся к понятию сложности проблематики, мы решили ограничиться лишь некоторыми, наиболее важными аспектами, разъясняющими это понятие и обладающими многими достоинствами как принципиального, так и методического плана.

*Синергетика – от греческого “synergeia” – совместное, кооперативное действие; как научный термин введен английским физиологом Шеррингтоном [6].

**Понятие “природа” здесь следует понимать в обобщенном смысле. Оно может включать физические, химические, биологические, психофизиологические, социальные и другие законы и закономерности, определяющие состав, структуру и динамику конкретной исследуемой системы [3].