УДК 681.51

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ ПРОИЗВОДСТВА

Романенков Ю.А., Кучмиев В.Г.

В современных задачах планирования часто используются линейные модели. Их преимуществом является относительная простота и наглядность.

Каждый экономический объект может производить несколько видов продукции, а каждый вид продукции может производиться несколькими экономическими объектами, а также может поступать извне. Может существовать не один, а несколько планов, при которых система выполняет или перевыполняет задание.

Цель экономической системы заключается не в точном выполнении задания (т.е. выпуске конечной продукции в строго определенных количествах), а в экстремизации некоторой функции (например, максимизации прибыли или минимизации издержек) при условии выполнения или перевыполнения задания и выполнения ограничений на потребление факторов производства и импортируемых продуктов.

Предположим, что характеристикой каждого объекта экономической системы может выступать интенсивность объекта. Она может измеряться числом часов работы объекта, числом занятых рабочих или, например, количеством одного из выпускаемых объектом видов продукции. Если задана интенсивность работы объекта, то тем самым однозначно заданы как количества всех потребляемых, так и количества всех производимых этим объектом продуктов.

В линейных моделях предполагается, что все объекты обладают свойством линейности, которое в данном случае можно сформулировать следующим образом: увеличение интенсивности работы объекта в некоторое число раз приводит к увеличению количества всех потребляемых и выпускаемых продуктов в то же число раз.

Пусть рассматриваемая экономическая система состоит из m объектов $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_m$ и в этой системе потребляется и производится n продуктов $G_1, G_2, \ldots, G_j, \ldots, G_n$.

Учитывая предположение о линейности объектов, объект P_i можно полностью охарактеризовать вектором $a_i = \{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ij}, \ldots, \alpha_{in}\}$, j-я компонента α_{ij} которого равна по модулю количеству продукта G_j, производимому или потребляемому объектом P_i при его работе с единичной интенсивностью; договоримся считать число α_{ij} отрицательным, если продукт G_j производится объектом P_i, и положительным, если продукт G_j потребляется этим объектом. Вектор a_i задает локальные ограничения, связанные с объектом P_i. Совокупность всех локальных ограничений системы может быть описана матрицей A

$$A = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ \ldots \\ P_i \\ \ldots \\ P_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} G_1 & G_2 & \ldots & G_j & \ldots & G_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1j} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2j} & \ldots & \alpha_{2n1} \\ \ldots & & & & & \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \ldots & \alpha_{ij} & \ldots & \alpha_{in} \\ \ldots & & & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mj} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Интенсивность работы объектов всей системы будем описывать m-мерным вектором интенсивностей $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_m\}$, где ξ_i – число, указывающее интенсивность работы объекта P_i; очевидно вектор x по смыслу не может быть отрицательным:

$$x \geq 0. \tag{1}$$

Составить план для экономической системы, пользуясь линейной моделью производства, – это значит определить вектор интенсивностей x. Если вектор x известен, то легко может быть подсчитано суммарное количество продукта G_j, производимое или потребляемое системой; оно равно

$$\xi_1\alpha_{1j} + \xi_2\alpha_{2j} + \ldots + \xi_i\alpha_{ij} + \ldots + \xi_m\alpha_{mj} = \left(x, \alpha^j\right),$$

где $\alpha^j -$ j-й столбец матрицы A. Если $(x, \alpha^j) > 0$, то экономическая система в целом потребляет продукт G_j;если же $(x, \alpha^j) < 0$, то экономическая система в целом производит продукт G_j.

Пусть задан n-мерный вектор $d = \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_j, ..., \delta_n\}$, который имеет следующий смысл: если компонента $\delta_j < 0$, то экономическая система должна произвести в виде конечного продукта не менее $|\delta_j|$ единиц продукта G_j, если же $\delta_j > 0$, то экономическая система может потребить извне не более чем δ_j единиц продукта G_j. Вектор d может пониматься как набор плановых показателей или задание, которое получает экономическая система от планирующего органа более высокого уровня. Если вектор d задан, то для экономической системы оказываются допустимыми только такие векторы интенсивностей x, которые удовлетворяют n неравенствам

$$\begin{cases} (x, \alpha^1) \le \delta_1, \\ (x, \alpha^2) \le \delta_2, \\ \dots \\ (x, \alpha^j) \le \delta_j, \\ \dots \\ (x, \alpha^n) \le \delta_n \end{cases}$$

или

$$xA \le d. \tag{2}$$

Пусть задан m-мерный вектор $c = \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_i, ..., \gamma_m\}$, i-я компонента γ_i которого равна прибыли, получаемой объектом P_i при работе с единичной интенсивностью. Тогда прибыль объекта P_i при работе с интенсивностью ξ_i будет равна $\xi_i \gamma_i$, а прибыль всей системы, равная сумме прибылей отдельных объектов, будет равна:

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \xi_i = (c, x) \tag{3}$$

Оптимальным с точки зрения максимума прибыли планом работы экономической системы будет такой план, который максимизирует функцию (3) при ограничениях (1) и (2).

Так как почти каждая из входных величин в данной постановке задачи может в течении времени менять свое значение, то наряду с минимаксной возникает «интервальная» постановка, которая с точки зрения практического оперативного управления имеет больший интерес.

Итак, пусть функция прибыли (3) не обязательно достигает своего максимума, но гарантированно должна превышать некоторый наперед заданный уровень C^*. Исследователя в данном случае интересует возможные пределы изменения входных параметров, при которых прибыль будет больше уровня C^*.

Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ Ax \leq d, \\ (c,\ x) \geq C^*. \end{cases} \tag{4}$$

Решением этой системы является m-мерная фигура в пространстве параметров $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots, \xi_i,\ \ldots, \xi_m \subset X$, ограниченная гиперплоскостями, уравнения которых в аналитической форме можно получить из системы (4):

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ Ax = d, \\ (c,\ x) = C^*. \end{array} \right. \tag{5}$$

Анализировать полученную фигуру удобно, рассматривая ее ортогональные двумерные сечения. Они представляют собой области, границы которых есть функции рассматриваемой пары переменных и заданы аналитически. Нахождение параметров производства внутри найденной области будет обеспечивать заданный уровень прибыли. Вписав в плоскую область прямоугольник, можно получить области допустимого *независимого* изменения входных параметров, который позволяют представить входные параметры модели в следующем виде:

$$\xi_i = \xi_i^* \pm \Delta\xi_i,$$

где ξ_i^* – среднее значение параметра ξ_i внутри найденной области,

$\Delta\xi_i$ – допуск на изменение параметра ξ_i внутри найденной области.

Пример.

Дана линейная модель производства:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2.2 & 3 \\ 3 & -4 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 4.7 & 3.6 & -0.5 \end{bmatrix}^T;$$

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\};$$

$$d = \{6 \quad -3.5 \quad 5 \quad 7\};$$

$$c = \{400 \quad 300 \quad 120\}.$$

Максимальная прибыль будет достигнута при следующих интенсивностях ее элементов:

$$\xi_1 = 0.827, \xi_2 = 1.001, \xi_3 = 0.989$$

и будет равна

$$C_{\max} = 750.275 \text{ у.е.}$$

Предполагая, что предприятие № 2 является наиболее инерционным и стабильным, найдем допустимую область изменения параметров ξ_1 и ξ_3, обеспечивающую прибыль выше C^*.

Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} \xi_1 + 2.2\,\xi_2 + 3\,\xi_3 \le 6 \\ 3\xi_1 - 4\xi_2 - 2\xi_3 \le -3.5 \\ -3\xi_1 - 2\xi_2 + 4\xi_3 \le 5 \\ 4.7\xi_1 + 3.6\xi_2 - 0.5\xi_3 \le 7 \\ \xi_1 \ge 0 \\ \xi_3 \ge 0 \\ 400\xi_1 + 300\xi_2 + 120\xi_3 \ge C^* \\ \xi_2 = 1 \end{cases}$$

Решения этой системы для различных значений C^* представлены на рис. 1.

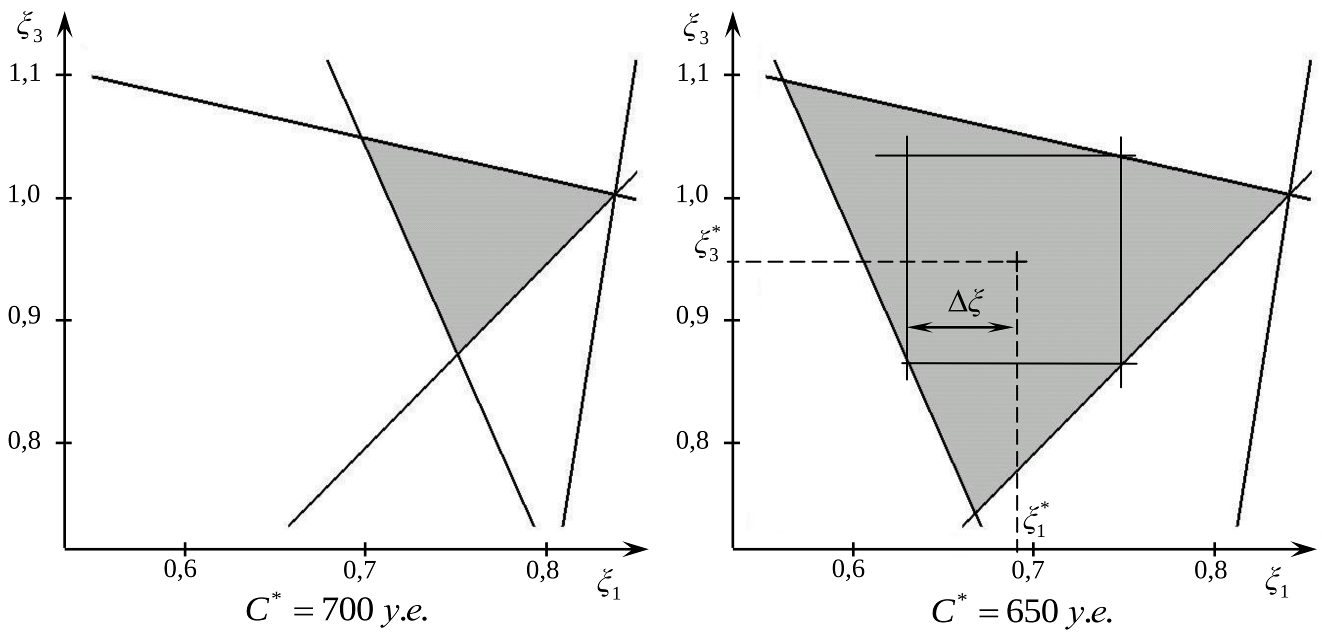

Рис. 1

Используя полученные области, можно представить интенсивности предприятий 1 и 3 в интервальном виде:

$$\xi_1 = 0.675 \pm 0.056, \xi_3 = 0.935 \pm 0.095.$$

Перейдя от интенсивностей к реальным показателям производства, можно осуществлять контроль и оперативное управление системой предприятий и ее прибылью.

Таким образом, предложенный графоаналитический метод позволяет:

– наглядно представлять результаты анализа различных математических моделей;

– производить расчеты в аналитической форме с высокой точностью и в любой момент времени;

– находить области допустимого независимого изменения параметров;

– унифицировать процедуру анализа моделей с интервальными переменными.

Литература:

1. Экономико-математическое обеспечение управленческих решений в менеджменте / Под ред. Вартаняна. – Харьков: ХГЭУ, 2001. – 288 с.