Математичне Моделювання Прогину Пластин при Розв'язанні Бігармонійних Задач за Допомогою Сплайнів П'ятого Степеня

Олег Литвин
каф. інформаційних комп'ютерних систем і математики
Українська інженерно-педагогічна академія
Харків, Україна
academ.mail@ukr.net

Ірина Томанова
каф. інформаційних комп'ютерних систем і математики
Українська інженерно-педагогічна академія
Харків, Україна
tomanova.iryna@gmail.com

Mathematical Mmodeling of Deflection of Plates in Solving the Biharmonic Problems Using Fifth-degree Splines

Oleg Lytvyn
dept. of Information Computer Systems and Mathematics
Ukrainian Engineering Pedagogics Academy
Kharkiv, Ukraine
academ.mail@ukr.net

Iryna Tomanova
dept. of Information Computer Systems and Mathematics
Ukrainian Engineering Pedagogics Academy
Kharkiv, Ukraine
tomanova.iryna@gmail.com

***Анотація* — В даній роботі проаналізовано використання явних формул для сплайнів п'ятого степеня на трикутній сітці вузлів при моделюванні прогину пластин різної форми, що описуються бігармонійним рівнянням із жорстко защемленими границями.**

***Abstract* — This paper analyzes the use of explicit formulas for fifth-degree splines on a triangular grid of nodes in modeling the deflection of plates of different shapes, described by a biharmonic equation with rigidly clamped boundaries.**

Ключові слова — бігармонійна задача; умови жорсткого защемлення; сплайни п'ятого степеня; триангуляція; метод Рітца

Keywords — biharmonic problem; conditions of rigid clamping; fifth-degree splines; triangulation; Ritz method

I. Вступ

Методи математичної фізики використовуються у різних галузях науки та техніки. Проектування та створення конструкцій, які надійні в експлуатації і досить економічні, призводить до необхідності розглядати все більш складні крайові задачі згину пластин, які зводяться до інтегрування бігармонійного рівняння.

Найпоширенішим методом розв'язання такого роду задач є метод скінченних елементів. Для збільшення точності наближення виникає необхідність збільшити кількість вузлів, тобто зростає степінь полінома, що призводить до зросту похибки обчислень з визначенням значення самого полінома. Використання сплайнів п'ятого степеня для розв'язання такого типу рівнянь методом скінченних елементів потребує розв'язання систем рівнянь із 21 параметром на кожному елементі розбиття, що в свою чергу потребує значних обчислювальних ресурсів.

Використання явних формул Сергієнко І. В., Литвина О. М., Литвина О. О., Денисової О. І. [1] для сплайнів п’ятого степеня на трикутнику дасть змогу уникнути проблеми обчислювальних потужностей при розв'язанні такого класу задач і може значно покращити точність наближеного розв'язку.

II. Постановка задачі

Стаціонарна задача про згин тонкої пластини закріпленої на границі, на яку діє навантаження $f(x,y)$, описується рівнянням четвертого порядку:

$$\Delta^2 u(x,y) = f(x,y);$$

тобто бігармонійним рівнянням, при крайових умовах:

$$u\big|_{\partial G}=0\,,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial G}=0\,,$$

де $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ – похідна по нормалі.

Таким чином, основна задача для бігармонійного рівняння полягає в знаходженні функції $u(x,y)$, неперервною разом із першою похідною, в замкнутій області $G\bigcup\partial G$, що має похідні до четвертого порядку у G, що задовольняє $\Delta^2 u(x,y)=f(x,y)$ в G, а на границі задовольняє умовам жорсткого защемлення:

$$u\big|_{\partial G}=0\,,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial G}=0\,.$$

III. Метод математичного моделювання прогину пластин складної форми із використанням сплайнів п'ятого степеня

Для поставленої бігармонійної задачі пропонується шукати розв'язок таким чином [2]:

1) Область G розбиваємо на трикутники. В результаті такого розбиття задана область G буде розбита на N трикутників.

2) Вводимо лінійну нумерацію параметрів, які відповідають функціям базисних поліномів п'ятого степеня при вершинах. Для вершин трикутників, які знаходяться на границі області G, задля задоволення граничних умов поставленої задачі, відповідні параметри покладаються рівними нулю.

3) Продовжуємо лінійну нумерацію для невідомих параметрів, які відповідають функціям базисним поліномів п'ятого степеня при нормалях до середин сторін трикутників. Для параметрів, що відповідають нормалям, розташованим на границі області, покладаються рівними нулю.

В результаті пунктів 2 та 3 отримаємо набір із K невідомих параметрів.

4) Будуємо сплайни п'ятого степеня вигляду:

$$S_n(x,y)=w(x,y)+\sum_{(i,j)\in T}^{3}\left(c_{ij}-\frac{\partial w}{\partial\upsilon_{ij}}\right)\Bigg|_{M_{ij}} H_{i,j}(x,y)\,,$$

$$w(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{0\le|\beta|\le 2} c_{i,\beta}\cdot h_{i,\beta}(x,y)\,,$$

$$h_{k\beta}(x,y)=\frac{(x-x_k)^{\beta_1}(y-y_k)^{\beta_2}}{\beta_1!\,\beta_2!}\,\omega_{ij}^3(x,y)\left\{\frac{1}{\omega_{ij}^3(x,y)}\right\}_{(x_k,y_k)}^{(2-|\beta|)},$$

$$H_{ij}(x,y)=\frac{\omega_{ik}^2(x,y)\omega_{jk}^2(x,y)\omega_{ij}(x,y)sign(\Delta_{kij})}{\omega_{ik}^2(x_{ij},y_{ij})\omega_{jk}^2(x_{ij},y_{ij})\left|A_i A_j\right|},$$

$$M_{ij}=\left(\frac{x_i+x_j}{2},\frac{y_i+y_j}{2}\right)=(x_{ij},y_{ij})\,,$$

$$\left|A_i,A_j\right|=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}\,,$$

$$\Delta_{kij}=\begin{vmatrix} x_k & y_k & 1\\ x_i & y_i & 1\\ x_j & y_j & 1\end{vmatrix},$$

$$\omega_{ij}(x,y)=\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_i & y_i & 1\\ x_j & y_j & 1\end{vmatrix},$$

де $c_{i,\beta}$ – невідомі параметри, що відповідають базисним функціям при вершинах $h_{i,\beta}$; $c_{i,j}$ – невідомі параметри, що відповідають базисним функціям при $H_{i,j}(x,y)$ нормалях до середин сторін трикутника з вершинами i та j.

5) Будуємо інтеграли на кожному із трикутників розбиття вигляду:

$$I_n=\int_{T_n}\left(\left(\frac{\partial S_n(x,y)}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial S_n(x,y)}{\partial x\partial y}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial S_n(x,y)}{\partial y^2}\right)^2-2f(x,y)S_n(x,y)\right)dxdy\,.$$

6) Обчислюємо значення виразу:

$$I=\sum_{n=1}^{N}I_n\,.$$

7) Знаходимо оптимальні значення параметрів, розв'язавши таку систему рівнянь:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i}=0,\ \ i=\overline{1,K}.$$

8) Підставляємо отримані значення параметрів у сплайни на кожному трикутнику розбиття.

Отриманий набір сплайнів та трикутниках розбиття є наближеним розв'язком бігармонійної задачі для жорстко защемленої пластини.

IV. Математичне моделювання прогину пластин складної форми методом Рітца із використанням сплайнів п'ятого степеня

Пропонується використовувати узагальнення методу Рітца розв'язання бігармонійних задач із використанням явних формул для сплайнів п'ятого степеня на трикутниках [3, 4]:

Розбиваємо область G на трикутники, вводимо лінійну нумерацію параметрів та будуємо сплайни на трикутниках розбиття за аналогічною схемою наведеного вище методу (пункти 1-4).

5) Будуємо локальні матриці A_k та локальні вектори b_k, $k=\overline{1,N}$ для кожного трикутника розбиття вигляду:

$$A_k=\left\{A_{ij}:A_{ij}=\iint_{T_n}\left[\left(\Phi_i^{(2,0)}(x,y)+\Phi_i^{(0,2)}(x,y)\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\Phi_j^{(2,0)}(x,y)+\Phi_j^{(0,2)}(x,y)\right)\right]dxdy\right\},$$

$$b_k=\left\{b_i:b_i=\iint_G\left[f(x,y)\cdot\Phi_i(x,y)\right]dxdy\right\},\ \ k=\overline{1,N},$$

де $\Phi(x,y)$, $\Phi^{(2,0)}(x,y)$ та $\Phi^{(0,2)}(x,y)$ являють собою такі вектори:

$$\Phi(x,y)=\left\{\frac{\partial S_n(x,y)}{\partial c_i},\ i=\overline{1,21}\right\},$$

$$\Phi^{(2,0)}(x,y)=\left\{\frac{\partial^2\Phi_i(x,y)}{\partial x^2},\ i=\overline{1,21}\right\},$$

$$\Phi^{(0,2)}(x,y)=\left\{\frac{\partial^2\Phi_i f(x,y)}{\partial y^2},\ i=\overline{1,21}\right\}.$$

6) Будуємо матриці переходу U_k, $k=\overline{1,N}$ вигляду:

$$U_k=\left\{U_{ij}:U_{ij}=\begin{cases}1,\ c_i^{T_k}=c_j;\\0,c_i^{T_k}\neq c_j.\end{cases}\right\},\ \ k=\overline{1,N}.$$

7) Будуємо розширені локальні матриці вигляду:

$$A_k^*=U_k^TA_kU_k,\ \ k=\overline{1,N}.$$

8) Будуємо глобальну матрицю:

$$A=\sum_{k=1}^{N}A_k^*,$$

та глобальний вектор:

$$b=\sum_{k=1}^{N}b_k^*.$$

9) Знаходимо невідомі параметри, розв'язавши систему рівнянь, яка в матричній формі має вигляд:

$$A\cdot c=b.$$

10) Підставляємо отримані значення параметрів у сплайни на кожному трикутнику розбиття.

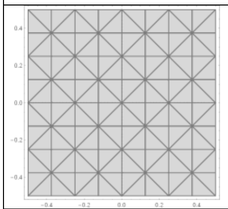
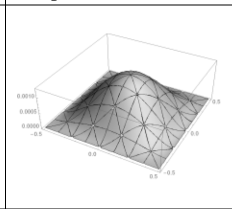
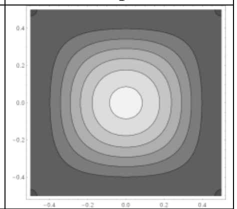
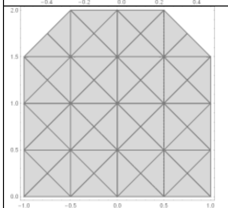
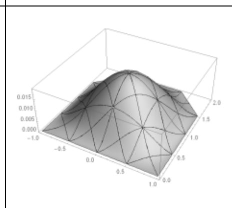
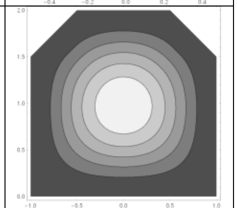
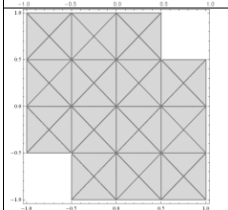
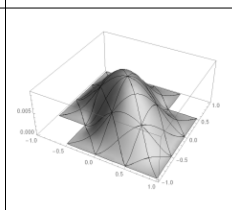
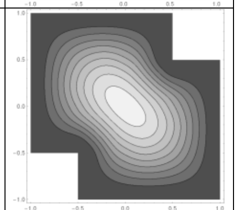
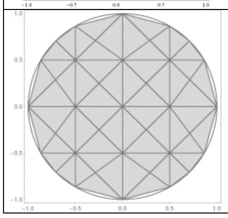
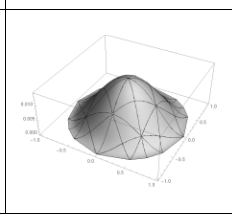
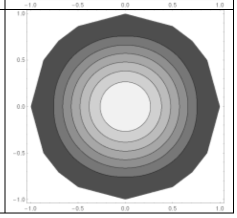
Отриманий набір сплайнів та трикутниках розбиття є наближеним розв'язком бігармонійної задачі для жорстко защемленої пластини.

V. Деякі приклади математичного моделювання прогину пластин складної форми

Наведені в роботі методи було застосовано до бігармонійних задач із жорстко защемленими пластинами різної форми: квадратної, круглої, багатокутної випуклої області та області із вхідними кутами.

Графічне зображення отриманих розв'язків наведено в табл. 1.

ТАБЛИЦЯ I. Графічне зображення отриманих розв'язків бігармонійних задач на різних областях

Розбиття області	**Прогин пластини**	**Лінії рівня**
		
		
		
		

Отримані результати обчислювальних експериментів було порівняно із розв'язками, отриманими в роботах С. П. Тимошенко, Д. В. Вайндберга, В. Л. Рвачова та Л. В. Курпи.

Так для квадратної області максимальне значення прогину досягається в точці (0, 0) та дорівнює 0.00126531 згідно [5] та, згідно наведено в роботі методу, 0.00126532.

Для випуклого багатокутника максимальне значення досягається в точці (0, 0.97) та дорівнює 0.0193874 згідно методу [6] та 0.0191495 згідно наведеного методу.

Для області із вхідними кутами максимальне значення досягається в точці (0, 0) та дорівнює 0.0105521 згідно із [7] та 0.00960909 згідно із наведеним методом.

Для круглої області максимальне значення досягається в точці (0, 0) та дорівнює 0.0186114 у роботах [5, 8] та 0.0140245 згідно із наведеним методом.

Також було проведено дослідження на неперервність між отриманими сплайнами кожного наближеного розв'язку задачі. Результати дослідження показали, що явні формули для сплайнів п'ятого степеня гарантують неперервність розв'язку та його похідних до першого порядку включно.

ВИСНОВКИ

В роботі наведено методи розв'язання бігармонійної задачі для жорстко защемлених пластин із використанням явних формул для сплайнів п'ятого степеня на трикутниках. Проведено обчислювальні експерименти зі знаходження розв'язку бігармонійної задачі про згин жорстко защемленої пластини різної форми у вигляді: квадрата; опуклого багатокутника; області із вхідними кутами; кола. Результати подано у вигляді графіків їх поверхонь та ліній рівня. Результати проведених обчислювальних експериментів порівнювалися із результатами отриманими в роботах С. П. Тимошенко, Д. В. Вайндберга, В. Л. Рвачова та Л. В. Курпи. Порівняння отриманих розв'язків бігармонійної доводить добру узгодженість із відомим світовим результатами. Отримані результати є основою для розв'язання прикладних задач математичної фізики, математичними моделями яких є бігармонійне рівняння із жорстко защемленими краями.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] Сергиенко И.В., Литвин О.Н., Литвин О.О., Денисова О.И. Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике // Кибернетика и системный анализ. 2014. Т. 50. № 5. С. 25-33.

[2] Литвин О. М., Томанова І. С. Розв'язання задачі про згин пластини методом скінченних елементів з використанням сплайнів п'ятого степеня на трикутній сітці // Проблемы машиностроения. 2017. Т. 20, № 1. С. 52−61.

[3] Литвин О. М., Томанова І. С. Побудова локальних матриць системи Рітца з використанням сплайнів 5-го степеня на трикутнику при розв'язанні бігармонійної задачі про згин пластини // Бионика интеллекта: научно-технический журнал. 2017. № 2 (89). С.61–65.

[4] Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Tomanova I. S. Solving the bigarmonic plate bending problem by the Ritz method using explicit formulas for splines of degree 5 // Cybernetics and System Analysis. 2018. Vol. 54, № 6. P. 105–109.

[5] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. Москва: Наука, 1966. 635 с.

[6] Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R–функции в задачах теории пластин. Киев: Наук. думка, 1987. 176 с.

[7] Курпа Л.В, Мазур О.С., Шматко Т.В. Применение теории R-функций к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. Харьков: ООО "В деле", 2016. 492 с.

[8] Вайнберг Д.В, Вайнберг Е.Д. Расчет пластин – Киев: "Будівельник", 1970. – 436с.