The general conclusion of this situation: if A is possible and certain, by substituting in the formula of A is possible and A is certain we will get: $\mu_A(u) = \pi_x(u)$ for all u in U. Indeed, when A is possible, it may be modelled as $\forall u \in U$, $\mu_A(u) \le \pi_x(u)$, and when A is an ordinary subset, then $\pi_x(u) = 1$, while the possibility distribution of a non-fuzzy variable according to the definition of Zadeh: $\Pi(A) = \sup_{u \in A} \pi_x(u)$, then $\Pi(A)=1$, only when the statement *x is in A* is consistent with the variable information described by π_x.

To specify a fuzzy rule relate a variable x in U to a variable y in V. For the rules of the first kind, *possibility rules,* this kind of rules take the form: *the more x is A, the more possible y in B;* if we translate this rule into the form: $\forall u$, if x = u, B is range for x in at least $\mu_A(u)$-possible, then we will get the following: $u \in U$, $\forall v \in V$, $\min(\mu_A(u), \mu_B(v)) \le \pi_{x|y}(v, u)$.

For the second kind of rules, *certainty rules,* which take the form: *the more x is A, the more certainty y in B,* translate this statement into the form $\forall u$, if x = u, B is a range for x in at least $\mu_A(u)$-certain, then we will get the form: $\forall u \in U$, $\forall v \in V$, $\pi_{x|y}(v, u) \le \max(1-\mu_A(u), \mu_B(v))$. In particular, when A is an ordinary subset, we know that, if x in A, then B is a certain and possible range for y, this yields: $u \in A$, $\pi_{x|y}(v, u) = \mu_B(v))$; $\forall u \notin A$, $\pi_{x|y}(v, u)$ unspecified. In the general case, when the person is uncertain as to the value he provides to the system [1-2], thus he provides the following information: *V is A with certainty* α, the question is, how we can make an inference from this rule to get a meaning for the variable B in the rule: *V is A (with certainty* α*)* $\Rightarrow$ *V is B?* As a conclusion, if we have a rule of the form: *V is A with certainty* α, it can be translated into the equivalent rule: V is B, where for any $x \in X$: $B(x) = (\alpha \wedge A(x)) + (1-\alpha)$. Take into consideration that for *V is A with certainty 1*, we get *V is A*, and for *V is A with certainty 0*, we get *V is X.*

7. Conclusion

The aim of the fuzzy logic is to provide an easy way to deal with the systems which are full of uncertainty. In such systems or environments the fuzzy logic is considered to be very effective when the conclusions need not to be precise, but acceptable for a degree of certainty.

References: 1. *Ronald R Yager, Lotfi Zadeh* //An introduction to fuzzy logic applications in intelligent systems. Fuzzy sets, fuzzy systems, intelligent control. ISBN 0-7923-9191. 1993. 299 p. 2. *Zimmerman* //Fuzzy set theory and its applications. Second edition, fuzzy sets, operation research. ISBN 0-7923-9075-X. 1993. 399 p. 3. *Wolfgang H. Janko, Marc Roubens and Zimmerman //Progress in fuzzy sets and systems.* ISBN 0-7923-0730-5. 1992. 188 p. 4. *Bart Kosko //* Neural networks and fuzzy systems, a dynamical systems approach to machine intelligence. ISBN 0-13-612334-1. 1993. 449 p. 5. *Dubis D. and Prade H. //* Fuzzy sets in approximate reasoning. Part 2: logical approaches. Fuzzy sets and systems. 1990. 298 p.

Paper submission 12.01.98

G. F. Krivulia, Head of Automation design computing technique department. Adress: 14, Lenin Avenue, Kharkov, 310726, Ukraine. Tel. 409326. Hobby: travel and fishing.

Rami J. Matarneh, postgraduate student of automation design computing technique department. Adress: 14, Lenin Avenue, Kharkov, 310726, Ukraine. Tel. 409326. Hobby: sports and reading. Scientific interests: AI and Expert systems.

УДК 519.7

ОТОБРАЖЕНИЯ КАК ОБЪЕКТЫ ФОРМУЛЬНОГО ОПИСАНИЯ

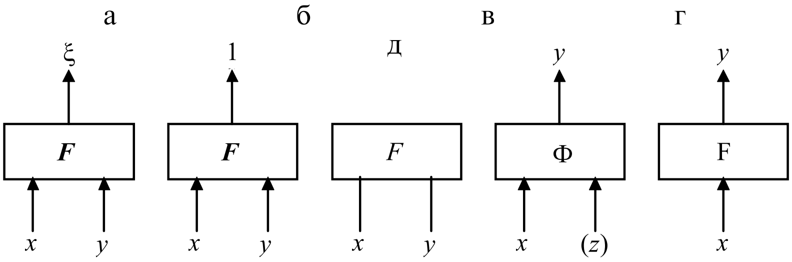
ДУДАРЬ З.В., САМУЙЛИК И.Г., ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО Ю.П.

Рассмотрены связи и переходы между бинарными отношениями, предикатами и отображениями, соответствующими друг другу. Предложен способ формульного представления отображений, основанный на использовании языка алгебры предикатов. Найден общий вид однозначных отображений. Результаты обобщены на случай произвольной арности.

В [1] был рассмотрен вопрос о формульном описании отношений. В предлагаемой статье продолжена разработка той же темы, но понятие отношения анализируется теперь с несколько иной точки зрения. На практике с отношениями во многих случаях обращаются как с функциями. Об этом свидетельствует частое употребление терминов «частичная функция» и «многозначная функция». Строго говоря, такая терминология неверна, поскольку противоречит определению функции. Как известно, функцией называется отношение, обладающее свойствами всюду определенности и однозначности. То, что фактически подразумевается под словами «частичная функция» или «многозначная функция» – это, на самом деле, не функция, а отношение. Понятие отношения не совпадает с понятием функции, так как не любое отношение является функцией. И все же следует признать, что в стремлении многих авторов рассматривать отношения как функции есть нечто такое, что заслуживает внимательного изучения.

Сказанное поясним примером. Любой текст можно понять только в том случае, если каждое слово в нем обладает вполне определенным, единственным значением. При выполнении указанного требования значения слов в тексте будут функцией этих слов, взятых вместе с окружающими их контекстами. Но если слово выделено из контекста и предъявлено без него, то его значение может стать неоднозначным. Например, значения слова «коса» в словосочетаниях «песчаная коса», «острая коса» и «русая коса» различны, но они однозначно определены в каждом из этих контекстов. Если же слово «коса» взять отдельно от контекста, оно будет иметь несколько различных значений. Факты такого рода приводят к выводу, что связь между отдельно взятыми словами и их значениями – это не функция, а отношение. Однако если использовать для характеристики связи между словом x и его значением y некоторое отношение xFy, то придется рассматривать сигналы x и y как равноправные. Если F – отношение, а не функция, бессмысленно спрашивать, какой из сигналов (x или y) входной, а какой – выходной. И тем не менее, каждый человек, как носитель языка, ясно чувствует, что слово первично, а его значение – вторично. Это явствует даже из анализа словоупотребления: мы говорим «значение слова» , но нельзя сказать «слово значения». Именно это чувство заставляет исследователя языка рассматривать отношение xFy как нечто «функциеподобное» и писать y=F(x), считая слово x аргументом, а его смысл y – значением некоторого преобразования F, соответствующего отношению F.

Любое отношение xFy на $A \times B$, рассматриваемое как преобразование y=F(x) сигналов $x \in A$ в сигналы $y \in B$, будем называть *отображением* и говорить, что отображение y=F(x) *ставит в соответствие* сигналу x сигнал y. Заменяя термин «отношение» логически равносильным ему термином «отображение», мы тем самым вводим новую точку зрения, с которой понятие отношения видится уже иначе. Ранее мы смотрели на отношение xFy как на *связь* двух равноправных сигналов x и y. Теперь то же самое отношение F понимается как *преобразование* сигнала x в сигнал y. Термины «частичное отображение» и «многозначное отображение» выражают *направленность* преобразования информации, столь часто обнаруживаемую на практике. Вместе с тем, они не содержат в себе, в отличие от терминов «частичная функция» и «многозначная функция», логического противоречия и удовлетворяют всем требованиям математической строгости. В результате исследователь реальных преобразователей информации (например, механизмов интеллекта человека) получает естественную терминологию, безупречную в логическом отношении.



Информационные приборы предикатов

Между отношениями xFy и отображениями y=F(x) существует взаимно однозначное соответствие, выражаемое условием: для любых $x \in A$, $y \in B$ если xFy, то y=F(x); если же $x\overline{F}y$, то $y \neq$F(x) (1). Отношение F и отображение F, связанные условием (1), будем называть *соответствующими* друг другу. С абстрактной точки зрения отношения и соответствующие им отображения неразличимы, но по способу своего выражения и по характеру содержательной информации они резко отличаются. То же самое можно сказать относительно отношений и соответствующих им предикатов [1]. Различие между соответствующими друг другу предикатом, отношением и отображением можно наглядно продемонстрировать, если представить их в виде информационных приборов. Предикат $F(x, y)$=х представляем как преобразователь сигналов с двумя предметными входами x, y и одним логическим выходом х (рисунок, поз. а). Будем отбирать с помощью этого прибора только такие пары (x, y) входных сигналов, на которые он реагирует сигналом х=1 (рисунок, поз. б). Собрав все такие пары в единое множество, получим отношение F. Оно представлено в виде двухполюсника (рисунок, поз. в), связывающего сигналы x и y. Такой прибор приемлет любую пару $(x, y) \in F$ и отвергает каждую пару сигналов $(x, y) \notin F$.

Рассмотрим, далее, преобразователь сигналов Φ с двумя предметными входами x, z и одним предметным выходом y (рисунок, поз. г). Вход x – явный (основной), вход z – скрытый (побочный). К первому входу экспериментатор имеет доступ, ко второму — нет. На первый вход сигналы x подаются экспериментатором по его желанию, на второй поступают сами по себе и не зависят от его воли. Выходные сигналы $y \in B$ формируются прибором однозначно для каждой пары входных сигналов $x \in A$, $z \in C$. Хотя прибор, на самом деле, имеет два входа и действует детерминировано, однако внешним наблюдателем он воспринимается как преобразователь с одним входным сигналом x и со случайным выходным сигналом y (рисунок, поз. д). Если прибор действует так, что сигналы x и y, появляющиеся на его входе и выходе, в любой момент времени образуют пару (x, y), принадлежащую отношению F, и, кроме того, компоненты x, y любой пары (x, y) из отношения F действительно появляются на входе и выходе прибора в какие-то моменты времени его работы, мы будем говорить, что такой прибор реализует отображение F, соответствующее отношению F. В роли такого прибора выступает, например, любой читатель, извлекающий из слов x текста их смысловые значения y. Скрытым сигналом z в данном случае служит контекст, окружающий понимаемое слово, который меняется при переходе от одного слова к другому. Как входной сигнал контекст читателем, очевидно, не осознается, хотя и обрабатывается им в процессе понимания смысла слова на подсознательном уровне.

Приступим теперь к систематическому изучению отображений. Прежде всего, выясним, в каком смысле следует понимать выражение y=F(x). Пусть $F(x, y)$ – предикат на $A \times B$, соответствующий отображению y=F(x), которое действует из множества A в множество B; $D(x, y)$ – *предикат равенства* на U^2, определяемый условием: для любых $x, y \in U$

$$D(x,\ y) = \exists a \in U\ x^a y^a. \qquad (2)$$

Предикат равенства можно определить и иначе — с помощью так называемого *закона Лейбница*: для любых $x, y \in U$

$$D(x,\ y) = \forall M \subseteq U(M(x) \sim M(y)). \qquad (3)$$

Знак ~ означает *равнозначность* логических элементов $0 \sim 0 = 1 \sim 1 = 1$, $0 \sim 1 = 1 \sim 0 = 0$. Можно доказать, что для любого множества U и любых $x, y \in U$

$$\forall M \subseteq U(M(x) \sim M(y)) = \exists a \in U\ x^a y^a. \qquad (4)$$

Отсюда непосредственно следует, что условия (2) и (3) определяют один и тот же предикат D.

Нетрудно видеть, что для любых $x, y \in U$ и любого $F \subseteq U^2$

$$F(x,\ y) = \exists a \in U(F(x,\ a) \wedge D(a,\ y)). \qquad (5)$$

Условие (5) дает ключ к пониманию записи y=F(x). Из нее следует, что равенству y=F(x) удовлетворяют все те и только те пары $(x, y) \in U^2$, для каждой из которых найдется такое $a \in U$, что

$$F(x,\ a) = 1 \text{ и } D(a,\ y) = 1, \text{ (т.е. } (x,\ a) \in F \text{ и } y = a). \qquad (6)$$

Соотношение (6) связывает отображения F с соответствующими им предикатами F. Связь отображений F с отношениями F дается зависимостью (1) из настоящей статьи, а связь отношений F с предикатами F – зависимостью (1) из работы [1]. Итак, мы рассмотрели триаду различных, но равносильных друг другу понятий: отношение, предикат, отображение и описали правила перехода от каждого из этих понятий к двум другим.

Рассмотрим способ формульного представления отображений. С этой целью сначала введем некоторые необходимые понятия. Если предикату $F(x, y)$, определенному на $A\times B$, соответствует отображение $y=\mathrm{F}(x)$ из A в B, то будем говорить, что предикату $G(y, x)=F(x, y)$ при любых $x\in A$ и $y\in B$, который определен на $B\times A$, соответствует отображение $\mathrm{G}=\mathrm{F}^{-1}$ из B в A, *обратное* отображению F, и будем писать $x=\mathrm{F}^{-1}(y)$. Если $y=\mathrm{F}(x)$, то предмет $y\in B$ называется *образом* предмета $x\in A$, а предмет x – *прообразом* предмета y относительно отображения F. Совокупность всех образов $y\in B$ предмета $x\in A$ относительно отображения $y=\mathrm{F}(x)$ называется *полным образом* предмета x относительно отображения F. Совокупность всех прообразов $x\in A$ предмета $y\in B$ относительно отображения $y=\mathrm{F}(x)$ называется *полным прообразом* предмета y относительно отображения F. *Образом множества* $M\subseteq A$ относительно отображения F называется множество N, образованное из всех образов предметов, принадлежащих множеству M. *Прообразом множества* $N\subseteq B$ относительно отображения F называется множество $M\subseteq A$, образованное из всех прообразов предметов, принадлежащих множеству N. Выраженные соответствующими предикатами образ и прообраз множества определяются следующими зависимостями: при любом $y\in B$

$$N(y)=\exists x\in A\ F(x, y)M(x), \tag{7}$$

при любом $x\in A$

$$M'(x)=\exists y\in B\ F(x, y)N(x). \tag{8}$$

Заметим, что прообраз M' множества N, определяемый по формуле (8), вообще говоря, не совпадает с исходным множеством M, для которого по формуле (7) отыскивается образ N.

Способ формульного представления отображений основывается на **теореме об импликативном разложении предиката**, гласящей, что *любой предикат $F(x, y)$ на $A\times B$ можно представить в виде*: *для любых $x\in A$ и $y\in B$:*

$$F(x, y)= \forall a\in A(x^a\supset F(a, y)). \tag{9}$$

Знак $\supset$ обозначает *импликацию* логических элементов $0\supset 0=0\supset 1=1\supset 1=1$, $1\supset 0=0$. Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что после подстановки любого $a\in A$ вместо x равенство (9) обращается в тождество вида $F(a, y)=F(a, y)$. Если множество A конечно и равно $A=\{a_1, a_2,..., a_k\}$, то, согласно (9), для любых $x\in A$ и $y\in B$:

$$F(x,y)=(x^{a_1}\supset F(a_1, y))(x^{a_2}\supset F(a_2, y))...$$
$$...(x^{a_k}\supset F(a_k, y)). \tag{10}$$

Отношение F, определяемое уравнением $F(x, y)=1$, выразится по (10) системой

$$x^{a_1}\supset F(a_1, y)=1,\ x^{a_2}\supset F(a_2, y)=1,...,$$
$$x^{a_k}\supset F(a_k, y)=1 \tag{11}$$

или, что то же самое, системой условий

$$x^{a_1}\supset F(a_1, y),\ x^{a_2}\supset F(a_2, y),...,\ x^{a_k}\supset F(a_k, y). \tag{12}$$

В случае, когда A бесконечно, получаем систему вида

$$x^a\supset F(a, y)=1,\ (a\in A), \tag{13}$$

состоящую из бесконечного числа уравнений, или, что то же, систему

$$x^a\supset F(a, y),\ (a\in A), \tag{14}$$

состоящую из бесконечного числа условий. Система условий (14) (в том числе и ее частный случай (12)) представляет собой формульное описание для любого отображения $y=\mathrm{F}(x)$. Каждому элементу a множества A она ставит в соответствие его полный образ $P_a(y)=F(a, y)$ относительно отображения F. Тем самым система (14) формирует все те возможные сигналы y преобразователя F (рисунок, поз. д), которые могут появиться на его выходе при подаче на его вход сигнала $x=a$. Таким образом, мы пришли к простому и естественному способу исчерпывающего формульного описания отображения F, которое характеризует движение сигнала от входа к выходу соответствующего преобразователя. Действительно, после подстановки $x=a_i$ в систему (11) все ее уравнения, кроме i-го, обращаются в тавтологию вида $1=1$, i-е же уравнение превращается в равенство $F(a_i, y)=1$, которое определяет полный образ $P_a(y)=F(a_i, y)$ элемента a_i относительно отображения F.

Рассмотрим пример. Пусть $A=B=\{a, b, c\}$, $F(x, y)=x^ay^b\vee x^ay^c\vee x^by^c$. Тогда, согласно (10), $F(x, y)=(x^b\supset F(a, y))(x^b\supset F(b,y))(x^c\supset F(c, y))=(x^a\supset y^b\vee y^c)(x^b\supset y^c)(x^c\supset 0)$. Система условий (12) в данном случае запишется в виде

$$x^a\supset y^b\vee y^c,\ x^b\supset y^c,\ x^c\supset 0. \tag{a}$$

Она указывает, что полным образом предмета a относительно отображения $y=\mathrm{F}(x)$ является множество $\{b, c\}$, предмета b – множество $\{c\}$, предмета c – множество $\varnothing$. Это означает, что на выходе преобразователя F (рисунок, поз. д), в ответ на входной сигнал $x=a$, может появиться либо сигнал $y=b$, либо сигнал $y=c$; в ответ на сигнал $x=b$ появляется сигнал $y=c$; в ответ на сигнал $x=c$ не появляется на выходе y вообще никакого сигнала. Как видим, представление отображения $y=\mathrm{F}(x)$ системой условий (14) полностью характеризует это отображение, оно, в отличие от предикатного задания уравнением $F(x, y)=1$, обладает направленностью действия и позволяет легко отыскать все возможные выходные сигналы отображения для любых его входных сигналов.

Рассмотрим предикат $G(y, x)=F(x, y)$. Любая формула, выражающая предикат F, одновременно выражает и предикат G, так что эти предикаты, по существу, совпадают. Несущественное их различие состоит в том, что в предикате F переменная x считается первой, а y – второй; в предикате G нумерация переменных обратная. Раскладывая предикат G по формуле (9), получаем $G(y, x) = \forall b\in B(y^b\supset F(x, a))$ или иначе

$$F(x, y)=\forall b\in B(y^b\supset F(x, a)). \tag{15}$$

Соотношение (15) дает другой вариант представления предиката $F(x, y)$, формульно выражающий отображение $x=\mathrm{G}(y)$ или $x=\mathrm{F}^{-1}(y)$, обратное отображению $y=\mathrm{F}(x)$. Для конечного множества $B=\{b_1, b_2,..., b_l\}$ отображение F^{-1} запишется системой условий

$$x^{b_1}\supset F(x, b_1),\ x^{b_2}\supset F(x, b_2),\ x^{b_k}\supset F(x, b_k), \tag{16}$$

для произвольного B – системой условий

$$x^b\supset F(x, b),\ (b\in B). \tag{17}$$

Как видим, отображения формульно описываются принципиально иначе, чем соответствующие им предикаты. В то время, как для предикатов $F(x, y)$ и $G(y, x)$ (в случае, когда $G(y, x)=F(x, y)$) их формульные описания совпадают, соответствующие этим предикатам отображения F и G ($\mathrm{G}=\mathrm{F}^{-1}$) имеют совершенно различные представления (14) и (17). Выражения (14) и (17) будем называть *явным представлением* отображений F и F^{-1}. Формульную запись соответствующего предиката F будем называть *неявным представлением* отображений F и F^{-1}, оно одинаково для отображений F и F^{-1}, не различает их, в равной степени приемлемо для каждого из них . Тем не менее, из него, с помощью теоремы об импликативном разложении предиката, можно извлечь, при желании, различные явные представления отображений F и F^{-1}.

Рассмотрим пример. Как и в предыдущем примере, принимаем $A=B=\{a, b, c\}$, $F(x, y)=x^a y^b \vee x^a y^c \vee x^b y^c$. Предикат $G(y, x)=F(x, y)$ выражается этой же формулой . Формульное выражение предикатов F и G рассматриваем как неявное представление отображений F и F^{-1}. По формуле (15) получаем второй вариант разложения предиката F: $F(x, y)=(y^a \supset F(x, a))(y^b \supset F(x, b))(y^c \supset F(x, c))=(y^a \supset 0)(y^b \supset x^a)(y^c \supset x^a \vee x^b)$. Отсюда извлекаем неявное представление отображения F^{-1} в виде системы условий (16), которая в данном случае приобретает вид

$$y^a \supset 0,\ y^b \supset x^a,\ y^c \supset x^a \vee x^b. \quad (б)$$

Этот пример наглядно демонстрирует важное обстоятельство: одно и то же отношение (в данном примере оно задано формулой $x^a y^b \vee x^a y^c \vee x^b y^c$) порождает два соответствующих ему отображения, одно – прямое (а), другое – обратное (б).

Формульное описание однозначных отображений имеет свою специфику, поэтому оно будет рассмотрено особо. Множество A называется *областью отправления*, а множество B – *областью прибытия* отображения F, действующего из A в B. Множество M всех предметов $x \in A$, для каждого из которых существует предмет $y \in B$, удовлетворяющих условию $y=\mathrm{F}(x)$, называется *областью определения* отображения F. Согласно этому

$$M(x)=A(x) \wedge \exists y \in A\ F(x, y). \quad (18)$$

Множество N всех предметов $y \in B$, для каждого из которых существует предмет $x \in A$, удовлетворяющий условию $y=\mathrm{F}(x)$, называется *областью значений* отображения F:

$$N(y)=B(y) \wedge \exists x \in A\ F(x, y). \quad (19)$$

Отображение называется *всюду определенным*, если его область определения совпадает с областью отправления, в противном случае оно называется *частичным*. Нетрудно показать, что всюду определенное отображение F характеризуется условием

$$\forall x \in A\ \exists y \in A\ F(x, y). \quad (20)$$

Отображение F называется *сюръективным*, если его область значений совпадает с областью прибытия, формально оно определяется условием

$$\forall y \in B\ \exists x \in A F(x, y). \quad (21)$$

Будем говорить, что предикату $F(x,y)$, определенному на $A \times B$, соответствует однозначное отображение F, действующее из A в B, если предикат F удовлетворяет условию однозначности

$$x \in Ay,\ z \in B(F(x, y) \wedge F(x, z) \supset D(y, z)). \quad (22)$$

Отображение, не являющееся однозначным, называется *многозначным*. Условие (22) называется также *прямой однозначностью*. Будем говорить, что отображение $y=\mathrm{F}(x)$ удовлетворяет условию *обратной однозначности*, если отображение $x=\mathrm{F}^{-1}(y)$ подчиняется условию прямой однозначности. Отображение F, удовлетворяющее условию обратной однозначности

$$\forall x,\ y \in A \forall z \in B(F(x, z) \wedge F(y, z) \supset D(x, y)), \quad (23)$$

называется *инъективным*.

Теорема о возможности канонического представления однозначного отображения. *Любое однозначное отображение* $y=\mathrm{F}(x)$, *действующее из A в конечное множество* $B=\{b_1, b_2,..., b_l\}$, *можно представить системой равенств*

$$y^{b_1}=F(x, b_1),\ y^{b_2}=F(x, b_2), ...,\ y^{b_l}=F(x, b_l), \quad (24)$$

которая определяет отношение xFy, соответствующее отображению F.

В системе (24) знак равенства можно заменить равноценным ему знаком равнозначности, тогда она превращается в систему условий

$$y^{b_1} \sim F(x, b_1),\ y^{b_2} \sim F(x, b_2),\ y^{b_l} \sim F(x, b_l). \quad (25)$$

Представление отображения F в форме (24) или (25) называется *каноническим*.

Доказательство. Чтобы доказать теорему, достаточно убедиться, что при $x \in A$ и $y \in B$ условие $F(x, y)=1$ равносильно системе условий (25). Предположим, что пара предметов $x \in A$, $y \in B$ удовлетворяет условию $F(x, y)=1$. Отсюда следует существование такого i $(1 \le i \le l)$, что $y=b_i$ и $F(x, b_i)=1$. В силу однозначности отображения F, для любого $j \ne i$, $(1 \le j \le l)$ имеем $F(x, b_j)=0$. Поэтому все уравнения системы (24), кроме i-го, обращаются в тавтологии вида 0=0, j-е же уравнение обращается в тавтологию вида 1=1. Таким образом, пара (x, y) является также и решением системы уравнений (24). Следовательно, система условий (25) удовлетворяется. Предположим, что пара предметов $x \in A$, $y \in B$ не удовлетворяет условию $F(x, y)=1$. Тогда найдется такое i $(1 \le i \le l)$, что $F(x, b_i)=0$, но $y^{b_i}=1$. В этом случае i-е уравнение системы (24) обращается в противоречие вида 1=0. Следовательно, система условий (25) не удовлетворяется. Итак, при любых $x \in A$ и $y \in B$ условие $F(x, y)=1$ равносильно системе условий (25). Теорема доказана.

Теорема о невозможности канонического представления многозначного отображения. *Ни одно многозначное отображение* $y=\mathrm{F}(x)$, *действующее из A в конечное множество* $B=\{b_1, b_2,..., b_l\}$, *нельзя представить в виде* (24) *и* (25).

Доказательство. Пусть отображение F многозначно. Тогда найдутся такие $x \in A$ и $b_i, b_j \in B$ $(i \ne j)$, что $F(x, b_i)=F(x, b_j)=1$. Ни одна из пар (x, b_i) и (x, b_j) не удовлетворяет системе уравнений (24). Действительно, если $y=b_i$, то $y \ne b_j$, а значит $y^{b_j}=0$. Поэтому пара (x, b_i) обращает в противоречие вида 0=1 j-е уравнение системы (24). Если же $y=b_j$, то $y \ne b_i$, а значит $y^{b_i}=0$. В этом случае пара (x, b_j) обращает в противоречие вида 0=1 i-е уравнение системы (24). Отсюда следует неравносильность условия $F(x, y)=1$ и системы (25). Теорема доказана.

Эти две теоремы можно соединить в одну. В результате получаем **теорему об общем виде однозначного отображения**. *Любые однозначные отображения* $y=F(x)$, *действующие из A в* $B=\{b_1, b_2, ..., b_l\}$, *и только они, могут быть представлены в виде системы условий*

$$y^{b_1} \sim P_1(x),\ y^{b_2} \sim P_2(x), ...,\ y^{b_l} \sim Pl(x), \quad (26)$$

где $P_1, P_2, ..., P_l$ – *некоторые подходящие предикаты на A. Если предикат $F(x,y)$, соответствующий отображению* $y=\mathrm{F}(x)$, *известен, то предикаты P_i могут быть найдены по формуле*

$$P_i(x)=F(x, b_i). \quad (27)$$

Предикат $P_i(x)$ определяет полный прообраз предмета $y=b_i$ относительно отображения $y=\mathrm{F}(x)$.

Все полученные выше результаты легко обобщаются на случай произвольной области B (как конечной, так и бесконечной). К примеру, сформулируем для произвольной области B **теорему об общем виде однозначного отображения**. *Для того чтобы отображение* y=F(x), *действующее из A в B, было представимо системой условий* $y^b \sim P_b(x)$ ($b \in B$) *при подходящем выборе предикатов Pb, необходимо и достаточно, чтобы оно было однозначным.* Предикаты P_b выражаются через предикат F в виде $P_b(x)=F(x, b)$ ($b \in B$). Доказательство необходимости сводится к установлению того факта, что любое отображение, задаваемое системой (26), однозначно; достаточности − к установлению того, что любое однозначное отображение может быть выражено системой (26) при подходящем выборе предикатов $P_b(x)$.

С помощью зависимостей (24) (или (25)) для любого отображения y=F(x) можно найти для каждого $x \in A$ соответствующее ему значение $y \in B$, если оно существует. В этом случае один из предикатов y^{b_i} ($i=\overline{1, l}$) обращается в единицу, остальные − в нуль. Если же значение y отображения F для какого-то $x \in A$ не существует, то в этом случае все предикаты y^{b_i} обращаются в нуль. Таким образом, зависимости (24) и (25) можно использовать в качестве удобного способа для явного формульного выражения любых однозначных отображений. Рассмотрим пример явного представления однозначного отображения. Пусть $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{a, b, c\}$, $F(x, y)=x^a y^b \vee x^b y^b \vee x^d y^c$. Проверяем выполнение условия однозначности для предиката F: $x \in A y, z \in B$ $(F(x, y) \wedge F(x, z) \supset \mathbf{D}(y, z)) = x \in \{a, b, c, d\} y, z \in \{a, b, c\}$ $((x^a y^b \vee x^b y^b \vee x^d y^c)(x^a z^b \vee \vee x^b z^b \vee x^d z^c) \supset y^a z^a \vee y^b z^b \vee y^c z^c) = 1$. Отображение F однозначно, следовательно, его можно представить в виде (24). Записываем для отображения F равенства (24): $y^a=F(x, a)=x^a a^b \vee x^b a^b \vee x^d a^c=0$; $y^b=F(x, b)=x^a b^b \vee \ldots \vee x^b b^b \vee x^d b=x^a \vee x^b$; $y^c=F(x,c)=x^a c^b \vee x^b c^b \vee x^d c^c= =x^d$. Итак, отображение y=F(x) выражается в явном виде системой равенств

$$y^a=0,\ y^b=x^a \vee x^b,\ y^c=x^d. \qquad (\text{в})$$

С помощью зависимостей (в) находим значения отображения F: для $x=a$, $y=b$, так как $y^b=1$, $y^a=y^c=0$; аналогично, если $x=b$, то $y=b$; если $x=d$, то $y=c$; для $x=c$ значение y=F(x) не существует, поскольку $y^a=y^b=y^c=0$.

Важным частным случаем однозначных отображений являются функции. Будем говорить, что функция y=F(x) *отображает* множество A в множество B и писать F:$A \to B$. *Функцией* из A в B называется любое однозначное и всюду определенное отображение, действующее из A в B. Любое однозначное отображение можно превратить в функцию, если сузить его область отправления до области определения. Функцию y=F(x), отображающую A в B, можно задать, указывая соответствующий ей предикат $F(x, y)$, определенный на $A \times B$. Чтобы такое задание функции F было корректным (т.е. на самом деле определяло функцию, а не какое-то иное отображение), нужно проверить, что предикат $F(x, y)$ подчиняется, во-первых, условию всюду определенности (20) и, во-вторых, условию однозначности (22). Предикат, удовлетворяющий этим двум условиям, называется *функциональным.*

Функция называется *сюръекцией*, если ее область значений совпадает с областью прибытия. Говорят, что сюрьекция $f{:}A \to B$ отображает множество A *на* множество B. О функции же F:$A \to A$ говорят, что она отображает множество M *в* себя. Такая функция называется *операцией*, заданной на А. Функция F называется *инъекцией*, если она удовлетворяет условию обратной однозначности. Отображение, удовлетворяющее условиям прямой и обратной однозначности, называется *взаимно однозначным.* Функция называется *биекцией,* если она сюръективна и инъективна. Говорят, что биекция F:$A \to B$ взаимно однозначно отображает множество A на множество B. Если существует биекция F:$A \to B$, то говорят, что множества A и B *равномощны.* Конечные равномощные множества состоят из одинакового числа элементов. Функции можно описывать формулами в явном виде точно так же, как и любые однозначные отображения. Особенность состоит лишь в том, что теперь в выражениях, стоящих справа от знаков равенства в системе (24), встречаются предикаты узнавания по переменной x для всех предметов области отправления отображения. Если отображение инъективно, то в каждом равенстве системы (24) будет встречаться не более одного предиката узнавания по переменной x; если же отображение сюръективно, то в системе (24) будут отсутствовать нули. Например, однозначное отображение (в) не функционально, не инъективно и не сюръективно.

В заключение отметим, что здесь был рассмотрен лишь частный случай отображения − *одноместные отображения* y=F(x). Понятие отображения можно распространить на *многоместные отображения* y=F(x_1, x_2,..., x_m) и на *векторные отображения* (y_1, y_2,...,y_n)=F(x_1, x_2,..., x_m).

Литература*: Дударь З.В., Мельникова Р.В., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Отношения как объекты формульного описания // Радиоэлектроника и информатика. 1997. Вып. 1. С. 115—119.

Поступила в редколлегию 12.03.98

Дударь Зоя Владимировна, канд. техн. наук, доцент кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Адрес: 310202, Украина, Харьков, пр. Л. Свободы, 39б, кв. 31, тел. 40-94-46.

Самуйлик Ирина Георгиевна, аспирант кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Адрес: 310145, Украина, Харьков, ул Космическая, 10, кв. 52, тел. 40-94-46.

Шабанов-Кушнаренко Юрий Петрович, д-р техн. наук, профессор кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Адрес: 310058, Украина, Харьков, ул Культуры, 11, кв. 31, тел. 40-94-46.