

УДК 519.62



КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА ПРИ АНАЛИЗЕ ПОВЕДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.В. Карпухин¹, А.В. Гороховатский²

¹ ХНУ, г. Харьков, Украина, kav-102@yandex.ru;

² ХНЭУ, г. Харьков, Украина, gorohovatsky@rambler.ru

Обсуждаются качественные методы анализа поведения нелинейных динамических систем с малым параметром. Предложен и исследован метод автоматического отнесения изображения фазового портрета к одному из эталонных видов, что реализует интеллектуальную обработку фазовых портретов в целях снижения вычислительных затрат.

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ, ОСОБЫЕ ТОЧКИ, КЛАССИФИКАЦИЯ

Введение

Уровень интеллектуализации при решении сложных задач определяется специально разработанным программным обеспечением, способным поддерживать и изменять распределение функций в процессе решения [1]. Фазовые траектории дают возможность увидеть всю совокупность движений, возникающих в динамической системе [2]. Нахождение стационарных решений – особых точек и предельных циклов, исследование их устойчивости, выделение областей притяжения устойчивых стационарных режимов в фазовом пространстве является задачей качественной теории динамических систем.

Целью авторов настоящей статьи есть применение интеллектуальных методов обработки данных при теоретическом исследовании поведения динамических систем для изучения их поведения и классификации типов особых точек.

Задачи работы состоят в анализе уравнений, описывающих поведение динамических систем, применении методов распознавания образов для классификации фазовых портретов и проведении численных экспериментов для определения эффективности практического применения предлагаемого подхода.

1. Математические модели динамических систем

Рассмотрим поведение динамической системы, изменение состояния которой во времени описывается дифференциальными уравнениями [2]. Пусть дана система уравнений $\frac{dx}{dt} = X(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Y(x, y)$, и пусть $x = x_0$, $y = y_0$ – её особая точка, т.е. $X(x_0, y_0) = 0$, $Y(x_0, y_0) = 0$. Предположим, что эта особенность не исчезает при рассмотрении вместо системы одного уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}$. Пусть точка (x_0, y_0) – изолированная точка, т.е. вокруг (x_0, y_0) можно описать столь малую окрестность, что внутри неё нет других особых точек.

В окрестности особых точек решение систем дифференциальных уравнений имеет наиболее сложный и характерный вид. Закономерности,

свойственные окрестностям особых точек, определяют ход процесса в целом. Под изолированной особой точкой дифференциального уравнения вида $\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}$ будем понимать точку, в которой значение $X(x, y)$, а, следовательно, и производной dx/dt не определены, т.е. в этих точках нарушено условие теоремы существования и единственности.

В связи с этим поставим следующие проблемы.

1. Охарактеризовать возможные топологические типы поведения интегральных кривых в окрестности изолированной особой точки.

2. Получить аналитические критерии, которые позволили бы, исходя из $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, определить, какой тип расположения интегральных кривых имеет место для заданного уравнения либо системы уравнений.

Основой для анализа служит классификация Пуанкаре для случая системы однородных линейных уравнений [3], где решения представлены следующими четырьмя случаями: 1) корни α_1 и α_2 действительны и различны; 2) уравнение имеет кратный корень; 3) $D = 0$, т.е. уравнение линейное; 4) корни – комплексные.

Если корни имеют разные знаки, то в семействе интегральных кривых будет только две кривые, проходящие через начало. Можно представить себе вид интегральных кривых как ветви гиперболы. В этом случае особая точка $(0, 0)$ называется седлом, т.к. интегральные кривые напоминают линии уровня седлообразной поверхности (рис. 1). Если же корни имеют одинаковые знаки, то каждая кривая семейства проходит через начало координат, и все интегральные кривые касаются в начале координат, что называют узлом (рис. 1).

Когда решение представляет собой кратный корень, решения входят в начало координат и там касаются прямой $y = \alpha_0 x$ (вырожденный узел, рис. 2).

Когда $D = 0$, т.е. уравнение линейное, решение распадается на ряд подслучаев. Когда $C \neq 0$ и $B - C \neq 0$, уравнение имеет вид $x \frac{dz}{dx} = P + Qz$, где

$P = \frac{A}{C}$, $Q = \frac{B-C}{C}$. Все интегральные кривые, кроме $x = 0$, касаются прямой $y = -\frac{P}{Q}x$, называемой узлом (рис. 1). Вырожденный узел получаем, когда все интегральные кривые касаются оси y в начале координат. Если $Q = -1$; $y = -C + Px$, интегральные кривые параллельны прямой $y = +Px$. Особая точка – вырожденное седло (рис. 2).

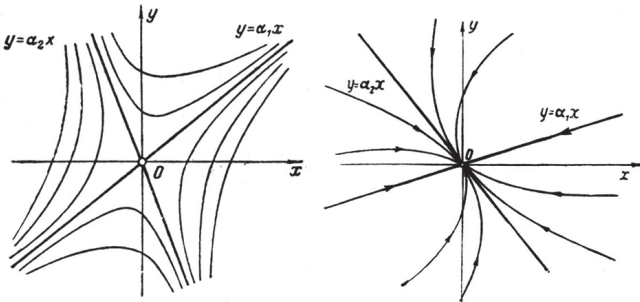


Рис. 1. Седло и узел

Если $A = 0$, то имеем уравнение $x \frac{dz}{dx} = 0$. Отсюда следует, что $x = 0$ и $z = Cy = Cx$. Интегральные кривые входят в начало по всем направлениям – дикритический узел (рис. 3).

Четвертый случай – уравнение (3) имеет комплексные корни: $\alpha_1 = a + ib$; $\alpha_2 = a - ib$. Дифференциальное уравнение можно записать следующим образом:

$$x \frac{dz}{dx} = -\frac{D[(z-a)^2 + b^2]}{C + Dz}. \quad (4)$$

Интегральные кривые уравнения (4) после преобразования плоскости (x, y) превратились в семейство логарифмических спиралей. При возрастании числа оборотов по часовой стрелке кривая асимптотически приближается к точке $(0,0)$. Эта особая точка называется фокусом (рис. 3). Если окружности остаются замкнутыми кривыми, превращаясь в эллипсы, то особая точка носит название центра (рис. 4).

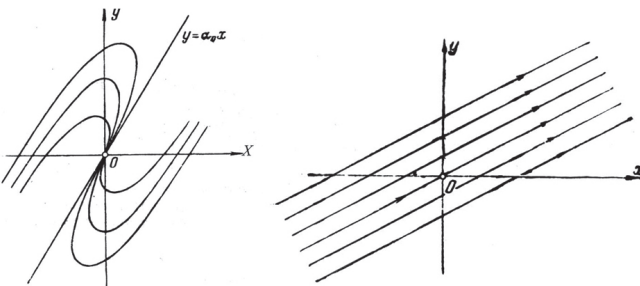


Рис. 2. Вырожденные узел и седло

На фазовой плоскости выделяют три типа фазовых траекторий: особые точки, или положения равновесия, определяемые в результате решения системы уравнений $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$; изолированные замкнутые траектории, отвечающие

периодическим движениям в системе; сепаратрисы, разделяющие фазовую плоскость на области, заполненные траекториями разных типов. Метод фазовой плоскости состоит в построении фазового портрета системы и последующего его анализа [3]. Метод позволяет определить число, типы и характер особых точек, изолированных замкнутых траекторий и сепаратрис, и даёт возможность по виду фазовых траекторий представить всю совокупность движений, возникающих в динамической системе при всевозможных начальных условиях. Особые точки классифицируют по характеру фазовых траекторий в их окрестности: их основные типы изображены на рис. 1–3. Изолированные замкнутые траектории (предельные циклы) классифицируют по характеру их устойчивости (рис. 3–4).

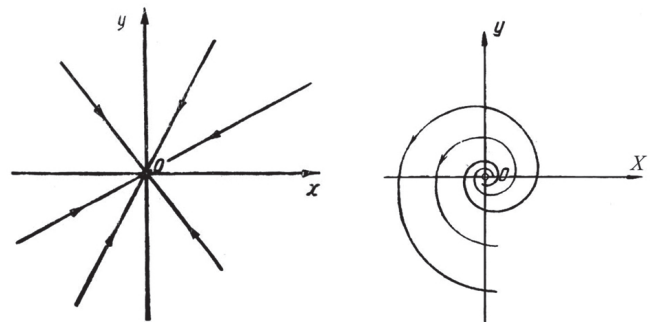


Рис. 3. Дикритический узел и фокус

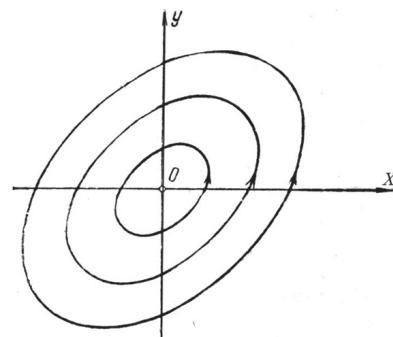


Рис. 4. Центр

2. Примеры математических моделей динамических систем

Исследование нелинейных динамических систем с малым параметром приводит к решению уравнений вида [6, 7]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[m(\tau) \frac{d(x \pm y)}{dt} \right] + h(\tau) \frac{d(x \pm y)}{dt} + k(\tau)(x \pm y) = \\ = F(\tau, \theta) + \varepsilon \Phi_1 \left(\tau, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}, y, \frac{dy}{dt} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \Phi_2 \left(\tau, x, y, \frac{dx}{dt} \right),$$

где $\tau = \varepsilon t$ – «медленное» время; $m(\tau)$, $h(\tau)$, $k(\tau)$ – медленно меняющиеся параметры (медленно по отношению к периоду собственных колебаний

резонансного контура); $\theta = \int v(\tau)dt$; $v(\tau)$ – мгновенная частота внешнего периодического возбуждения $F(\tau, \theta)$; $\varepsilon\Phi_1$ – нелинейные полиномиальные функции.

Поскольку уравнение (5) имеет достаточно сложный вид, получить его точное аналитическое решение затруднительно. Переход от аналитического представления сложных колебательных функций к табличному представлению с заданной точностью требует, как правило, значительного дробления шага, и, следовательно, увеличения времени интегрирования. Это приводит при численном решении уравнений к значительному объему информации и не гарантирует сходимости применяемых численных методов.

Аналитическое построение асимптотических приближений ручным способом при исследовании даже простейших нелинейных цепей требует выполнения значительного объема вычислительных операций. Возникает задача четкого описания алгоритма построения приближенного решения в общем виде с тем, чтобы решение дифференциальных уравнений было реализовано в достаточно мощном специализированном математическом пакете.

Мощной системой для задач компьютерной алгебры является «Аналитик-2007» [8], с помощью которой задача приближенного решения уравнений данного класса становится вполне реальной.

Описанный в [6] алгоритм позволяет находить решение произвольного дифференциального уравнения из класса нелинейных резонансных систем в нужном приближении, что позволяет предсказывать поведение колебательных систем и влиять на него с помощью изменения параметров системы. Суть алгоритма состоит в том, что задача нахождения сложных функций сводится к более простой задаче нахождения амплитуды, фазы колебаний и постоянной составляющей автоматического смещения, причем в системах без обратной связи последнее уравнение системы отсутствует. Далее приравниваются коэффициенты при одинаковых гармониках колебаний, и решается соответствующая система дифференциальных уравнений 1-го порядка. Затем по рекуррентным формулам из каждого предыдущего приближения можно получить следующее. Таким образом алгоритм находит необходимое приближение решения уравнения (5). На основе приближения строится фазовый портрет исследуемой системы, по которому выбираются начальные значения амплитуды и фазы, приводящие систему с течением времени в требуемое состояние. Полученная краевая задача может быть решена с помощью численных методов.

Область применения алгоритма не ограничивается электрическими цепями. Любая колебательная система, находящаяся под воздействием малой нелинейной силы, может быть описана с помощью приведенного выше общего уравнения. Реализация

алгоритма на языке «АНАЛИТИК-2007» позволяет значительно сократить время на анализ колебательных систем и увеличить его точность [9].

3. Классификация изображения фазового портрета

Одним из методов идентификации характера фазового пространства является автоматическое распознавание изображения фазового портрета. Распознавание выполнено с использованием проекционных признаков вида [4, 5], которые обеспечивают инвариантность к искажениям смещения, поворота и масштабирования фазового портрета.

В качестве информативной основы получения признаков использовано преобразование Радона (ПР), которое состоит в интегрировании функции яркости изображения $B(x, y)$ вдоль прямых под различными углами $\theta \in \Theta$:

$$R(p, \theta) = \iint_{x y} B(x, y) \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy,$$

где p – расстояние от центра координат до фиксированной линии, вдоль которой осуществляется проектирование, θ – угол поворота осей координат.

Предложено использовать систему инвариантных к искажениям смещений a_1, a_2 и масштабов α, β моментных признаков порядка k вида [4, 5]:

$$I_k^{\alpha, \beta, a_1, a_2} = \int_p (R(p, \hat{\theta}))^{k+1} \left(p - \frac{m_1}{m_0}\right)^k dp / (\mu_0)^{k+1}.$$

Для построения признаков в случае присутствия поворота можно зафиксировать значение $p = \hat{p}$ и использовать несколько проекций изображения. Заметим, однако, что использование полной проекционной информации для всех значений p более оправдано из-за лучшей помехозащищенности. Инвариантными системами при наличии искажений смещений, поворота и масштабирования одновременно будут:

$$I_k^{\alpha, \beta, \varphi, a_1, a_2} = \int_{\theta \in \Theta} I_k^{\alpha, \beta, a_1, a_2}(\theta) d\theta.$$

Метод построения и сопоставления систем инвариантных признаков изображений на основе ПР и моментных инвариантов состоит из следующих этапов: выполнение ПР; определение инвариантных функционалов в зависимости от типа и сложности искажений; сопоставление с эталонными значениями на основе меры близости. Критерий принятия решений может быть сформирован как на основе агрегации всех проекций, так и с помощью процедуры голосования каждой проекции за класс, заданный эталоном.

При проведении экспериментов по классификации фазовых портретов использовано по 6 инвариантных признаков ($k=6$) для двух проекций ($\theta_1=0, \theta_2=\pi/2$) для анализа 5 фазовых

пространств. Обоснование выбора значения k подтверждено практической результативностью метода, однако, с увеличением разнообразия эталонных признаков и при наличии шумов целесообразно увеличение значения k .

Рис. 5 демонстрирует пример автоматического распознавания искаженного смещением, поворотом и масштабированием фазового изображения портрета типа «седло» (рис. 1).

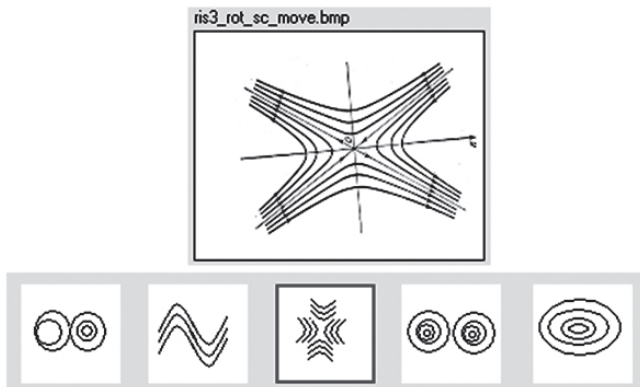


Рис. 5. Пример классификации фазового портрета «седло»

Выводы

В работе применены качественные методы анализа дифференциальных уравнений для анализа поведения нелинейных динамических систем с малым параметром. Особое внимание уделено изучению поведения интегральных кривых в окрестностях особых точек.

Авторами впервые предложен метод автоматического отнесения изображения фазового портрета к одному из эталонных классов, что позволяет выполнять задачу интеллектуальной обработки фазовых портретов без существенных вычислительных затрат и компетенций персонала в узкоспециализированной области.

Показано, что применение систем компьютерной алгебры позволяет значительно сократить время получения решений сложных дифференциальных уравнений нелинейных динамических систем.

Практическая ценность полученных результатов состоит в том, что предложенный подход к исследованию динамических систем может быть применен не только к рассмотренным в статье нелинейным резонансным цепям, но и к широкому классу нелинейных динамических систем разной физической природы. Проведенное компьютерное моделирование подтверждает практическую целесообразность применения проекционных методов классификации.

Дальнейшим развитием предложенного подхода может быть применение методов распознавания образов для анализа более сложных топологий фазовых портретов.

Список литературы: 1. Клименко, В.П. Прикладная математическая задача как объект компьютерной алгебры [Текст] / В.П. Клименко, А.Л. Ляхов // Математичні машини і системи. — 2003. — № 3,4. — С. 103–123. 2. Андронов, А.А. Качественная теория динамических систем второго порядка [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. — М.: «Наука», 1966. — 568 с. 3. Пуанкаре, А.О. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями: пер. с франц. [Текст] / А.О. Пуанкаре. — М. — Л., — 1947. — 385 с. 4. Putyatin, Y. Projective methods of image recognition / Y. Putyatin, V. Gorohovatsky, A. Gorohovatsky, E. Peredriy // Intelligent Technologies and Application / K. Markov et al. (Eds.). — Sofia: FOI ITNEA. — Information Science and Computing. — No 5. — 2008. — P. 37–43. 5. Гороховатский, А.В. Проекционные методы в задачах нормализации и распознавания изображений [Текст] / А. В. Гороховатский // АСУ и приборы автоматизации. — №147. — 2009. — С. 64–70. 6. Митропольский, Ю.А. Машинный анализ нелинейных резонансных цепей [Текст] / Ю.А. Митропольский, А.А. Молчанов. — Киев: Нукова думка, 1981. — 238 с. 7. Карпухин, А.В. Проектирование нелинейных динамических систем с малым параметром с использованием численно-аналитических методов [Текст] / Ж.В. Дейнеко, А.В. Карпухин, М.В. Клименко // Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник «Радиотехника», Харьков, 2007. — Вып. 149. — С. 43–51. 8. Морозов, А.А. АНАЛИТИК–2007. Сборник статей [Текст] / А.А. Морозов, В.П. Клименко, Ю.С. Фишман, Т.Н. Швалюк // Системы компьютерной алгебры семейства АНАЛИТИК. Теория. Реализация. Применение. — Киев, 2010. — С. 415–465. 9. Клименко, В.П. Реинжиниринг системы компьютерной алгебры АНАЛИТИК [Текст] / В.П. Клименко, А.Л. Ляхов, Д.М. Гвоздик // Математичні машини і системи. — 2010. — №4. — С. 18–23.

Поступила в редколлегию 26.01.2011.

УДК 519.62

Класифікація зображень фазового портрета при аналізі поведінки динамічних систем / А.В Карпучін, А.В. Гороховатський // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. — 2011. — № 1 (75). — С. 52–55.

Запропоновано метод автоматичної класифікації зображень фазового портрета на основі інваріантних ознак. Проаналізовано математичні моделі поведінки динамічних систем, розглянуто методи їх аналізу та результати комп'ютерного моделювання за класифікацією зображень інтегральних кривих поблизу особливих точок.

Л. 5. Бібліогр.: 9 найм.

UDK 519.7

Phase portrait image classification during analysis of dynamic systems behavior / A.V. Karpuchin, A.V. Gorokhovatskyi // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. — 2011. — № 1 (75). — P. 52–55.

The method of automatic phase portrait image classification based on invariant signs is offered. Mathematical models of dynamic systems behavior are analyzed, the methods of their analysis as well as results of computer experiments of classification of integral curves near-by the special points behavior image are considered.

Fig. 5. Ref.: 9 items.