ЦИФРОВАЯ ИНФОРМАЦИЯ ДВОИЧНЫХ СИГНАЛОВ

Х. М. Виленский

Харьков

В системах двоичной информации качество выдаваемых данных характеризуется вероятностями двух родов ошибок, которые соответствуют решениям о приеме x_1 или x_2; на самом же деле посланы соответственно x_2 или x_1. Если обозначить вероятности этих ошибок через α_1 и β_1, то вероятности правильных решений будут $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ и $\beta_2 = 1 - \beta_1$.

Найдем общее выражение для информации двоичного сигнала на выходе решающего устройства, используя ранее полученное выражение для аналоговой информации [4], которое представим здесь в развернутом виде

$$I = p_1 \lg p_1 - p_2 \lg p_2 - p_1 \int p\left(\frac{y}{x_1}\right) \lg \left[1 + \frac{p_2}{p_1} \frac{p\left(\frac{y}{x_2}\right)}{p\left(\frac{y}{x_1}\right)}\right] dy -$$

$$- p_2 \int p\left(\frac{y}{x_2}\right) \lg \left[1 + \frac{p_1}{p_2} \frac{p\left(\frac{y}{x_1}\right)}{p\left(\frac{y}{x_2}\right)}\right] dy. \qquad (1)$$

Заменяя интегрирование суммированием, а функции правдоподобия соответствующими вероятностями ошибок по всем возможным решениям, т. е. заменяя в (1) один раз $p\left(\frac{y}{x_1}\right)$ на α_1 и $p\left(\frac{y}{x_2}\right)$ на β_2, а второй раз $p\left(\frac{y}{x_1}\right)$ на α_1 и $p\left(\frac{y}{x_2}\right)$ на β_1, получим

$$I = p_1 (\alpha_1 \lg \alpha_1 + \alpha_2 \lg \alpha_2) + p_2 (\beta_1 \lg \beta_1 + \beta_2 \lg \beta_2) -$$

$$- (p_1 \alpha_2 + p_2 \beta_1) \lg (p_1 \alpha_2 + p_2 \beta_1) - (p_1 \alpha_1 + p_2 \beta_2) \lg (p_2 \alpha_1 + p_2 \beta_2). \qquad (2)$$

При цифровой информации общее выражение (2) значительно упрощается. *Для удобства будем различать следующие основные типы двоичных* каналов.

1. Канал с симметричным входом — это канал с одинаковыми априорными вероятностями появления каждого из двух возможных сигналов ($p_1 = p_2 = p = 0{,}5$); информация такого канала

$$I = 1 + 0{,}5 [\alpha_1 \lg \alpha_1 + \beta_1 \lg \beta_1 + \alpha_2 \lg \alpha_2 + \beta_2 \lg \beta_2 -$$

$$- (\alpha_1 + \beta_2) \lg (\alpha_1 + \beta_2) - (\beta_1 + \alpha_2) \lg (\beta_1 + \alpha_2). \qquad (3)$$

2. Канал с симметричным выходом — это канал с одинаковыми вероятностями ошибок $\alpha_1 = \beta_1$ и, следовательно, $\alpha_2 = \beta_2$; здесь

$$I = \alpha_1 \lg \alpha_1 + \alpha_2 \lg \alpha_2 - (p_1 x_2 + p_2 \alpha_1) - \\ - (1 - p_1\alpha_2 - p_2\alpha_1) \lg (1 - p_1\alpha_2 - p_2\alpha_1). \quad (4)$$

3. Полностью симметричный канал, у которого одновременно $p_1 = p_2$ и $\alpha_1 = \beta_1$; здесь

$$I = 1 + \alpha_1 \lg \alpha_1 + \alpha_2 \lg \alpha_2 = 1\beta_1 \lg \beta_2 + \beta_2 \lg \beta_2. \quad (5)$$

Вероятности α и β являются функциями энергетического отношения сигнал — помеха q и порога квантования k (нормированный порог квантования $k = \frac{u_0^2}{v_0^2}$, u_0 — уровень индикации, v_0 — дисперсия помехи). Таким образом, цифровую информацию можно оптимизировать по трем параметрам: p, k, q.

Оптимизация по априорной вероятности. Найдем условие для получения максимальной информативности применительно к общему случаю, когда информативность

$$V = \frac{p_1 (\alpha_1 \lg \alpha_1 + \alpha_2 \lg \alpha_2 + p_2 (\beta_1 \lg \beta_1 + \beta_2 \lg \beta_2) - (p_1\alpha_2 + p_2\beta_1) \lg (p_1\alpha_2 + p_2\beta_1) -}{p_1 q_1 + p_2 q_2} \\ \frac{- (p_1\alpha_1 + p_2\beta_2) \lg (p_1\alpha_1 + (p_2\beta_2)}{p_1 q_1 + p_2 q_2}. \quad (6)$$

Найдем производную V по p; приравняв ее нулю, получаем следующее выражение для определения $p_{опт}$ при любых значениях α, β и $r = \frac{q_2}{q_1}$:

$$(1 - r)(p_1 A + p_2 B) - (a - b)[r + (1 - r) p_1] = \\ = [(1 - r)(p_1 + c) + r] \lg c - [(1 - r)(p_2 - c) - r] \lg (1 - c), \quad (7)$$

где $A = \alpha_1 \lg \alpha_1 + \alpha_2 \lg \alpha_2$;

$B = \beta_1 \lg \beta_1 + \beta_2 \lg \beta_2$;

$a = \frac{A}{\beta_1 - \alpha_2}$; $b = \frac{B}{\beta_1 - \alpha_2}$; $c = p_1\alpha_2 + p_2\beta_1$.

При $q_1 = q_2$ (или при $r = 1$) получаем явное выражение для оптимальной априорной вероятности

$$p_{опт} = \frac{1 - \beta_2 (1 + \varepsilon)}{(\beta_1 - \alpha_2)(1 + \varepsilon)}, \quad (8)$$

где коэффициент симметрии канала

$$\varepsilon = \frac{p_1\alpha_2 + p_2\beta_1}{p_1\alpha_1 + p_2\beta_2} = 2^{b-a} = 2^{\frac{B-A}{\beta_1 - \alpha_2}}. \quad (9)$$

Определяемая (8) величина $p_{опт}$ максимизирует одновременно информативность V и информацию I, так как при $r = 1$ средняя энергия сигнала не зависит от распределения априорных вероятностей.

Максимум принимаемой информации, соответствующий условию $p = p_{опт}$,

$$I_{макс} = \lg (2^{\alpha_1 b - \beta_2 a} + 2^{\beta_1 a - \alpha_2 b}). \quad (10)$$

В канале с симметричным выходом $\alpha = \beta$

$$p_{опт} = 0{,}5; \quad a = b; \quad s = 1,$$

поэтому

$$I_{макс} = 1 + \alpha \lg \alpha + \beta \lg \beta. \tag{5'}$$

В другом предельном случае, когда $r = 0$, выражение (7) принимает вид

$$p_1 A + p_2 B - (a - b) = (p_1 + c) \lg c - (p_2 - c) \lg (1 - c).$$

Отсюда, в частности, получаем, что при $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 = 0{,}5$ величина $p_{опт} = 0$. Следовательно, канал с предельно несимметричным выходом имеет наибольшую информативность при предельно несимметричном входе. Больше того, оказывается, что потенциальная информативность резко несимметричных каналов значительно превосходит потенциальную информативность симметричных (или близких к ним) каналов. Таким образом, с точки зрения максимального использования энергии сигнала, симметричные двоичные каналы не являются наилучшими (это видно, например, из сравнения рисунков 1 и 2).

Соотношения (5) и (10) согласуются с результатами работ [11] и [12].

Оптимизация по пороговому уровню. Условие получения максимума информации при вариации порога k (полагая $p = \text{const}$ и $q = \text{const}$) находим на основании (2) путем решения уравнения $\frac{dI}{dk} = 0$,

что дает следующий результат:

$$\frac{p_1}{p_2}\frac{\alpha_1'}{\beta_1'} = \frac{\lg\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\varepsilon\right)}{\lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\varepsilon\right)}. \tag{11}$$

Здесь α_1' и β_1' — производные соответствующих вероятностей по параметру k. Это условие одновременно максимизирует информацию и информативность системы.

Величина $\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}$ имеет простой статический смысл. Известно [8], что

$$\alpha_1 = \int_{k_0}^{\infty} p\left(\frac{y}{x_2}\right) dy;$$

$$\beta_1 = 1 \int_{k_0}^{\infty} p\left(\frac{y}{x_1}\right) dy;$$

отсюда получаем

$$\frac{\alpha_1'}{\beta_1'} = \lambda_0,$$

т. е. это отношение производных является пороговым значением коэффициента правдоподобия (k_0 — оптимальный порог). Для канала с симметричным выходом

$$\frac{\alpha_1'}{\beta_1'} = \frac{p_2}{p_1}, \tag{12}$$

а для полностью симметричного канала

$$\frac{\alpha_1'}{\beta_1'} = 1. \tag{13}$$

Величина, стоящая в правой части (11), по своему характеру является обобщенным коэффициентом правдоподобия на выходе решающего устройства. Учитывая это, условие оптимизации (11) можно рассматривать как требование равенства обобщенных коэффициентов правдоподобия на входе и выходе решающего устройства.

Интересно сопоставить условия получения максимума информации I и минимума риска R. Из уравнения

$$R' = \frac{dR}{dk} = c_1 p_1 \alpha_1' + c_2 p_2 \beta_1' = 0,$$

где c_1 и c_2 — стоимости ошибок, получаем

$$\frac{\alpha_1'}{\beta_2'} = \frac{p_2 c_2}{p_1 c_1}. \tag{14}$$

Следовательно, условия (11) и (14) совпадают при

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\lg\left(\frac{\beta_1}{\beta_2 \varepsilon}\right)}{\lg\left(\frac{\alpha_1 \varepsilon}{\alpha_2}\right)}.$$

В частности, совмещение оптимальных режимов всегда наблюдается при $c_1 = c_2$ и

$$\varepsilon^2 = \frac{\beta_1 \alpha_2}{\alpha_1 \beta_2},$$

которое при $\varepsilon = 1$ принимает предельно простой вид: $\alpha = \beta$.

Объединяя условия максимизации информации по пороговому уровню (11) и априорной вероятности (8), получаем общее условие максимизации

$$\frac{\alpha_1'}{\beta_1'} = \frac{1 - \alpha_1 (1 + \varepsilon)}{1 - \beta_2 (1 + \varepsilon)} \cdot \frac{\lg \frac{\beta_1}{\beta_2 \varepsilon}}{\lg \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \varepsilon}}. \tag{15}$$

При оптимальном пороге цифровая информация меньше отличается от аналоговой, чем при любом другом пороге, поэтому можно утверждать, что в оптимальном режиме цифровая информация, как и аналоговая, достигает максимума приблизительно при равных априорных вероятностях.

Оптимизация по энергии сигнала. В любом случае пороговая энергия сигнала, необходимая для получения заданных вероятностей α и β, является функцией этих вероятностей. Можно, следовательно, написать $q = q(\alpha, \beta)$. С другой стороны, $I = I(\alpha, \beta)$ и $V = V(\alpha, \beta)$. Возникает задача максимизации информативности сигнала

$$V(\alpha, \beta) = \frac{I(\alpha, \beta)}{q(\alpha, \beta)},$$

по энергетическому параметру q. Эта задача решается раздельно для каждого из двух методов статистического анализа — классического и последовательного.

Исследуя на экстремум по параметру q общее выражение (6) для V, получаем общее решение задачи в следующем виде:

$$V_0 = p_1 \lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \varepsilon\right) + p_2 \frac{\beta_2'}{\alpha_1} \lg\left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \varepsilon\right) \tag{16}$$

при

$$q_0 = \frac{I}{V_0}.$$

Исследуя то же выражение на экстремум по параметрам α и β, т. е. составляя выражения

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0,$$

получаем условие экстремума в виде

$$\frac{q'_\alpha}{q_\beta} = \frac{I'_\alpha}{I'_\beta}, \tag{17}$$

где индексы указывают параметр, по которому берется частная производная. В обоих случаях величина q_0 выражена неявно. Однако в конкретных задачах удается достаточно просто найти величину $q_{опт}$ и соответствующую ей максимальную информативность $V_{макс}$, если известна функция $q(\alpha, \beta)$; последняя в явном виде приводится (для некоторых типов сигналов) в работе [6].

Указанным образом решается задача при испытаниях коэффициента правдоподобия на фиксированном интервале времени, т. е. при использовании классического статистического правила решения. Если длительность сигнала (или число испытаний) заранее не фиксируется, что соответствует последовательному статистическому правилу решения, то функция $q(\alpha, \beta)$ всегда может быть получена из соотношения [14, 15]

$$\varphi(q) = \alpha_2 \ln \frac{\beta_1}{\alpha_2} + \alpha_1 \ln \frac{\beta_2}{\alpha_1},$$

$$\varphi(q) = E_x(n)\, E_x(z), \tag{18}$$

где $E_x(n)$ — среднее число испытаний (объем выборки);

$E_x(z)$ — средняя разность информаций для одной выборки.

Сигнал с полностью известными параметрами проще всего обнаруживают при помощи интересующей нас функции

$$q(\alpha, \beta) = 2(\beta_1 \ln \beta_1 + \beta_2 \ln \beta_2 - \beta_2 \ln \alpha_1 - \beta_1 \ln \alpha_2). \tag{19}$$

Приведем теперь примеры практического использования изложенной методики оптимизации информационных показателей по указанным выше параметрам.

Информационный анализ конкретных типов сигналов. Обнаружив полностью известный сигнал, имеем [8]

$$\alpha_1 = 0{,}5 - \Phi(\sqrt{k});$$

$$\beta_1 = 0{,}5 - \Phi(\sqrt{q} - \sqrt{k}),$$

где $\Phi(u)$ — интеграл вероятности;

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

В данном случае величина

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{e^{-\frac{k}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{q} - \sqrt{k})^2}}.$$

При $p_1 = p_2$ и $c_1 = c_2$ условия (14) (11) дают один и тот же результат

$$k_0 = \frac{q}{4}.$$

Подставляя это значение оптимального порога в (8), находим

$$\alpha = \beta.$$

Потенциальная информативность полностью симметричного канала

$$V_{\text{макс}} = \lim_{q \to 0} \frac{1 + \alpha_1 \lg \alpha_1 + \alpha_2 \lg \alpha_2}{0{,}5q},$$

что после раскрытия неопределенности путем двухкратного применения правила Лопиталя приводит к такому результату:

$$V_{\text{макс}} = \frac{1}{2\varkappa \ln 2} \text{ двоичных единиц.}$$

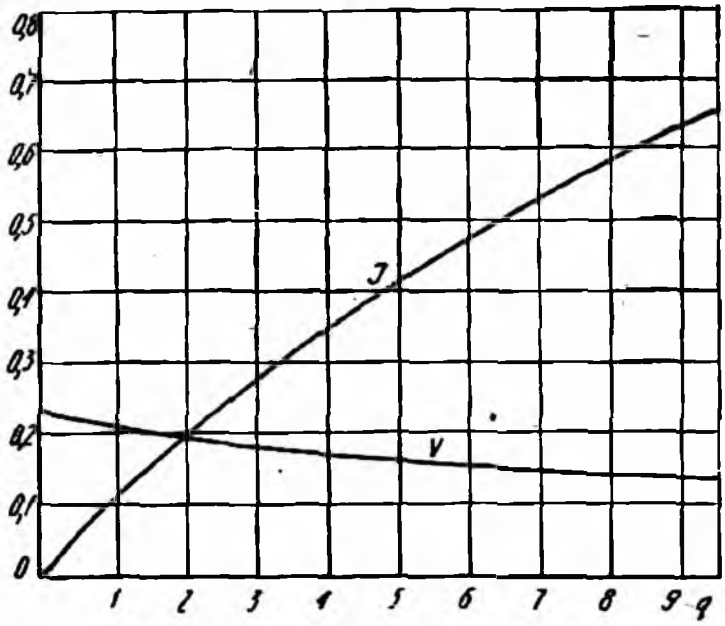


Рис. 1.

На рис. 1 представлены информационные характеристики для симметричного канала, а на рис. 2 — для несимметричного (при $p = 0{,}5$). Из рис. 2 видно, что при $P \to 0$ и $q \to 0$ информативность стремится к теоретическому пределу (0,5 двоичных единиц).

При релеевском распределении амплитуд и равновероятном распределении фаз сигнала для канала обнаружения имеем [8]

$$\alpha_1 = e^{-\frac{k}{2}};$$

$$\beta_1 = 1 - e^{-\frac{\frac{k}{2}}{2\left(1+\frac{q}{2}\right)}},$$

откуда

$$\alpha_1 = \beta_2^{1+\frac{q}{2}}. \qquad (20)$$

Здесь, таким образом,

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_1 \lg \alpha_1}{\beta_2 \lg \beta_2}.$$

Подставляя это соотношение в (11) и (3) и производя вычисления, приходим к следующим результатам: при $q \to 0$ информативность $V \to 0$, при $q \cong 1{,}6$ информативность $V_{\text{макс}} = 0{,}084$. Расчет можно проводить

следующим образом. Пусть, например, $q = 1$ и $p = 0{,}5$, тогда соотношения (11) и (20) удовлетворяются, когда

$$\alpha_1 = 2^{-e} = \frac{\pi^2}{64}; \quad \beta_2 = 2^{-\frac{e}{2}} = \frac{\pi}{8};$$

при этом

$$\lg \alpha_1 = e; \quad \lg \beta_1 = -\frac{e}{2}; \quad \frac{\beta^2}{\alpha_1} = 2^{\frac{e}{2}} = \frac{8}{\pi}; \quad s = e;$$

$$k_0 = 2e \ln 2.$$

Эти данные позволяют подсчитать информацию $I = 0{,}037$ и информативность

$$V_{q=1} = \frac{I}{0{,}5\,q} = 0{,}075.$$

Полные информационные характеристики флуктуирующего сигнала представлены на рис. 3.

Для информационного анализа канала обнаружения на основе метода статистического последовательного анализа составим, пользуясь (3) и (19), исходное выражение для V (при $p = 0{,}5$)

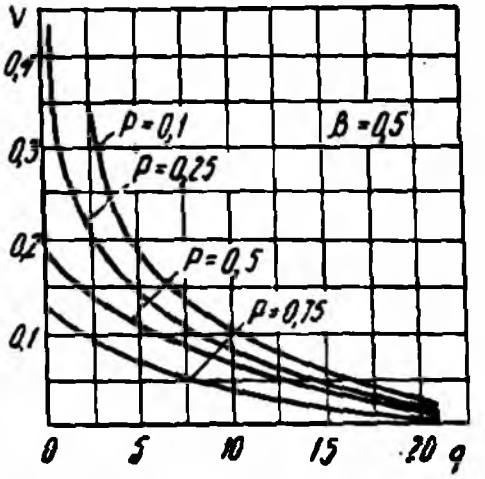


Рис. 2.

$$V = \ln 2 + 0{,}5\,[\alpha_1 \ln \alpha_1 + \beta_1 \ln \beta_1 + \alpha_2 \ln \alpha_2 + \beta_2 \ln \beta_2 -$$

$$- (\alpha_1 + \beta_2) \ln (\alpha_1 + \beta_2) - (\beta_1 + \alpha_1) \ln (\beta_1 + \alpha_2)] \Big/ (\beta_1 \ln \beta_1 + \beta_2 \ln \beta_2 - \beta_1 \ln \alpha_1 - \beta_1 \ln \alpha_2). \qquad (21)$$

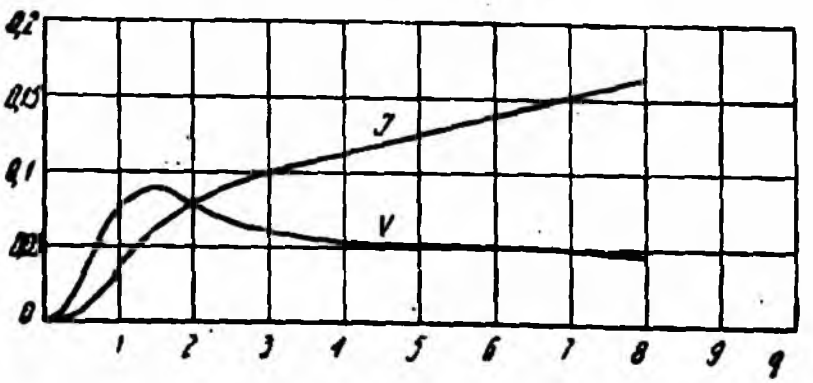


Рис. 3.

Если задана одна из вероятностей ошибок α или β, то из уравнений $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$ или $\frac{\partial V}{\partial \beta} = 0$ находим вторую из этих вероятностей, условно максимизирующую V. Не давая здесь указанных уравнений, отметим, что абсолютный максимум информативности соответствует условию $\alpha = \beta = 0.5$. После двухкратного применения правила Лопиталя получаем $V_{max} = 0{,}25$ натуральных единиц информации.

При оптимальной априорной вероятности, используя (10), вместо (21) получаем

$$V = \frac{\ln (2^{\alpha_1 \beta} - 2^{\beta_1 \alpha} + 2^{\beta_1 \alpha} - \alpha_1 \beta)}{\beta_1 \ln \beta_1 + \beta_2 \ln \beta_2 - \beta_1 \ln \alpha_1 - \beta_1 \ln \alpha_2}.$$

Теперь $V_{макс}$ оказывается равной 0,5 натуральных единиц информации при $\alpha = 0{,}5$ и $\beta = 0{,}5$, что соответствует $p_{опт} \to 0$. Таким образом, метод последовательного статистического анализа позволяет асимптотически (*при* $q \to 0$ *и* $p \to 0$) приблизиться к теоретическому пределу информативности, равному 0,5 натуральных единиц. Поскольку речь идет о цифровой, *а не аналоговой информации, то это означает, что при* рассматриваемом методе потери на преобразование информации стремятся к нулю при $p \to 0$ и $q \to 0$.

ВЫВОДЫ

1. Цифровая информация и информативность произвольного двоичного *сигнала максимизирована по всем параметрам* — априорной вероятности, порогу индикации и энергии сигнала.

2. Получены информационные характеристики *для двоичных сигналов* с полностью известными параметрами и с флуктуирующей амплитудой и фазой. В первом случае потенциальная информативность, достигаемая при $p = 0{,}5$ и $q \to 0$, равна 0,23 двоичных единиц информации. Во втором случае потенциальная информативность, равная 0,084 двоичных единиц, *достигается при* $q = 1{,}6$.

3. Информационный коэффициент полезного действия, определяемый отношением величин цифровой и *аналоговой информации, минимален* при $q \to 0$ и равен (для полностью известного сигнала) отношению натуральной единицы информации к двоичной единице информации, т. е. $\ln 2$, или 69,3%. При флуктуирующих параметрах минимальный к. п. д. понижается. Максимальный информационный к. п. д., равный единице, достигается во всех случаях при $q \to \infty$, когда $V \to 0$

4. При полностью известном сигнале оптимальные пороги квантования для критериев максимума информации и минимума риска совпадают, если цены ошибок обоих родов одинаковы.

5. У флуктуирующих сигналов оптимальные пороги по указанным критериям не совпадают (информационный порог выше), но асимптотически сближаются при $q \to \infty$ (для рассмотренного релеевского сигнала отношение оптимальных порогов при $q = 1$ равно $\frac{2e \ln 2}{4 \ln 2} = \frac{e}{2}$).

6. Потенциальная информативность несимметричных каналов выше, чем у симметричных каналов, в предельном случае в $\pi \ln 2$ раз.

7. Метод последовательного статистического анализа позволяет асимптотически приблизиться к теоретическому максимуму информативности, равному 0,5 натуральных единиц информации, что согласуется с высказанным предположением в работе [9].

8. Оптимизация априорных вероятностей на передающей стороне и порогового уровня на приемной стороне канала передачи информации может рассматриваться как статистическое согласование этого канала соответственно на входе и выходе.

9. *При полном статистическом* согласовании канала передачи, т. е. при выборе оптимальных значений всех параметров p, q, k задание типов сигнала и помехи полностью предопределяет *не только структуру* приемника, но и оптимальные режимы источника информации и решающего устройства.

10. Использование переменных (регулируемых) режимов источника информации и решающего устройства может значительно повысить информационные показатели системы; соответствующие расчеты легко выполняются по приведенным формулам и графикам.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании оптимальных систем передачи информации в устройствах различного назначения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Финк. Теория передачи дискретной информации. Изд-во «Советское радио», 1963.
2. Сб. «Передача цифровой информации» (перевод под ред. С. И. Самойленко). Изд-во иностр. лит-ры, 1963.
3. А. Г. Зюко. Помехоустойчивость и эффективность систем связи. Связьиздат. 1963.
4. Х. М. Виленский. Информация и информативность двоичных сигналов. См. статью настоящего сборника.
5. К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике. Изд-во иностр. лит-ры. 1963.
6. С. Е. Фалькович. Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех. Изд-во «Советское радио», 1961.
7. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков. Выделение сигналов на фоне случайных помех. Изд-во «Советское радио», 1960.
8. Я. Д. Ширман, В. Н. Голиков. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. Изд-во «Советское радио». 1963.
9. Ф. П. Тарасенко. Сравнение методов радиолокационного приема с точки зрения теории информации. Сб. «Радиотехника», вып. 7. Связьиздат, 1959.
10. Ф. П. Тарасенко. Об оптимальном пороге квантования принимаемого сигнала для бинарных систем обнаружения. «Изв. вузов, Радиотехника», № 3. Изд-во Киевск. политехн. ин-та, 1959.
11. Б. А. Варшавер. К теории пропускной способности при бинарной передаче. Сб. «Радиотехника», вып. 1. Связьиздат, 1958.
12. Л. З. Клячкин. Пропускная способность бинарной кодово-импульсной системы при неодинаковых вероятностях искажения символов. Сб. «Радиотехника», вып. 4. Связьиздат, 1958.
13. Д. Ван-Митер, Д. Мидлтон. Современные статистические методы в теории приема сигналов. Сб. «Прием сигналов при наличии шума» (перевод под редакцией Л. С. Гуткина). Изд-во иностр. лит-ры, 1960.
14. А. Е. Башаринов, Б. С. Флейшман. Методы статистического последовательного анализа и их приложения. Изд-во «Советское радио», 1962.
15. Г. Блазбальг. Связь теории последовательного обнаружения с теорией информации и применение ее к обнаружению сигналов в шуме посредством биноминальных испытаний. Сб. «Прием сигналов при наличии шума» (перевод под редакцией Л. С. Гуткина). Изд-во иностр. лит-ры, 1960.