

УДК 519.6:314

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕМОГРАФІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В УКРАЇНІ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЦЬ ЛЕСЛІ

Караєв Е.А., Жила О.В.

e-mail: elmin.karaiev@nure.ua, olha.kuryzheva@nure.ua

Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ВМ
м. Харків, Україна

The paper considers an important aspect of Ukraine's economic development, namely the dynamics of the demographic situation in the country on the basis of real statistical data. To model and evaluate this process, the paper uses a classical model of population dynamics based on Leslie matrices. Mathematical and simulation modelling is implemented in the Maple symbolic computing software package. The result of this work is the obtaining of population dynamics by three age groups and visualization of statistical data.

Матрична модель Леслі є одним із важливих інструментів для аналізу динаміки популяцій в екології, біології та економіці. Її основоположником є американський біолог П. Леслі, який у 1948 запропонував використання матриць у прогнозуванні змін чисельності деякого біологічного виду. Матрична модель Леслі дозволяє моделювати зміну чисельності популяції з часом, враховуючи її вікову структуру та демографічні процеси, такі як народжуваність і смертність. У середовищі програмування та моделювання, таким як Maple, використання матричних моделей дає можливість отримувати точні й ефективні рішення для складних задач, що стосуються популяційних процесів. Матрична модель Леслі побудована на основі рекурентних рівнянь, які описують еволюцію популяції за допомогою вікових класів. Вона використовує матрицю перехідних коефіцієнтів, яка містить параметри народжуваності та смертності для кожного вікового класу. Модель є дискретною, тобто прогнозує популяцію на наступний період часу на основі її поточного стану [1].

Розглянемо спрощену математичну модель Леслі динаміки населення України на основі трьох вікових груп станом на 2020 рік. Перша вікова група включає населення віком від 0 до 14 років, друга вікова група – від 15 до 49 років, третя вікова група – всіх, кому більше 50 років. Матриця Леслі має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 \\ S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де F_2 – середня кількість народжень на одну жінку у віці 15–49 років; F_3 – середня кількість народжень на одну жінку у віці 50+ років (зазвичай дорівнює нулю); S_1 – ймовірність переходу з групи 1 до групи 2; S_2 – ймовірність переходу з групи 2 до групи 3.

За даними Державної служби статистики України, загальний коефіцієнт народжуваності в Україні у 2020 році становив приблизно 1,2 дитини на одну жінку [2]. Припустимо, що вся народжуваність припадає на жінок у віці 15–49 років, тоді $F_2 \approx 7,8$ – коефіцієнт народжуваності із розрахунку 7,8 дітей на 1000 осіб, а $F_3 \approx 0$. За даними ВООЗ, середня ймовірність дожити з народження до 15 років в Україні становить приблизно 0,99 [3]. Ймовірність дожити з 15 до 50 років становить приблизно 0,95 [3]. Таким чином $S_1 \approx 0,99$, а $S_2 \approx 0,95$. Підставляючи відповідні значення у формулу (1), отримаємо матрицю:

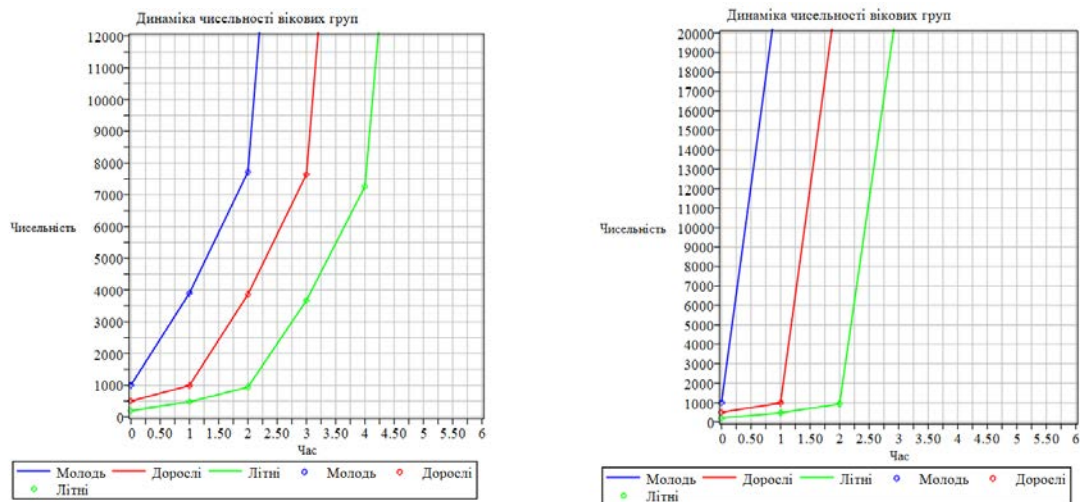
$$\begin{pmatrix} 0 & 7,8 & 0 \\ 0,99 & 0 & 0 \\ 0 & 0,95 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Слід зазначити, що ця матриця є спрощеною моделлю і базується на доступних даних до 2020 року. Реальні демографічні показники можуть суттєво змінитися через поточні події, такі як пандемія, війна, міграція та інші фактори. Для аналізу динаміки населення в Україні згідно параметрів матриці Леслі (2) використовується пакет символічних обчислень Maple (програмна версія 2023 року). Для цього у програмне середовище вводяться всі параметри матриці Леслі, задаються початкові значення для кожної вікової групи. Візуалізація рекурентних обчислень чисельності кожної групи для 6 кроків часу (покоління у контексті популяційних моделей) представлена трьома лінійними графіками, які показують зміни чисельності вікових груп із часом (рис. 1а).

Графік демонструє тенденцію до активного відтворення молодого населення. Оскільки чисельність дорослих осіб залежить від чисельності молодих з попередніх поколінь, то, зазвичай, чисельність дорослих також зростає. Це пов'язано з тим, що молодь добре «виживає» і досягає дорослого віку. Чисельність літніх людей також зростає внаслідок накопичення осіб у цій віковій групі, якщо популяція стабільна або росте. Зменшення чисельності літніх осіб може бути сигналом того, що популяція стикається з високою смертністю серед старших або популяція не відновлюється достатньо швидко через низьку народжуваність.

Спостереження за графіками дає змогу зрозуміти, чи зберігається стабільність популяції населення, чи існують проблеми з відтворенням або

виживаністю. У разі зміни параметрів матриці Леслі (наприклад, збільшення коефіцієнтів народжуваності чи зменшення смертності) може призвести до зміни форм кривих, і можна побачити це на графіках, що допоможе зрозуміти, як зміни в демографічних процесах впливають на чисельність населення. Так, у Нігері зафіксовано найвищий рівень народжуваності у 2020 році, де коефіцієнт народжуваності $F_2 \approx 46,6$ [2]. Динаміка росту населення у Нігері станом на 2020 рік показана на рис.1б.



(а)

(б)

Рисунок 1 – Динаміка чисельності трьох вікових груп населення в Україні (а) та в Нігері (б) станом на 2020 рік

Реалізація матричної моделі Леслі у програмному пакеті Maple дозволяє отримати наочне уявлення про динаміку чисельності різних вікових груп і може допомогти у прийнятті рішень щодо управління популяцією чи екологічними системами. Окрім того, реалізована модель буде корисною у прогнозуванні можливих змін екологічних або економічних умов, що безпосередню впливають на чисельність населення країни.

Список використаних джерел:

1. Ляшенко І. М., Коробова М. В., Горіцина І. А. Моделювання економічних, екологічних і соціальних процесів: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.; Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка. К. : Київський університет, 2010. 319 с.
2. Матеріал з Вікіпедії. Населення Землі. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Населення_Землі.
3. Державна служба статистики України. Народжуваність, смертність та середня очікувана тривалість життя. URL: https://ukrstat.gov.ua/operativ/operativ2020/m_w/arh_nsotj_nas.htm.