УДК 519.615

И. Е. ДОБРИНА

НОВЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА ЗЕЙДЕЛЯ

Актуальность работы. Исследование стационарного движения в динамических системах сводится к решению систем трансцендентных уравнений. Решение их, как и любых других нелинейных уравнений и их систем в общем случае, как известно, возможно только численно и осуществляется практически только итерационными методами, которые не накапливают ошибки вычислений и даже устойчивы к сбоям [1]. Среди этих методов наиболее привлекательным является метод Зейделя, позволяющий получить решение за малое число циклов. Сами вычисления просты, но достаточно сложно найти такую систему, которая была бы эквивалентна исходной системе и одновременно обеспечивала бы сходимость [2]. Для этой цели служат выражения, представляющие условия сходимости. В случае метода Зейделя они огрублены и не отличаются от условий сходимости метода простой итерации, что, видимо, вызвано сложностью получения достаточно простого универсального выражения, применимого для задач различного класса Согласно [3, 4], для таких задач приходится заниматься теоретической и экспериментальной доводкой методов численного решения применительно именно к данному классу, в том числе и корректировкой условий сходимости процесса последовательных приближений, обеспечивающих выбор наиболее оптимальной формы представления уравнений.

Постановка задачи. В случае неавтономных слабонелинейных квазигармонических динамических систем задача нахождения системы, эквивалентной исходной и обеспечивающей сходимость процесса последовательных приближений, несколько упрощается, поскольку их математические модели представляют собой подобные пары нелинейных уравнений специфического вида, описывающих амплитуду и фазу колебаний автогенераторов. Каждая такая пара в общем виде, пригодном для использования метода последовательных приближений, может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} y &= \varphi_1(x, y), \\ x &= \varphi_2(y). \end{aligned} \tag{1}$$

Особенность этой системы состоит в том, что при сведении к одному уравнению существенно ограничивается количество различных форм представления характерных для использования методов последовательного приближения, а следовательно и возможность выбора наиболее оптимальной, обеспечивающей наибольшую область сходимости и минимальное количество циклов приближения. Результирующее выражение довольно часто оказывается очень сложным, что приводит к трудностям при его использовании. В связи с этим представляется целесообразным наряду со сведением системы (1) к одному уравнению, использовать ее в виде двух уравнений и далее. Однако в последнем случае необходимо иметь более точные условия сходимости процесса последовательных приближений.

Решение задачи получения новых условий сходимости метода Зейделя. Таким образом, целью статьи является получение более точного условия сходимости процесса Зейделя, предназначенного для исследования математических моделей различных синхронизированных автогенераторов и их систем в стационарном состоянии, при полиномиальной аппроксимации нелинейных характеристик усилительных элементов.

Тогда имеет место следующая теорема.

Пусть в некоторой области $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ существует одна и только одна пара корней $x = \xi$ и $y = \eta$ системы (1), где функции φ_1 и φ_2 определены и непрерывно дифференцируемы в ней, а начальные приближения и все последующие так же принадлежат этой области. Тогда, если существует правильная дробь q такая, что

$$\left|\frac{d\varphi_1}{dy}+\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dy}\right|\le q<1,$$

то итерационный процесс сходится независимо от выбора начального приближения к корням $x=\xi$ и $y=\eta$ системы (1).

Доказательство. Рассмотрим процесс последовательного приближения на первом цикле. Обозначим начальное значение параметра y как y_0. Подставляя его в уравнения (1), в соответствии с алгоритмом процесса Зейделя, имеем:

$$y_1=\varphi_1(x_1,y_0),$$
$$x_1=\varphi_2(y_0).$$

Учитывая, что $\eta=\varphi_1(\xi,\eta)$, $\xi=\varphi_2(\eta)$, определяем разности

$$\eta-y_1=\varphi_1(\xi,\eta)-\varphi_1(x_1,y_0)=(\frac{d\varphi_1}{dy})p(\eta-y_0)+(\frac{d\varphi_1}{dx})p(\xi-x_1),$$

$$\xi-x_1=\varphi_2(\eta)-\varphi_2(y_0)=(\frac{d\varphi_2}{dy})Q(\eta-y_0).$$

Принимаем во внимание теорему Лагранжа, где P и Q – точки, лежащие на отрезке $a\le x\le b$, $c\le y\le d$. Подставляя второе выражение в первое, получим

$$\eta-y_1=[(\frac{d\varphi_1}{dy})p+(\frac{d\varphi_1}{dx})p(\frac{d\varphi_2}{dy})Q](\eta-y_0).$$

Переходя к оценке абсолютных величин, это выражение можно записать в более компактном виде

$$|\eta-y_1|\le q|\eta-y_0|.$$

Действуя аналогично далее, для второго цикла будем иметь

$$y_2=\varphi_1(x_2,y_1),$$
$$x_2=\varphi_2(y_1).$$

Определяем разности

$$\eta-y_2=\varphi_1(\xi,\eta)-\varphi_1(x_2,y_1)=(\frac{d\varphi_1}{dy})p_1(\eta-y_1)+(\frac{d\varphi_1}{dx})p_1(\xi-x_2),$$

$$\xi-x_2=\varphi_2(\eta)-\varphi_2(y_1)=(\frac{d\varphi_2}{dy})Q_1(\eta-y_1).$$

Подставляя второе выражение в первое, имеем

$$\eta-y_2=[(\frac{d\varphi_1}{dy})p_1+(\frac{d\varphi_1}{dx})p_1(\frac{d\varphi_2}{dy})Q_1](\eta-y_1).$$

Переходим к оценке абсолютных величин.

$$|\eta-y_2|\le q|\eta-y_1|\le q^2|\eta-y_0|.$$

Для n - го цикла можно записать

$$|\eta - y_n| \le q^n |\eta - y_0|.$$

При достаточно большом n левая часть неравенства может быть сделана сколь угодно малой, если $q < 1$, что означает сходимость итерационного процесса.

Теорема доказана, новым условием сходимости является выражение

$$\left| \frac{d\varphi_1}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dy} \right| \le q < 1.$$

Преимущества нового условия сходимости. Оно учитывает конкретные функциональные связи и является более точным, чем существующие выражения. Легко видеть, что новое условие позволяет определить сходимость процесса последовательных приближений там, где существующие аналогичные соотношения дают отрицательный результат. Новое выражение позволяет определить сходимость в целом и тогда, когда сильная сходимость процесса последовательных приближений за счет одного уравнения компенсирует слабую расходимость этого процесса за счет другого уравнения.

Покажем преимущества нового условия сходимости.

Нетрудно заметить, например, что если $|d\varphi_1 / dy| << 1$, $|d\varphi_1 / dx| << 1$, а $|d\varphi_2 / dy| > 1$ и $|d\varphi_1 / dx|| d\varphi_2 / dy| << 1$, то согласно этим условиям процесс последовательного приближения будет сходящимся, в то время как существующие условия сходимости говорят об обратном. Действительно, последние для системы (1) имеют вид

$$\left|\frac{d\varphi_1}{dy}\right| + \left|\frac{d\varphi_2}{dy}\right| < 1, \quad \left|\frac{d\varphi_1}{dx}\right| < 1.$$

Легко видеть, что для выбранных значений производных первое условие не выполняется и согласно этим условиям процесс последовательных приближений является расходящимся.

Пример применения нового условия сходимости для динамической системы одноконтурных автогенераторов. Рассмотрим далее конкретный пример. В случае простейшей динамической системы, состоящей из синхронизированных на основном тоне одноконтурных автогенераторов, уравнения (1) могут быть представлены в виде

$$y = \sqrt[3]{y + B/\alpha \cos\theta}, \qquad \theta = \arcsin[-(\frac{\Delta\omega}{\omega_0})_н y], \tag{2}$$

где $(\frac{\Delta\omega}{\omega_0})_н = (\frac{\Delta\omega}{\omega_0})\frac{2y\alpha}{\varepsilon B}$ – нормированная расстройка, y – безразмерная амплитуда колебаний, θ – фазовый сдвиг сигнала синхронизированного автогенератора относительно сигнала синхронизации, остальные параметры представляют собой постоянные коэффициенты.

Определим производную $d\varphi_2 / dy$. Легко видеть, что при малых сигналах синхронизации, когда амплитуда y мало отличается от единицы, $d\varphi_2 / dy = (tg\theta)/y$. При углах сдвига фазы по модулю более 45^0 значения абсолютной величины тангенса более единицы, и традиционное условие сходимости указывает на расходимость процесса последовательного приближения, хотя на самом деле он сходятся. Таким образом, область сходимости процесса итераций в соответствии с традиционными условиями сходимости составляет приблизительно от -45^0 до $+45^0$.

Для нового условия сходимости вычислим недостающие производные

$$\frac{d\varphi_1}{dy}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(y+B/\alpha\cos\theta)^2}}\approx\frac{1}{3},$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\theta}=\frac{-B/\alpha\sin\theta}{3\sqrt[3]{(y+B/\alpha\cos\theta)^2}}\approx\frac{-B/\alpha\sin\theta}{3}.$$

Приведенные упрощения сделаны на основании специфики функционирования автогенератора в режиме синхронизации, в данном случае заключающейся в том, что при малом сигнале синхронизации $y\approx 1$, поскольку $B/\alpha << 1$, а в полосе синхронизации $-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2$. Тогда новое условие сходимости можно представить в виде

$$\left|\frac{1}{3}(1-\frac{B}{\alpha}\sin\theta tg\theta)\right|<1,$$

которое выполняется, если $1-\frac{B}{\alpha}\sin\theta tg\theta<3$. Оно преобразуется к более простому $\cos^2\theta+c\cos\theta-1<0$, где $c=(2\alpha)/B>>1$. Решая его, получим $\cos\theta>B/(2\alpha)<<1$, т.е. наибольшее абсолютное значение сдвига фазы несколько меньше $\pi/2$, при котором процесс итерации является сходящимся. Если предположить, что $B/\alpha=0,2$, то $\theta\approx\pm 84^0$. Таким образом в соответствии с новым условием сходимости область сходимости процесса итераций составляет от -84^0 до $+84^0$. Расширение области сходимости достигается за счет того, что большие значения производной $d\varphi_2/dy$ при углах сдвига фазы по модулю более 45^0 компенсируются малой производной $d\varphi_1/dx=d\varphi_1/d\theta$. Последнее обстоятельство означает, что расходимость процесса последовательных приближений при абсолютных значениях углов сдвига фазы более 45^0 за счет второго уравнения системы компенсируется более сильной сходимостью, которая обеспечивается первым уравнением.

Выводы. Таким образом, полученное условие сходимости дает возможность более точно определить область сходимости процесса итераций и оптимизировать форму представления исходных уравнений.

Следует также отметить, что ширина области сходимости зависит от величины сигнала синхронизации и уменьшается с увеличением последнего. Практическое применение уравнений (2) показало, что использование данной формы представления позволяет ограничиться двумя, тремя итерациями.

Список литературы: 1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с. 2. *Фадеева В.П.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Гостехстандарт, 1950. 253 с. 3. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 604 с. 4. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1973. 631 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 21.01.2003