

УДК 621.372

ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В НАПРАВЛЯЮЩИХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ЧАСТЬ I. ДИСКРЕТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

А.В. ГРИЦУНОВ

Рассмотрены методы расчета нестационарных немонохроматических полей в электродинамических системах (ЭС). Показано, что данный метод может быть использован для разработки спектральных моделей СВЧ-приборов. Дискретное приближение ЭС базируется на разложении поля на нормальные или парциальные собственные моды.

The methods of calculation of unsteady non-monochromatic fields in delay lines are described. It is shown that this method can be used for developing the spectral models of microwave tubes. The discrete approximation of the delay lines is founded on expansion of the field on normal or partial eigenmodes.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема теоретического анализа спектров высокочастотных сигналов в СВЧ-приборах приобретает все большую актуальность. В числе причин можно упомянуть необходимость обеспечения электромагнитной совместимости радиоэлектронных устройств, создание высокоскоростных цифровых телекоммуникационных систем с оконечными усилителями на лампах бегущей волны (ЛБВ) и другие [1]. Традиционный метод моделирования негармонических процессов в СВЧ-электронике (так называемый многочастотный подход) не обеспечивает надлежащего решения указанной проблемы [2]. Спектр сигнала в таких моделях всегда дискретный, частоты учитываемых гармоник должны быть определены заранее, а увеличение их числа сопряжено с дополнительными затратами вычислительных ресурсов.

В [2] описаны принципы так называемого спектрального подхода к моделированию СВЧ-приборов. Он заключается в трансформации путем обратного преобразования Фурье заданного в частотной области входного ВЧ-сигнала во временную область и использовании его затем как граничного условия нестационарной модели. После моделирования прохождения синтезированной таким образом электромагнитной волны через направляющую электродинамическую систему (ЭС) с учетом ее нелинейного взаимодействия с электронным потоком временная выборка ВЧ-сигнала на выходе ЭС, наряду с другими выходными параметрами (например, токами электродов), подвергается спектральному анализу для перевода ее обратно в частотную область.

Спектральная модель нелинейной системы, состоящей из электронного потока и ЭС, определяется как *нестационарная модель, корректно учитывающая вза-*

имодействие между всеми временными гармониками электромагнитного поля ЭС и электронным потоком в континууме частот, объединенная с алгоритмами спектрального синтеза входных сигналов и спектрального анализа выходных параметров.

Спектральные модели делятся на четыре уровня. К нулевому уровню относятся алгоритмы, основанные на решении уравнений Максвелла сеточными методами. Эти модели используют минимум физических приближений, но сопряжены с трудностями при задании граничных условий в реальных приборах. Простейшая реализация такого подхода описана, например, в [3].

Модели первого уровня основаны на методе разделения перемешанных, т.е. нахождении решения уравнений Максвелла в виде суперпозиции произведений функций координат (собственных видов колебаний ЭС) на функции времени и, возможно, продольной координаты (мгновенные значения видов). Для краткости, вместо термина «собственный вид колебаний» (eigenmode) в дальнейшем используется эквивалентный ему термин «мода». В конкретной конструкции прибора моды рассчитываются однократно, а на каждом временном шаге вычисляются лишь их мгновенные значения путем решения уравнения возбуждения. Результаты моделирования выходного спектра магнетрона этим методом приведены, например, в [4].

Модели второго уровня отличаются от предыдущих тем, что мгновенные значения мод рассматриваются как суммы нескольких узкополосных компонентов и уравнение возбуждения решается для комплексной огибающей каждой из них. Пример использования такого подхода дан в [2].

Модели третьего уровня основаны на рассмотрении СВЧ-прибора как активного нелинейного четырехполюсника, передаточная характеристика которо-

го определяется, исходя из неких упрощенных предположений относительно поведения электронного потока (так называемый аналитический подход) [5].

Под вышеприведенную классификацию не подходят алгоритмы, в которых СВЧ-прибор рассматривается как система с «ограниченной» нелинейностью электронного потока (например, квадратичной). Такие модели являются стационарными, и входной спектр непосредственно преобразуется в спектр выходного сигнала (без перехода во временную область). Алгоритм моделирования базируется на решении кинетического уравнения и уравнений Максвелла в частотной области. Подобной работой является [6]. Несмотря на внешнюю привлекательность, эти модели не столь универсальны, как предложенные в [2], поскольку начальные и граничные условия, определяющие во многих случаях нелинейность прибора, всегда задаются во временной и пространственной областях.

Из определения спектральной модели следует, что основными задачами при реализации спектрального подхода являются нестационарное моделирование прохождения немонохроматических сигналов через ЭС с учетом их нелинейного взаимодействия с электронным потоком, а также спектральный анализ выходных параметров прибора, определенных на временных выборках ограниченной длины. Возможные способы решения второй из вышеуказанных задач описаны в [7].

В настоящей статье рассматривается методика моделирования возбуждения в ЭС электронными потоками нестационарных негармонических электромагнитных полей, предназначенная для использования в спектральных моделях первого и второго уровней.

1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Основные ограничения и приближения, принятые в данной работе, состоят в следующем. Используется декартова система координат. Под ЭС понимается неограниченная или ограниченная в продольном (z) направлении закрытая односвязная линия передачи с однородными граничными условиями в каждом поперечном (x, y) ее сечении. Под продольным понимается направление, коллинеарное оси данной линии, под поперечными – направления, перпендикулярные ей. ЭС может быть регулярной (продольно-однородной, или периодической) либо нерегулярной (продольно-неоднородной). Реальным эквивалентом неограниченной ЭС можно считать согласованную с обоих концов во всей рассматриваемой полосе частот ограниченную линию передачи. Под замыканием в кольцо ЭС далее понимается приравнивание значений электромагнитного поля в двух различных ее поперечных сечениях.

Для описания электромагнитного поля в ЭС введем понятия обобщенного потенциала $\mathcal{A}(t, x, y, z)$ и обобщенной плотности тока $j(t, x, y, z)$. Это родовые (generic) обозначения, фигурирующие в уравнениях, вместо которых должны подставляться конкретные физические величины или символы. Вместо $\mathcal{A}$ подставляются значения $\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \phi$ или $\vec{A}$; вместо j –

$\rho / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ или $\vec{j}$ соответственно. Здесь $\phi(t, x, y, z)$ и $\vec{A}(t, x, y, z)$ – скалярный и векторный потенциалы в калибровке Лоренца $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial \phi / \partial t = 0$; $\rho(t, x, y, z)$ и $\vec{j}(t, x, y, z)$ – плотность объемного заряда и плотность тока; ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные соответственно. Введение родовых обозначений является компромиссом, позволяющим, с одной стороны, избежать дублирования последующих уравнений отдельно для скалярного и векторного потенциалов, с другой – не применять без необходимости релятивистские четырехвекторные величины (см. далее). Обобщенный потенциал ЭС является решением неоднородного волнового уравнения

$$\nabla^2 \mathcal{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 j \quad (1)$$

с однородными граничными условиями. Напряженность электрического $\vec{E}(t, x, y, z)$ и индукция магнитного $\vec{B}(t, x, y, z)$ полей могут быть получены из него как $\vec{E} = -\partial \vec{A} / \partial t - \vec{\nabla} \phi$; $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Методы конечных разностей (FDTD) и конечных элементов (FETD) во временной области, используемые в спектральных моделях нулевого уровня, наиболее подходят для решения уравнения (1), но требуют большого объема вычислений при расчете реальных приборов со сложной геометрией электродов. Поскольку электронный поток, диэлектрические и поглощающие элементы обычно занимают лишь малую часть внутреннего пространства электровакуумного прибора, эффективным здесь может оказаться метод разделения переменных. Функция $\mathcal{A}(t, x, y, z)$ находится в виде суммы произведений функций координат (мод ЭС) $\mathcal{A}_\emptyset(x, y, z)$ на функции времени и, возможно, продольной координаты (мгновенные значения этих мод) $u_\emptyset(t)$ или $u_\emptyset(t, z)$. Здесь и далее $\emptyset$ – родовое обозначение, вместо которого следует подставлять индекс « r » (normal), « p » (partial) или « g » (regular) для нормальных, парциальных и регулярных мод соответственно. Функции $\mathcal{A}_\emptyset$ рассчитываются однократно для «пустой», т. е. заполненной вакуумом ЭС, и запоминаются в пределах областей, занимаемых в последующем электронным потоком, диэлектриком или поглощающим материалом. Функции $u_\emptyset$ вычисляются на каждом временном шаге путем решения уравнения возбуждения. В спектральных моделях первого уровня это уравнение записывается непосредственно для мгновенных значений мод, в моделях второго уровня – для комплексных огибающих узкополосных составляющих во временном или частотном и «продольном» спектре этих мгновенных значений.

При расчете функций $\mathcal{A}_\emptyset$ предполагается, что пространственное распределение поля в объеме пустой реальной ЭС, исключая скин-слой стенок, такое же, как в системе аналогичной геометрии, но с бесконечно проводящими границами (так называемая идеализированная ЭС). Волновые числа мод реальной и идеализированной ЭС предполагаются одинаковыми. Учет

джоулевых токов в скин-слое реальной ЭС, вызывающих экспоненциальное затухание во времени свободных колебаний, осуществляется путем добавления в уравнение возбуждения членов, содержащих коэффициенты затухания. Для каждой моды эти коэффициенты считаются не зависящими от частоты, на которой возбуждается данная мода.

Учет наличия диэлектрических и диссипативных элементов в объеме ЭС (например, поддержек спирали и поглощающих вставок в ЛБВ) при спектральном моделировании целесообразно осуществлять не в терминах частотно-зависимой комплексной диэлектрической проницаемости вещества, а с помощью векторов поляризации и тока проводимости [8], добавленных в правую часть (1). Таким образом, функция $j(t, x, y, z)$ учитывает наличие электронного потока, элементов связи ЭС с внешними цепями, поляризации и проводимости диэлектрических и поглощающих вставок, но не учитывает джоулевых токов в скин-слое металлических границ реальной ЭС. Это позволяет раскладывать поле ЭС с произвольным заполнением по базису мод, вычисленному для ее вакуумного заполнения.

Так как разложение поля в моды неоднозначно, возможны различные приближения ЭС. В первой части работы рассматривается дискретное приближение.

2. НОРМАЛЬНЫЕ И ПАРЦИАЛЬНЫЕ МОДЫ ЭС

Дискретное приближение ЭС основано на декомпозиции обобщенного потенциала в вектор нормальных $\mathbf{A}_{nq}(x, y, z)$ или парциальных $\mathbf{A}_{pq}(x, y, z)$ мод. Тот и другой определяются отдельно для каждого учитываемого типа волны (полосы пропускания) ЭС $q = 0, 1, 2, \dots$ и являются нетривиальными вещественными решениями матричного уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{\varnothing q}(x, y, z) + [k_{\varnothing q}^2] \mathbf{A}_{\varnothing q}(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

в объеме ЭС с однородными граничными условиями. Поскольку анализируемая полоса частот конечна, длина обоих векторов N и количество учитываемых типов волн ограничены. Здесь $[k_{\varnothing q}^2]$ – вещественная матрица квадратов волновых чисел мод размером $N \times N$ (для нормальных мод имеющая диагональную форму и содержащая квадраты собственных волновых чисел). Размерность функций $\mathbf{A}_{\varnothing q}$ равна В·с/м. Решение уравнения (1) находится как ряд в гильбертовом функциональном пространстве мод L_2 (для нормальных мод это ряд Фурье) с безразмерными коэффициентами в виде произвольных функций времени:

$$\mathbf{A}(t, x, y, z) = \sum_q \mathbf{A}_{\varnothing q}(x, y, z) \mathbf{u}_{\varnothing q}(t), \quad (3)$$

где $\mathbf{u}_{\varnothing q}$ – вещественный вектор N мгновенных значений мод для q -го типа волны.

Векторы нормальных и парциальных мод по определению связаны между собой соотношениями:

$$\mathbf{A}_{nq}(x, y, z) = [F] \mathbf{A}_{pq}(x, y, z); \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_{pq}(x, y, z) = [F]^{-1} \mathbf{A}_{nq}(x, y, z), \quad (5)$$

где $[F]$ – вещественная матрица коэффициентов формы нормальных мод размером $N \times N$ [9]. В отличие от систем с сосредоточенными параметрами, для ЭС матрица $[F]$ не определяется конструкцией системы, а задается априори и может быть, вообще говоря, произвольной невырожденной. Однако интерес представляют только матрицы, обеспечивающие локализацию в продольном направлении всех парциальных мод (т.е. достаточно быстрое ослабление поля каждой моды при удалении в обе стороны от ее максимума). Например, для замкнутой в кольцо ЭС и четного N таковой является матрица:

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \cos \Delta \varphi_1 & \cos 2\Delta \varphi_1 & \dots & \cos(N-1)\Delta \varphi_1 \\ 1 & \cos \Delta \varphi_2 & \cos 2\Delta \varphi_2 & \dots & \cos(N-1)\Delta \varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \sin \Delta \varphi_2 & \sin 2\Delta \varphi_2 & \dots & \sin(N-1)\Delta \varphi_2 \\ 0 & \sin \Delta \varphi_1 & \sin 2\Delta \varphi_1 & \dots & \sin(N-1)\Delta \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\Delta \varphi_m = 2\pi m / N$ – изменение фазы m -й нормальной моды ($m = 0, 1, \dots, N/2$) между двумя соседними парциальными модами. Расположение нормальных мод в векторе $\mathbf{A}_{nq}$ должно быть таким, чтобы продольная зависимость скалярного потенциала или продольной составляющей векторного потенциала каждой моды как можно лучше «повторяла» соответствующую строку матрицы $[F]$. При этом для прямой волны модули волновых чисел мод будут увеличиваться, а для обратной – уменьшаться от концов к середине вектора. В ЭС с иными граничными условиями по координате z матрица $[F]$ легко может быть построена, исходя из физических соображений. Очевидно, что (4) и (5) являются взаимными линейными преобразованиями функциональных пространств нормальных и парциальных мод.

С физической точки зрения, n -ю парциальную моду ($n = 0, 1, \dots, N-1$) можно трактовать как «сгусток» электромагнитного поля, колеблющегося в одинаковой фазе $\varphi_n = n\Delta \varphi_m$ (предполагается, что возбуждена только m -я нормальная мода). Поскольку $\Delta \varphi_m$ – постоянная величина, независимо от того, регулярна ЭС или нет, в отличие от [10] поля парциальных мод замедляющей системы могут быть пространственно не связаны с ее ячейками, например, если ЭС не периодична, либо N не равно общему числу ячеек. После определения парциальных мод как (5) к ним можно применить теорию колебательных систем со многими степенями свободы [9], полагая, что вектор $\mathbf{u}_{pq}$ содержит N независимых координат для каждого типа волны. Например, подставляя (4) или (5) в (3) и (2), получаем соотношения:

$$\mathbf{u}_{rq}(t) = [F]^{-1T} \mathbf{u}_{pq}(t); \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_{pq}(t) = [F]^T \mathbf{u}_{rq}(t); \quad (8)$$

$$[k_{rq}^2] = [F][k_{pq}^2][F]^{-1}; \quad (9)$$

$$[k_{pq}^2] = [F]^{-1}[k_{rq}^2][F]. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что матрицы $[k_{rq}^2]$ и $[k_{pq}^2]$ связаны между собой преобразованиями подобия ($[F]$ – преобразующая матрица), соответствующими вышеуказанным линейным преобразованиям функциональных пространств мод. Собственные значения обеих матриц (т. е. квадраты волновых чисел нормальных мод ЭС) при этом, естественно, равны.

Условия ортогональности нормальных и парциальных мод могут быть выведены из уравнений Максвелла с учетом (4). Они имеют вид:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Delta z} dz \int_{S_{\perp}} dx dy (\mathcal{A}_{\oslash q}) (\mathcal{A}_{\oslash q'})^T = \begin{cases} 0 & \text{для } q' \neq q; \\ [\tilde{W}_{\oslash q}] & \text{для } q' = q, \end{cases} \quad (11)$$

где $(\mathcal{A}_{\oslash q})$ – столбец, полученный из вектора N соответствующих мод; $[\tilde{W}_{\oslash q}]$ – вещественная матрица так называемых псевдоэнергий (норм) мод размером $N \times N$; Δz – длина ЭС; $S_{\perp}$ – ее поперечное сечение.

Название «псевдоэнергия» объясняется тем, что эта величина (с размерностью Дж·с²) определяется для обобщенного потенциала по формуле, аналогичной выражению для энергии электрического поля. Матрица псевдоэнергий нормальных мод имеет диагональную форму, обе матрицы связаны между собой преобразованиями конгруэнтности:

$$[\tilde{W}_{rq}] = [F][\tilde{W}_{pq}][F]^T; \quad (12)$$

$$[\tilde{W}_{pq}] = [F]^{-1}[\tilde{W}_{rq}][F]^{-1T}. \quad (13)$$

Возможны две различные нормировки мод: амплитудная (когда, например, модуль каждого элемента вектора $\mathcal{A}_{rq}$ в точке его максимума или в некоторой фиксированной точке равен 1 В·с/м) и энергетическая (когда нулевой и $N/2$ -й элементы на диагонали матрицы $[\tilde{W}_{rq}]$ равны 1 Дж·с², а остальные ее диагональные элементы равны 0,5 Дж·с²). Хотя энергетическая нормировка приводит к более простым уравнениям возбуждения, поскольку матрица $[\tilde{W}_{pq}]$ в этом случае также является диагональной (т. е. парциальные моды ортогональны), далее будет использована амплитудная нормировка как более наглядная и универсальная.

Несмотря на то, что парциальные моды даже в случае их ортогональности связаны между собой в пределах одного типа волны уравнением (2), достоинство их –

вышеупомянутая продольная локализация, лучше согласующаяся с физической концепцией «близкодействия», чем в случае нормальных мод, энергия которых более или менее равномерно распределена по всей длине ЭС. Поскольку основная часть энергии поля каждой парциальной моды сосредоточена в небольшой части объема ЭС длиной порядка $\Delta z/N$, можно с незначительной погрешностью игнорировать непосредственное взаимодействие парциальных мод, как между собой, так и с электронным потоком, вдали от мест локализации этих мод. С точки зрения локализации, парциальные моды напоминают вейвлеты [11], однако на этом сходство между ними заканчивается. Парциальные моды являются линейными комбинациями собственных функций линейной колебательной системы, в то время как вейвлеты, будучи «искусственными» функциями, таким свойством не обладают. Кроме того, имеется ряд отличий по формальным признакам (например, парциальные моды могут быть не ортогональны между собой, если не использована энергетическая нормировка, интегралы от них по области определения не равны нулю и т. д.).

Продольная локализация парциальных мод обеспечивает некоторые преимущества при разработке спектральных моделей. В частности, для приборов бегущей волны (с согласованной на концах ЭС) спектр нормальных мод является континуальным, следовательно, ряд (3) к этим модам неприменим. Множество же парциальных мод по-прежнему дискретно. При этом структуры поля N нормальных мод (с целыми m) для каждого q синтезируются выражением (4) точно. Остальные нормальные моды интерполируются с некоторой погрешностью, уменьшающейся при увеличении N .

Разложение поля ЭС в «парциальные колебания» является альтернативой известной бриллюэновской концепции «парциальных волн» в волноводе. Помимо спектрального моделирования, оно может быть полезно для анализа приборов с нерегулярными ЭС, поскольку пространственная структура и электродинамические параметры каждой парциальной моды определяются свойствами лишь ограниченного участка ЭС вблизи места локализации данной моды.

Дискретное уравнение возбуждения для вектора $\mathbf{u}_{\oslash q}$ может быть получено путем подстановки (2) и (3) в (1) с учетом (11). Оно имеет вид:

$$\frac{d^2 \mathbf{u}_{\oslash q}}{dt^2} + 2[\delta_{\oslash q}] \frac{d\mathbf{u}_{\oslash q}}{dt} + [\omega_{\oslash q}^2] \mathbf{u}_{\oslash q} = \frac{1}{2} [\tilde{W}_{\oslash q}]^{-1} \int_{\Delta z} dz \int_{S_{\perp}} dx dy \mathcal{A}_{\oslash q}(x, y, z) j(t, x, y, z), \quad (14)$$

где $[\omega_{\oslash q}^2] = [k_{\oslash q}^2]/\varepsilon_0 \mu_0$ – вещественная матрица квадратов частот мод (для нормальных мод это квадраты собственных частот); $[\delta_{\oslash q}]$ – аналогичная ей по размеру вещественная матрица коэффициентов затуха-

ния мод, вызванного потерями в скин-слое металлических стенок. Матрица $[\delta_{rq}]$ предполагается диагональной, т.е. связь нормальных мод посредством токов в скин-слое не учитывается.

Подставляя (7) или (8) в аналогичное (14) однородное уравнение, находим, что матрицы коэффициентов затухания связаны преобразованиями подобия:

$$[\delta_{rq}] = [F][\delta_{pq}][F]^{-1}; \quad (15)$$

$$[\delta_{pq}] = [F]^{-1}[\delta_{rq}][F]. \quad (16)$$

В принятом предположении о структуре поля ЭС матрицы $[k_{\varnothing q}^2]$, $[\omega_{\varnothing q}^2]$, $[\delta_{\varnothing q}]$ и $[\tilde{W}_{\varnothing q}]$ являются симметрическими.

Для замкнутых в кольцо регулярных ЭС нормальные моды двукратно вырождены, поэтому их целесообразно рассматривать как комплексные. Матрица коэффициентов формы при этом имеет вид:

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i\Delta\varphi_1} & e^{-2i\Delta\varphi_1} & \dots & e^{-(N-1)i\Delta\varphi_1} \\ 1 & e^{-i\Delta\varphi_2} & e^{-2i\Delta\varphi_2} & \dots & e^{-(N-1)i\Delta\varphi_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-i\Delta\varphi_{N-1}} & e^{-2i\Delta\varphi_{N-1}} & \dots & e^{-(N-1)i\Delta\varphi_{N-1}} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Нормальные моды в первой половине вектора $\mathcal{A}_{rq}$ располагаются в порядке возрастания (для прямой волны) или убывания (для обратной) модулей их волновых чисел, а во второй половине – таким образом, что $\mathcal{A}_{rqN-m} = \mathcal{A}_{rqm}^*$ ($m = 1, 2, \dots, N/2$). Из (3) следует, что вектор $\mathbf{u}_{rq}$ теперь комплексный и $u_{rqN-m} = u_{rqm}^*$.

Выражения (4) и (5), (8) и (7) становятся прямыми и обратным дискретными преобразованиями Фурье соответственно:

$$\mathcal{A}_{rqm}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{A}_{pqn}(x, y, z) \exp\left(-i \frac{2\pi mn}{N}\right); \quad (18)$$

$$\mathcal{A}_{pqn}(x, y, z) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{A}_{rqm}(x, y, z) \exp\left(i \frac{2\pi nm}{N}\right); \quad (19)$$

$$u_{rqm}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_{pqn}(t) \exp\left(i \frac{2\pi mn}{N}\right); \quad (20)$$

$$u_{pqn}(t) = \sum_{m=0}^{N-1} u_{rqm}(t) \exp\left(-i \frac{2\pi nm}{N}\right). \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что векторы парциальных мод и их мгновенных значений остаются вещественными. Матрицы $[k_{\varnothing q}^2]$, $[\omega_{\varnothing q}^2]$, $[\delta_{\varnothing q}]$ и $[\tilde{W}_{\varnothing q}]$ также остаются вещественными и симметрическими. Кроме того, все элементы на главной и всех параллельных ей диагоналях любой из этих матриц для $\varnothing = \langle p \rangle$ теперь равны между собой. Переиндексируем элементы указанных матриц согласно следующим шаблонам. Для нормальных мод:

$$[k_{rq}^2] = \begin{pmatrix} k_{rq0}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_{rq1}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{rq2}^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{rqN-2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{rqN-1}^2 \end{pmatrix}; \quad (22)$$

для парциальных мод:

$$[k_{pq}^2] = \begin{pmatrix} k_{pq0}^2 & k_{pq1}^2 & k_{pq2}^2 & \dots & k_{pqN-2}^2 & k_{pqN-1}^2 \\ k_{pqN-1}^2 & k_{pq0}^2 & k_{pq1}^2 & \dots & k_{pqN-3}^2 & k_{pqN-2}^2 \\ k_{pqN-2}^2 & k_{pqN-1}^2 & k_{pq0}^2 & \dots & k_{pqN-4}^2 & k_{pqN-3}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{pq2}^2 & k_{pq3}^2 & k_{pq4}^2 & \dots & k_{pq0}^2 & k_{pq1}^2 \\ k_{pq1}^2 & k_{pq2}^2 & k_{pq3}^2 & \dots & k_{pqN-1}^2 & k_{pq0}^2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

После этого соотношения (9) и (10), (15) и (16), (12) и (13) также можно записать в виде дискретных преобразований Фурье:

$$k_{rqm}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} k_{pqn}^2 \exp\left(i \frac{2\pi mn}{N}\right); \quad (24)$$

$$k_{pqn}^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} k_{rqm}^2 \exp\left(-i \frac{2\pi nm}{N}\right); \quad (25)$$

$$\delta_{rqm} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{pqn} \exp\left(i \frac{2\pi mn}{N}\right); \quad (26)$$

$$\delta_{pqn} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \delta_{rqm} \exp\left(-i \frac{2\pi nm}{N}\right); \quad (27)$$

$$\tilde{W}_{rqm} = N \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{W}_{pqn} \exp\left(-i \frac{2\pi mn}{N}\right); \quad (28)$$

$$\tilde{W}_{pqn} = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{W}_{rqm} \exp\left(i \frac{2\pi nm}{N}\right). \quad (29)$$

Здесь учтено, что для комплексной матрицы $[F]$ матрицы псевдоэнергий нормальных и парциальных мод являются соединенными:

$$[\tilde{W}_{rq}] = [F][\tilde{W}_{pq}][F]^*; \quad (30)$$

$$[\tilde{W}_{pq}] = [F]^{-1}[\tilde{W}_{rq}][F]^{-1*}, \quad (31)$$

а условие ортогональности нормальных мод записывается следующим образом:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Delta Z} dz \int_{S_{\perp}} dx dy \mathcal{A}_{rqm} \mathcal{A}_{rq'm'}^* = \begin{cases} 0 & \text{для } q' \neq q \text{ или } m' \neq m; \\ \tilde{W}_{rqm} & \text{для } q' = q \text{ и } m' = m. \end{cases} \quad (32)$$

В правой части уравнения (14) вместо вектора $\mathcal{A}_{rq}$ должно использоваться его комплексно-сопряженное значение.

В спектральных моделях второго уровня вектор мгновенных значений нормальных или парциальных мод записывается, например, как

$$\mathbf{u}_{\varnothing q}(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{U}_{\varnothing q}(t)\exp i\omega_{qb}t\}, \quad (33)$$

а обобщенная плотность тока – как

$$j(t, x, y, z) = \operatorname{Re}\{\tilde{J}_q(t, x, y, z)\exp i\omega_{qb}t\}, \quad (34)$$

где ω_{qb} – базовая частота для q -го типа волны; $\mathbf{U}_{\varnothing q}$ – вектор комплексных огибающих временных зависимостей мод на частоте ω_{qb} ; $\tilde{J}_q$ – комплексная огибающая обобщенной плотности тока на той же частоте.

Подставляя (33) и (34) в (3) и (14), получаем выражение для обобщенного потенциала:

$$\mathcal{A}(t, x, y, z) = \operatorname{Re}\left\{\sum_q \mathfrak{A}_{\varnothing q} \mathbf{U}_{\varnothing q} \exp i\omega_{qb}t\right\} \quad (35)$$

и уравнение возбуждения для вектора $\mathbf{U}_{\varnothing q}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{U}_{\varnothing q}}{dt^2} + 2(i\omega_{qb} + [\delta_{\varnothing q}]) \frac{d\mathbf{U}_{\varnothing q}}{dt} + \\ + 2\omega_{qb}([\Omega_{\varnothing q}] + i[\delta_{\varnothing q}])\mathbf{U}_{\varnothing q} = \\ = \frac{1}{2}[\tilde{W}_{\varnothing q}]^{-1} \int_{\Delta Z} dz \int_{S_1} dx dy \mathfrak{A}_{\varnothing q}^*(x, y, z) \tilde{J}_q(t, x, y, z), \end{aligned} \quad (36)$$

где $[\Omega_{\varnothing q}] = ([\omega_{\varnothing q}^2] - [I]\omega_{qb}^2)/2\omega_{qb}$, $[I]$ – единичная матрица размером $N \times N$. В ограниченной в продольном направлении ЭС базовую частоту для каждого типа волны целесообразно выбирать равной собственной частоте одной из нормальных мод ω_{rqm} . В этом случае соответствующий диагональный элемент матрицы $[\Omega_{rq}]$ равен нулю.

Если вектор $\mathbf{u}_{\varnothing q}$ является узкополосным (т.е. $|\Omega_{\max}| \ll \omega_{qb}$, где $\Omega_{\max}$ – максимальная частота в спектре вектора $\mathbf{U}_{\varnothing q}$), уравнение (36) можно приближенно переписать в упрощенном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}_{\varnothing q}}{dt} + [\delta_{\varnothing q}]\mathbf{U}_{\varnothing q} - i[\Omega_{\varnothing q}]\mathbf{U}_{\varnothing q} = \\ = -\frac{i}{4\omega_{qb}}[\tilde{W}_{\varnothing q}]^{-1} \int_{\Delta Z} dz \int_{S_1} dx dy \mathfrak{A}_{\varnothing q}^* \tilde{J}_q. \end{aligned} \quad (37)$$

Алгоритмы фильтрации комплексной огибающей обобщенного тока, с помощью детерминированных параметрических моделей позволяющие обеспечить узкополосность функции $\mathbf{u}_{\varnothing q}$, описаны в [12].

Учитывая широкополосность дискретного приближения ЭС, нетрудно видеть, что использование метода комплексных амплитуд здесь не дает существенных преимуществ. Поэтому дискретный подход целесообразно применять в спектральных моделях первого уровня.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ПАРЦИАЛЬНЫХ МОД

Парциальные моды менее абстрактны для регулярных ЭС в виде цепочек связанных резонаторов, где они

существенно связаны с полями отдельных ячеек (если в качестве величины N выбрано общее количество резонаторов ЭС). В качестве примера на рис. 1, а и б изображены соответственно y - и z -составляющие векторного потенциала нулевой ($n = 0$) парциальной моды в полосе пропускания LE_0 ($q = 0$) однородной гребенчатой замедляющей системы как функции координат (y, z) . Они получены по формуле (19) из вычисленных аналитически по соотношениям работы [13] нормальных 0-, $\pi/4$ -, $\pi/2$ -, $3\pi/4$ - и π -мод, распределенных гипотетически равномерно с интервалом 1 ГГц в полосе пропускания ЭС от 1 до 5 ГГц (нижняя граница выбрана условно). Исходные данные системы следующие: период 6 мм; толщина ламели 3 мм; глубина щели 15 мм; расстояние между торцами ламелей и противоположным электродом (высота пространства взаимодействия) 7,5 мм. Используется амплитудная нормировка ($A_{rqmz} \equiv 1$ В · с/м между торцами ламелей).

Из рисунка видно, что помимо нулевой полости и прилегающей к ней части пространства взаимодействия, несколько соседних щелей также содержат некое электромагнитное поле (это лучше видно на рис. 1, в,

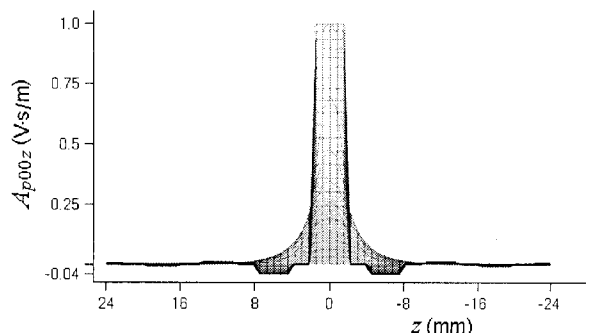
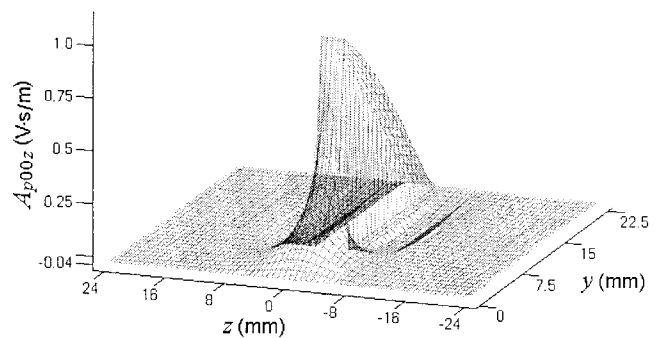
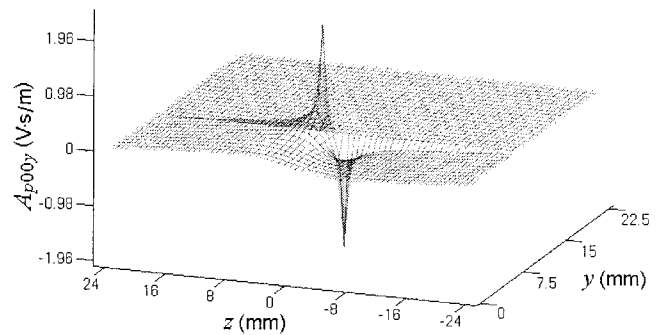


Рис. 1

где z -составляющая векторного потенциала показана в иной проекции). Данное явление не может быть объяснено физически, поскольку поле нулевой щели практически не проникает в зазоры между другими ламелями. Поля в соседних щелях являются лишь неотъемлемыми составными частями парциальной моды нулевой полости, осуществляющими частотное изменение структуры поля в зазоре, когда нормальные моды ЭС синтезируются как суперпозиции парциальных мод с различными значениями $\Delta\varphi_m$. Пространство взаимодействия на рис. 1 также содержит подобные «добавки», которые не видны в масштабе рисунка. Тем не менее, они могут быть более существенными для менее «квазистатичных» ЭС, наподобие спиральной или лестничной замедляющей системы. Предельным случаем является продольно-однородная ЭС.

На рис. 2, а и б показаны соответственно r - и z -составляющие векторного потенциала нулевой ($n = 0$) парциальной моды для волны E_{01} ($q = 0$) регулярного цилиндрического волновода как функции координат (r , z). Радиус волновода 25,4 мм, период продольной дискретизации 6 мм. Видно, в частности, отмеченное выше постепенное ослабление поля парциальной моды в обе стороны от ее максимума в продольном направлении.

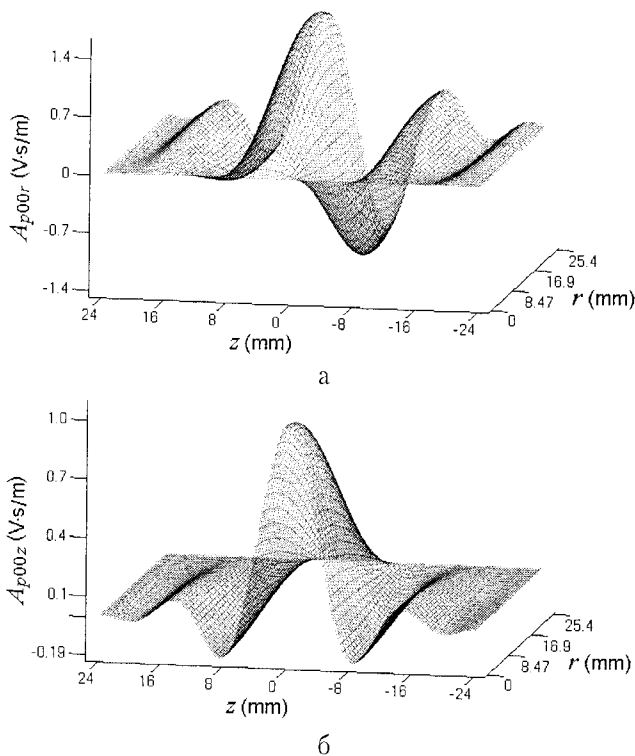


Рис. 2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

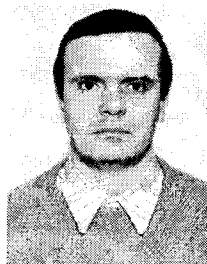
Совершенствование методов моделирования взаимодействия электромагнитных волн с электронными потоками в СВЧ-приборах является актуальной задачей современной прикладной электроники, связанной, в частности, с разработкой систем автоматизирован-

ного проектирования для данной отрасли. При этом существенным оказывается выбор оптимального соотношения между адекватностью модели и затратами вычислительных ресурсов, с точки зрения которого наилучшими, очевидно, являются методы, основанные на разложении электромагнитного поля ЭС по собственным видам колебаний.

Декомпозиция поля в парциальные виды имеет преимущества, с точки зрения спектрального моделирования, по сравнению с классическим разложением в нормальные моды. В дальнейшем возможна разработка методов прямого вычисления пространственных структур и электродинамических параметров парциальных мод (без предварительного нахождения аналогичных величин и функций для нормальных мод) и учета неоднородного заполнения ЭС, в том числе нестационарного, с использованием векторов поляризации и тока проводимости.

Литература: 1. D.M. Goebel, R.R. Liou, W.L. Menninger, X. Zhai, and E.A. Adler. Development of Linear Traveling Wave Tubes for Telecommunications Applications // IEEE Trans. Electron Devices. 2001. Vol. 48, No. 1. P. 74–81. 2. Грицунов А.В. О спектральном подходе к моделированию СВЧ-приборов // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 882–885. 3. H.J. Kim, J.U. Shin, and J.J. Choi. Particle-in-Cell Code Simulations on a Rising-Sun Magnetron Oscillator // IEEE Trans. Plasma Sci. 2002. Vol. 30, No. 3. P. 956–961. 4. S.V. Sosnytskiy and D.M. Vavriv. Theory of the Spatial-Harmonic Magnetron: An Equivalent Network Approach // IEEE Trans. Plasma Sci. 2002. Vol. 30, No. 3. P. 984–991. 5. Кураев А.А., Байбурун В.Б., Ильин Е.М. Математические модели и методы оптимального проектирования СВЧ приборов. — Мн.: Навука і тэхніка, 1990. — 392 с. 6. J.G. Wohlbiel, J.H. Booske, and I. Dobson. The Multifrequency Spectral Eulerian (MUSE) Model of a Traveling Wave Tube // IEEE Trans. Plasma Sci. 2002. Vol. 30, No. 3. P. 1063–1075. 7. Грицунов А.В. Выбор методов спектрального оценивания временных функций при моделировании СВЧ-приборов // Радиотехника. 2003. — № 9. — С. 25–30. 8. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 7. Физика сплошных сред. — М.: Мир, 1977. — 288 с. 9. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. — М.: Наука, 1964. — 440 с. 10. Кузнецов С.П. Об одной форме уравнений возбуждения периодического волновода // Радиотехника и электроника. — 1980. — Т. 25, № 2. — С. 419–421. 11. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. — М.: СОЛОН-Р, 2002. — 448 с. 12. A.V. Gritsunov, L.Y. Turenko. Harmonic Decomposition of an Exciting Current in Simulation of the Electron Devices // Telecomm. and Radio Engineering. 2002. Vol. 58, No. 11–12. P. 56–66. 13. Клеен В. Введение в электронику сверхвысоких частот. — М.: Сов. радио, 1963. — 480 с.

Поступила в редколлегию 20.04.2004



Грицунов Александр Валентинович, канд. техн. наук, доцент кафедры микроэлектроники, электронных приборов и устройств ХНУРЭ. Область научных интересов: радиофизика, компьютерное моделирование электровакуумных СВЧ-приборов.