УДК 719.81

ФОРМИРОВАНИЕ МНОЖЕСТВА ЭФФЕКТИВНЫХ ВАРИАНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СТРУКТУРНОГО СИНТЕЗА ТЕРРИТОРИАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

БЕСКОРОВАЙНЫЙ В.В.

Анализируется подход к формированию подмножеств эффективных вариантов при решении задач многофакторного структурного синтеза территориально распределенных систем. Для выпуклых множеств альтернативных вариантов предлагается метод формирования приближенной области компромиссов. Описываются полученные оценки эффективности и временной сложности модификаций метода.

1. Введение

Технологии структурного синтеза территориально распределенных систем (ТРС), как и других объектов проектирования, представляют собой итерационные схемы, включающие чередующиеся процедуры синтеза и анализа [1]. Процедуры синтеза служат для формирования вариантов построения системы $s \in S^*$ (где S^* – множество допустимых вариантов ее построения), а процедуры анализа – для формирования их покритериальной $k_i(s)$, $i = \overline{1, m}$ (где m – количество частных критериев) и/или обобщенной оценок $U(s)$.

При выборе решений в процессе структурного синтеза ТРС требуется выполнять анализ большого количества альтернативных вариантов S^*. Так, при решении задач синтеза топологии ТРС в классе радиально-узловых структур только по критерию стоимости (даже при использовании метода направленного перебора локальных экстремумов функции цели) требуется перебор порядка $\mathrm{Card}(S^*)=\sum_{l=1}^{l^o+1} C_n^l$ вариантов (где n – количество элементов системы; l – количество узлов системы, l^o – оптимальное количество узлов) [2]. Общее количество вариантов (деревьев), которые могут быть получены на n элементах, при синтезе древовидных структур ТРС составляет порядка $\mathrm{Card}(S^*)= n^{n-2}$ [3,4]. Анализ всевозможных кольцевых структур для несимметричной матрицы стоимостей может потребовать перебора $\mathrm{Card}(S^*)= (n-1)!$ вариантов [3]. Для современного состояния вычислительной техники проблемой является даже хранение такого количества вариантов, не говоря уже об их многокритериальном анализе.

2. Формирование области компромиссов

Область допустимых решений в общем случае состоит их двух подобластей $S^* = S^S \cup S^K$, где S^S – область согласия, в которой частные критерии могут изменяться согласованно; S^K – область компромиссов, в которой хотя бы одна пара критериев является строго противоречивой. Оптимальное решение задачи многокритериального синтеза s^o принадлежит области компромиссов $s^o \in S^K$ [5,6]. Ни одно из решений, принадлежащих S^K, не может быть улучшено сразу по всем частным критериям. С учетом этого в процессе проектирования предлагается параллельно формировать множества альтернативных вариантов S^* и множества компромиссов S^K. Суть этого подхода состоит в следующем.

Первый из сформированных альтернативных вариантов топологической структуры s включается в множество компромиссных S^K. Каждый из далее формируемых вариантов $x \in S^*$ сравнивается с каждым (на первом этапе с единственным) из вариантов $y \in S^K$. Если сформированный вариант x лучше всех вариантов из S^K по всем показателям, он включается в S^K. Если некоторый вариант $y \in S^K$ хуже, чем x, он исключается из S^K. После завершения генерации альтернативных вариантов $x \in S^*$ будет сформировано подмножество компромиссных вариантов S^K. При этом, в общем случае, $\mathrm{Card}(S^*) >> \mathrm{Card}(S^K)$, что позволяет сократить объем памяти для хранения альтернативных вариантов и уменьшить затраты на их дальнейший анализ.

3. Формирование приближенной области компромиссов

Существуют постановки задач структурного синтеза и оптимизации, в которых множество альтернативных вариантов S^* уже сформировано. При большой мощности множества S^* точное определение S^K представляет собой достаточно сложную с вычислительной точки зрения задачу. Её упрощением служит выделение приближенной области компромиссов (ПОК) S^P. При этом должно выполняться требование $S^K \subseteq S^P$. Для построения ПОК может быть использован следующий метод [6].

На множестве допустимых решений S^* производится оптимизация по каждому из частных критериев $k_i(s)$, $i = \overline{1, m}$, в результате чего определяются наилучшие по каждому критерию решения $s_i^o = \arg\operatorname*{extr}_{s \in S^*} k_i(s)$, $i = \overline{1, m}$ и соответствующие им значения других частных критериев $k_j(s_i^o)$, $j = \overline{1, m}$, $j \neq i$. Тогда наилучшее значение частного критерия k_i равно $k_i^+ = k_i(s_i^o)$, а наихудшее среди значений частного критерия k_i в точках экстремумов по другим критериям равно $k_i^- = \max_j k_i(s_j^o)$, если

$k_i(s) \to \min$ и $k_i^- = \min\limits_j k_i(s_j^o)$, если $k_i(s) \to \max$.

Полученные пары значений $< k_i^+, k_i^- >$, $i = \overline{1, m}$ являются границами отображения приближенного множества S^P на пространство критериев K.

Опытным путем было установлено, что на невыпуклых множествах допустимых вариантов S* описанный метод формирования приближенной области компромиссов S_1^P не гарантирует выполнения условия $S^K \subseteq S_1^P$.

Для выпуклых множеств альтернатив S* предлагается модификация описанного выше метода, позволяющая получать ПОК меньшего размера. Суть его состоит в следующем. (Без потери общности будем рассматривать задачу, в которой решения $s \in S^*$ задаются не значениями частных критериев $k_i(s)$, $i = \overline{1, m}$, а значениями их линейных функций полезности $\bar{k}_i(s)=((k_i(s)-k_i^-)/(k_i^+ - k_i^-))$, $i = \overline{1, m}$ [6]).

Определим на множестве допустимых решений S* наилучшие решения по каждому из частных критериев $s_i^o = \arg \operatorname{extr}\limits_{s \in S^*} \bar{k}_i(s)$, $i = \overline{1, m}$. Полученные при этом значения частных критериев определяют крайние точки границы приближенной области компромиссов $\bar{k}_{ij} = \bar{k}_i(s_j^o)$, $i, j = \overline{1, m}$. Построим плоскость (m – плоскость, гиперплоскость), проходящую через граничные точки $\bar{k}_{ij} = \bar{k}_i(s_j^o)$, $i, j = \overline{1, m}$ и отсекающую от области допустимых решений S* приближенную область компромиссов S_2^P [7,8]:

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} (\bar{k}_1(s)-\bar{k}_{11}) & \dots & (\bar{k}_m(s)-\bar{k}_{m1}) \\ (\bar{k}_{12}-\bar{k}_{11}) & \dots & (\bar{k}_{m2}-\bar{k}_{m1}) \\ . & . & . \\ (\bar{k}_{1m}-\bar{k}_{11}) & \dots & (\bar{k}_{mm}-\bar{k}_{m1}) \end{bmatrix} = 0. \quad (1)$$

В дальнейшем будем использовать нормальную форму уравнения плоскости (1) в виде

$$F(a_1, \dots, a_{m+1}, \bar{K}(s)) = 0,$$

где $\bar{K}(s) = [\bar{k}_1(s), \bar{k}_2(s), \dots, \bar{k}_m(s)]$; a_i, $i = \overline{1, m+1}$ – коэффициенты уравнения плоскости (1).

Для разделения точек на подмножества (подобласти) согласия S^S и приближенной области компромиссов S_2^P будем определять их расположение относительно плоскости (1). С этой целью воспользуемся известным критерием взаимного расположения точек $M_1(x_1,y_1,\dots,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,\dots,z_2)$ относительно плоскости $Ax+By+\dots+Cz+D=0$ (где A,B,C,D – коэффициенты нормальной формы уравнения плоскости). Точки $M_1(x_1,y_1,\dots,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,\dots,z_2)$ расположены по разные стороны плоскости, если числа $Ax_1+By_1+\dots+Cz_1+D$ и $Ax_2+By_2+\dots+Cz_2+D$ имеют противоположные знаки. Точка лежит на плоскости, если соответствующее число равно нулю. В качестве первой точки будем использовать начало координат, т.е. $M_1(0,0,\dots,0)$. В качестве второй используем точку M_2, соответствующую альтернативному варианту s_i с координатами ($\bar{k}_{i1}$, $\bar{k}_{i2}, \dots, \bar{k}_{im}$). Точка, лежащая в области S_2^P, должна, в оговоренных выше условиях, лежать с противоположной стороны или на плоскости (1) относительно начала координат $M_1(0,0,\dots,0)$.

Определим для точки начала координат значение $F(M_1)$. Вычислим значение $F(\bar{K}(s_i))$ для точки M_2 с координатами ($\bar{k}_{i1}$, $\bar{k}_{i2}, \dots, \bar{k}_{im}$), соответствующей очередному варианту s_i. Если полученное значение $F(\bar{K}(s_i))=0$ или имеет знак, противоположный $F(M_1)$, отнесем вариант s_i к приближенной области компромиссов S_2^P, в противном случае – к области согласия S^S. Для рассматриваемой задачи всегда $F(M_1)<0$ и, следовательно, требуется проверка выполнения только одного условия $F(\bar{K}(s_i)) \geq 0$.

4. Анализ эффективности методов

Для равномерного распределения характеристик вариантов множества S* метод выделения ПОК S_1^P, приведенный в [6], для m=2 в круге оставляет 1/4 его площади, для m=3 в шаре оставляет 1/8 его объема и т.д., т.е. позволяет сократить область поиска в гипершаре (m-шаре) примерно в 2^m раз. В тех же условиях предложенный метод формирования ПОК дает гораздо более компактную область S_2^P. Используем в качестве оценки степени сокращения ПОК S^P для рассмотренных методов отношения площадей сектора Card(S_1^P) и сегмента Card(S_2^P) (рис. 1). Для предложенного метода степень сокращения ПОК относительно S* составит $4 \cdot \pi/(\pi-2)$, т.е. порядка 11,02 раза, а относительно S_1^P – $\pi/(\pi-2)$, т.е. порядка 2,75 раза (см. рис. 1).

Формирование множества S^K путем полного перебора непосредственно из множества S* в худшем случае требует попарного сравнения всех вариантов множества по всем частным критериям. Для этого требуется выполнить порядка $f_0(n^*, m) = o[2 \cdot m \cdot C_{n^*}^2]$ операций сравнения, где m – количество частных критериев; n^*=Card(S*) – мощность множества S*. Для оценки сложности методов формирования ПОК проведем учет основных операций. Определение множества S_1^P известным методом из [6] предполагает выбор лучшего варианта по каждому из критериев (требуется порядка $m \cdot n^*$ операций), формирование границ (требуется по-

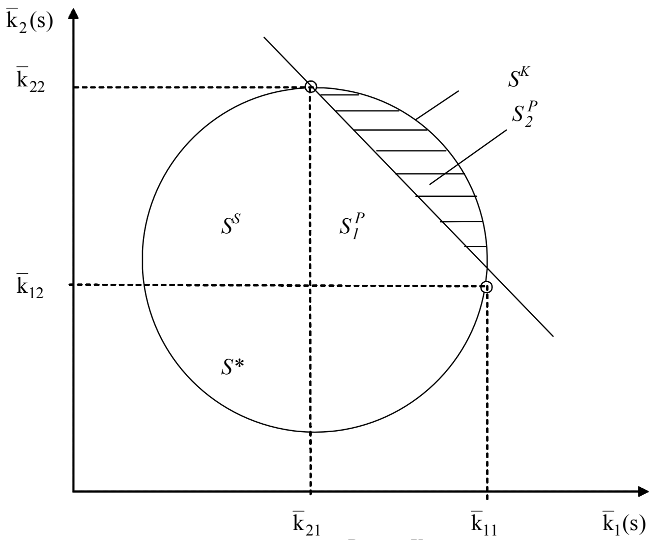

Рис. 1. Подмножества S^P и S^K на выпуклом множестве альтернатив S^*

рядка m^2 операций), проверку попадания каждого из вариантов по всем критериям в выделенные границы (требуется порядка $2 \cdot m \cdot n^*$ операций). Таким образом, временная сложность метода формирования ПОК S_1^P составляет $f_1(n^*, m) = o[3 \cdot n^* \cdot m + m^2]$.

Первые два этапа при определении множества S_2^P совпадают с этапами первого метода, т.е. требуют выполнения порядка $n^* \cdot m + m^2$ операций. Составление уравнения гиперплоскости предполагает развертывание определителя матрицы размером $m \times m$. Для этого требуется выполнить порядка $m!m-1$ операций. Решение о принадлежности точки ПОК предполагает вычисление значения функции $F(\overline{K(s_i)})$ (требуется $2 \cdot m$ операций для одной точки, что составит порядка $2 \cdot m \cdot n^*$ операций для всех точек множества S^*). С учетом этого временная сложность предлагаемого метода составляет порядка $f_2(n^*, m) = o[3 \cdot n^* \cdot m + m! \cdot m + m^2 - 1]$. Таким образом, предлагаемый метод предполагает дополнительно выполнение всего $m!m-1$ операций. Ввиду того, что на практике $n^* >> m$, можно считать, что рассмотренные методы имеют практически одинаковую временную сложность $f(n^*, m) = O[3 \cdot n^* \cdot m]$. Однако предложенный метод позволяет формировать ПОК меньшего размера, т.е.

$$\mathrm{Card}(S_1^P) > \mathrm{Card}(S_2^P).$$

Для сужения множеств S_1^P и S_2^P до S^K может быть применена описанная выше процедура сравнения пар вариантов $x, y \in S^P$. Если какой-либо вариант $y \in S^P$ по всем частным критериям хуже варианта $x \in S^P$, то вариант y не включается в множество S^K.

С учетом полученных оценок сложности методов формирования ПОК можно оценить сложность процедур формирования области компромиссов с промежуточным выделением ПОК. Временная сложность процедуры формирования области компромиссов по схеме $S^* \to S_1^P \to S^K$ составляет

$$f_{10}(n^*, m) = o[3 \cdot n^* \cdot m + m^2 + 2 \cdot m \cdot C_{n_1}^2],$$

где $n_1 = \mathrm{Card}(S_1^P)$ – мощность множества ПОК S_1^P. В частности, как было установлено, для областей допустимых решений S^*, имеющих форму m-шара, $\mathrm{Card}(S_1^P) = \mathrm{Card}(S^*)/2^m$.

Временная сложность процедуры формирования области компромиссов по схеме $S^* \to S_2^P \to S^K$ составляет порядка

$$f_{20}(n^*, m) = o[3 \cdot n^* \cdot m + m! \cdot m + m^2 + 2 \cdot m \cdot C_{n_2}^2].$$

Здесь $n_2 = \mathrm{Card}(S_2^P)$ – мощность множества ПОК S_2^P. В частности, для областей допустимых решений S^*, имеющих форму круга (гипершара с $m=2$), $\mathrm{Card}(S_2^P) = \mathrm{Card}(S^*)/11{,}02$.

Степень снижения временной сложности для методов, базирующихся на предварительном выделении ПОК, может быть определена путем соотношения $f_0(n^*, m)$ и $f_{10}(n^*, m)$ (рис. 2):

$$\gamma_1 = f_0(n^*, m) / f_{10}(n^*, m),$$

$$\gamma_2 = f_0(n^*, m) / f_{20}(n^*, m), \quad (2)$$

где γ_1, γ_2 – соответственно степень снижения временной сложности процедур формирования S^K с использованием известного и предложенного методов.

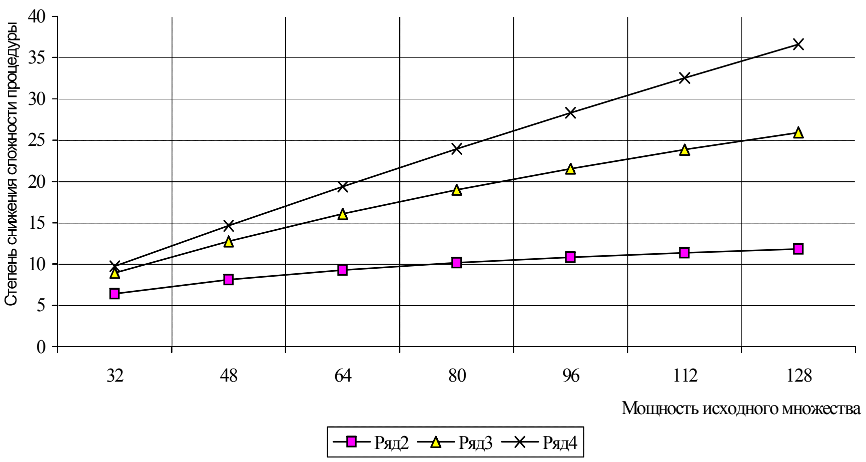

Рис. 2. Степень снижения временной сложности процедуры формирования области компромиссов по схеме $S^* \to S_1^P \to S^K$

5. Выводы

Степень снижения временной сложности при формировании области компромиссов $\gamma(n^*, m)$ по схеме $S^* \to S_2^P \to S^K$ примерно в 2,5 раза выше, чем для схемы $S^* \to S_1^P \to S^K$. Для обеих схем она увеличивается с увеличением количества альтернатив в исходном множестве Card(S^*) и количества частных критериев m. С учетом результатов анализа соотношений (2) (см. рис. 2) можно сделать вывод о том, что выделение подмножества S^P практически всегда целесообразно, так как позволяет существенно снижать трудоемкость процедуры определения множества компромиссов по схемам $S^* \to S^P \to S^K$.

Выбор единственного решения s^o на полученном множестве S^K небольшого размера может осуществляться лицом, принимающим решения. В противном случае для формализации процедур оценивания и выбора необходимо привлечение дополнительной информации о важности частных критериев $k_i(s)$, $i = \overline{1, n}$ и ценности различных значений формализованных свойств ТРС.

Литература: 1. *Норенков И.П.* Основы автоматизированного проектирования. М.: Изд-во МГТУ им.Баумана, 2000. 360 с. **2.** *Бескоровайный В.В.* Модификация метода направленного перебора для синтеза топологии систем с радиально-узловыми структурами // АСУ и приборы автоматики. 2003. Вып. 123. С. 110–116. **3.** *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 512 с. **4.** *Липатов Е.П.* Теория графов и ее применения. М.: Знание, 1986. 32 с. **5.** *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1987. 412 с. **6.** *Петров Э.Г., Новожилова М.В., Гребенник И.В., Соколова Н.А.* Методы и средства принятия решений в социально-экономических и технических системах. Херсон: ОЛДІ-плюс, 2003.380 с. **7.** *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с. **8.** *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 832 с.

Поступила в редколлегию 18.11.2003

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Нефедов Л.И.

Бескоровайный Владимир Валентинович, канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры системотехники ХНУРЭ. Научные интересы: структурный синтез территориально распределенных систем, математическое моделирование, теория оценивания и выбора решений. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, к.277, тел. (057)702-10-06.