

УДК 681.324.01

СКЛЯРОВ А.Я., к.т.н., доцент,
 МАКРУШАН И.А., ассистент,
 КАЙДАЛОВА Н.В., студент (ХНУРЭ)

Декомпозиция структур больших многосвязных сетей

Представил д.т.н., профессор Л.В. Дербунувич

Введение

Многие практически значимые задачи анализа и синтеза многосвязных сетей большой размерности могут быть решены при заданных временных и точностных характеристиках только после их декомпозиции на подсети меньшей размерности. Число допустимых вариантов декомпозиции (множество разбиений) достаточно быстро растет с увеличением количества переменных, описывающих динамическое поведение сети и степени их связности. Интуитивно ясно, что к рассмотрению необходимо принимать декомпозиции, полученные в результате ликвидации связей, обеспечивающих наименьшую связность и не приводящих к потере устойчивости образованных локальных подсетей [3]. В такой трактовке задача получения множества разбиений представляет собой задачу комбинаторной оптимизации, которая может быть решена либо методом полного перебора, либо одним из многочисленных приближенных методов математического анализа [10].

В последнее время все больше для решения задач комбинаторной оптимизации привлекаются аналоговые методы приближенной оптимизации, предполагающие конструирование некоторой искусственной нелинейной системы, которая в процессе эволюционного движения в фазовом пространстве войдет в область притяжения аттрактора и будет оставаться в нем достаточно длительное время. Если при этом аттрактор представляет собой фокус или устойчивый цикл, то мы можем идентифицировать его как решение задачи комбинаторной оптимизации, а движение к аттрактору как поиск этого решения.

Цель статьи заключается в рассмотрении оптимизационной задачи, иллюстрирующей новый подход к декомпозиции структур сложных многокомпонентных сетей, основанный на построении аналоговой модели сети и вероятностном алгоритме поиска оптимального разбиения.

Постановка задачи

В работе предлагается представить сложный композиционный объект, состоящий из множества взаимосвязанных элементов, в виде многосвязного графа. Таким образом, задача декомпозиции сводится к задаче разделения графа на подграфы так, чтобы обеспечить разделение по наименее существенным связям. Проиллюстрируем наши предложения на примере задачи разделения системы взаимосвязанных элементов на две равноценные подсистемы с минимальным количеством связей между ними.

Чтобы дать аналоговый способ решения задачи декомпозиции, сопоставим вышеуказанной задаче некоторую искусственно созданную систему, каждый i -ый элемент которой соответствует вершине графа связности декомпозируемой системы и может характеризоваться «спиновой» переменной S_i , которая принимает одно из двух значений (+1) или (-1) [4, 6 - 11]. Связность декомпозируемой задачи характеризуется матрицей смежности A_{ij} . Будем считать, что все элементы в состоянии $S_i = +1$ относятся к первой подсистеме, а элементы в состоянии $S_i = -1$ принадлежат второй подсистеме. Тогда полное число связей N между двумя подсистемами можно определить как:

$$N = (1/8) \sum_{i,j} A_{ij} (S_i - S_j)^2 = \frac{1}{8} \sum_i \sum_j A_{ij} (S_i^2 - 2S_i S_j + S_j^2) = \frac{1}{8} \sum_i \sum_j A_{ij} (2 - 2S_i S_j) = \frac{1}{4} \sum_i \sum_j A_{ij} - \frac{1}{4} \sum_i \sum_j A_{ij} S_i S_j = \frac{1}{2} N_{full} - \frac{1}{4} \sum_i \sum_j A_{ij} S_i S_j, \quad (1)$$

где $N_{full} = \sum_{i < j} A_{ij}$ - полное число связей между элементами рассматриваемой сложной системы; $S_i^2 + S_j^2 = 2, \forall (S_i, S_j)$.

Обозначим разность числа элементов в двух подсистемах как сумму

$$\Delta = \sum_i S_i, \quad (2)$$

которая по условию задачи оптимального разбиения на две подсистемы с одинаковым числом элементов должна равняться нулю.

Оптимальное разбиение сложной системы на две подсистемы с равным количеством элементов должно соответствовать абсолютному минимуму функции

$$E = N + \lambda \mathcal{L}^2 = (1/2)N_{full} + \sum_i \sum_j (\lambda - (1/4)A_{ij})S_i S_j, \quad (3)$$

где λ – множители Лагранжа.

Следует отметить, что функцию (3) можно интерпретировать как энергию связи системы «спиновых» элементов. Каждая спиновая конфигурация отвечает некоторой декомпозиции графа связности. Основное устойчивое состояние такой системы соответствует минимальной энергии E , что отвечает оптимальному разбиению графа связности на два равных подграфа с минимальной энергией связи между ними.

Аналоговое решение задачи (3) возможно, если подобрать такую динамику, т.е. алгоритм переходов между состояниями в системе, чтобы с течением времени система приближалась к состоянию абсолютного минимума энергии. Детерминированные методы поиска решения, как правило, не обеспечивают отыскание абсолютного минимума, так как система очень быстро может попасть в область локального минимума энергии, из которого она уже не способна выйти самостоятельно или мы не сможем с уверенностью утверждать, что система достигла дна потенциальной «ямы» [5].

Указанный выше эффект можно наблюдать при быстром охлаждении и отвердевании расплава некоторых веществ. В работе предлагается применить метод имитации отжига для решения оптимизационной задачи (3).

Метод решения оптимизационной задачи

Метод имитации отжига основан на идее, заимствованной из статистической механики. Он отражает поведение материального тела при отвердевании с применением процедуры отжига (управляемого охлаждения) при температуре T , последовательно понижаемой до нуля с коэффициентом снижения α . Как показали исследования [1, 2], при отвердевании расплавленного материала его температура должна уменьшаться постепенно, вплоть до момента полной кристаллизации. Если процесс остывания протекает слишком быстро, образуются значительные нерегулярности структуры материала, которые вызывают внутренние напряжения. В результате общее энергетическое состояние тела, зависящее от

его внутренней напряженности, остается на гораздо более высоком уровне, чем при медленном охлаждении. Быстрая фиксация энергетического состояния тела на уровне выше нормального аналогична сходимости оптимизационного алгоритма к точке локального минимума. Энергия состояния тела соответствует целевой функции, а абсолютный минимум этой энергии – глобальному минимуму. В процессе медленного управляемого охлаждения, называемого отжигом, кристаллизация тела сопровождается глобальным уменьшением его энергии, однако допускаются ситуации, в которых она может на какое-то время возрастать (в частности, при подогреве тела для предотвращения слишком быстрого его остывания). Благодаря допустимости кратковременного повышения энергетического уровня возможен выход из ловушек локальных минимумов, которые возникают при реализации процесса. Только понижение температуры тела до абсолютного нуля делает невозможным какое-либо самостоятельное повышение его энергетического уровня. В этом случае любые внутренние изменения ведут только к уменьшению общей энергии тела.

В реальных процессах кристаллизации твердых тел температура понижается ступенчатым образом. На каждом уровне она какое-то время поддерживается постоянной, что необходимо для реализации состояния термодинамического равновесия при заданной температуре. На протяжении всего периода, когда температура остается выше абсолютного нуля, она может как понижаться, так и повышаться. За счет удержания температуры процесса поблизости от значения, соответствующего непрерывно снижающемуся уровню термодинамического равновесия, удается обходить ловушки локальных минимумов, что при достижении нулевой температуры позволяет получить и минимальный энергетический уровень.

Метод имитации отжига представляет собой алгоритмический аналог физического процесса управляемого охлаждения. Предложенный в [1, 2] и доработанный многочисленными последователями он в настоящее время считается одним из немногих алгоритмов, позволяющих практически находить глобальный минимум функции нескольких переменных за значительно меньшее количество шагов, чем при использовании метода полного перебора.

Модифицированный алгоритм имитации отжига для решения задачи оптимального разбиения графа на подграфы можно описать следующим образом:

1. Используя генератор случайных чисел с равномерным распределением в диапазоне (0,1) получить начальное разбиение графа на два подграфа, т.е. присвоить $S_i = +1$, если $RND > 0,5$, иначе $S_i = -1$ для $\forall i \in 1, n$ (где n – количество вершин графа).

2. Задать начальные значения переменным

λ, T, α, L (где α – коэффициент снижения «температуры»; L – количество перебросок вершины из одной группы в другую при фиксированном значении T) и вычислить начальное значение энергии связи между подсистемами по формуле (3).

3. Пока $T > 0$, повторить L раз следующие действия:

- получить с помощью генератора случайных чисел с равномерным распределением в диапазоне $i = 1, n$ номер вершины. Если для этой вершины $S_i = 1$, то $S_i = -1$; если $S_i = -1$, то $S_i = +1$;
- вычислить новое значение энергии связи по формуле (3) и определить изменение критериальной функции $\Delta E = E_{\text{нов}} - E_{\text{пред}}$;
- если $\Delta E \leq 0$, принять изменение S_i ; в противном случае (при $\Delta E > 0$), принять изменение S_i с вероятностью $P = \exp(-\Delta E/T)$ путем генерации случайного числа R из интервала $(0,1)$ с последующим сравнением его со значением P ; если $P > R$, принять новое S_i ; в противном случае проигнорировать его.

3. Уменьшить температуру ($T = \alpha T$) с использованием коэффициента уменьшения α , выбираемого из интервала $(0,1)$, и вернуться к п. 3.

В описании алгоритма в качестве названия параметра, влияющего на вероятность увеличения значения целевой функции, используется выбранный его автором Н. Метрополисом термин "температура", хотя с формальной точки зрения приведенная модель оптимизации является только математической аналогией процесса отжига. Алгоритм имитации отжига выглядит концептуально несложным и логически обоснованным. В действительности, как показывают численные эксперименты, приходится решать много фундаментальных проблем, которые влияют на его практическую применимость.

Первой следует назвать проблему длительности имитации. Для повышения вероятности достижения глобального минимума длительность отжига (представляемая количеством циклов L , повторяемых при одном и том же значении температуры) должна быть достаточно большой, а коэффициент уменьшения температуры α – низким. Это увеличивает продолжительность процесса моделирования, что может дискредитировать его с точки зрения практической целесообразности.

Возникает также и проблема конкурентоспособности метода по сравнению, например, с методами локальной оптимизации в связи с возможностью многократного возобновления процесса из различных точек в пространстве параметров. При таком подходе гра-

мотная статистическая обработка результатов экспериментов позволяет с высокой вероятностью и достаточно быстро локализовать зону глобального минимума и достичь его с применением технологии детерминированной оптимизации.

Огромное влияние на эффективность метода имитации отжига оказывает выбор таких параметров, как начальная температура T_{max} , коэффициент уменьшения температуры α и количество циклов L , выполняемых на каждом температурном уровне.

Максимальная температура может быть подобрана по результатам многочисленных предварительных имитационных экспериментов. На их основе можно построить распределение вероятности стохастических изменений текущего решения при конкретных значениях температуры (зависимость $F = f(T)$). В последующем, задаваясь процентным значением допустимости изменений в качестве порогового уровня, из сформированного распределения можно найти искомую начальную температуру. Главной проблемой остается определение порогового уровня, оптимального для каждой реализации процесса имитации отжига. Для отдельных практических задач этот уровень может иметь различные значения, однако общий диапазон остается неизменным. Как правило, начальная температура подбирается так, чтобы обеспечить реализацию порядка 50% последующих случайных изменений решения. Поэтому знание предварительного распределения вероятностей таких изменений позволяет получить приблизительную оценку начальной температуры.

Методики выбора как максимального количества циклов L для конкретных температурных уровней, так и определение значения коэффициента уменьшения температуры α не столь однозначны. При подборе этих параметров приходится учитывать динамику изменения величины целевой функции в зависимости от количества выполненных циклов поиска решения.

Как показывают имитационные эксперименты, большая часть вычислительных ресурсов расходуется на начальной стадии процесса, когда средняя скорость изменения целевой функции невелика и прогресс оптимизации минимален. Это "высокотемпературная" стадия имитационного процесса. Быстрее всего величина целевой функции уменьшается на средней стадии процесса при относительно небольшом количестве проходящих на нее итераций. Завершающая стадия процесса имеет стабилизационный характер. На ней независимо от количества итераций прогресс оптимизации становится практически незаметным. Такое наблюдение позволяет существенно редуцировать начальную стадию отжига без снижения качества конечного результата. Модификации, на наш взгляд, необходимо подвергать количество циклов, выполняемых при высоких температурах, оно сокращается в случае,

когда оказался выполненным весь запланированный объем изменений текущего решения. Такой подход позволяет сэкономить до 20% времени.

Исключение последней, плоской части характеристической кривой целевой функции также возможно. В соответствии с обычным критерием останковки алгоритма, если при нескольких последовательных снижениях температуры (типовое значение 5) не регистрируется уменьшение величины целевой функции; то процесс останавливается, а наилучшее, достигнутое решение, считается глобальным минимумом. Дальнейшее уменьшение критерия останковки не рекомендуется, поскольку оно ведет к снижению вероятности достижения глобального минимума. В то же время заметное влияние на конечную стадию процесса оказывают коэффициент понижения температуры α и количество циклов L . Ее длительность, возможно, удастся сократить более частым изменением температуры при уменьшении количества циклов, но при сохранении неизменным общего объема итераций.

Еще одна проблема связана с определением длительности моделирования процесса отжига, пропорциональной суммарному количеству итераций. Поскольку отводимое для оптимизации время всегда ограничено, все его можно потратить либо на одну реализацию процесса с соответствующим удлинением циклов, либо сократить длительность всех циклов, а за счет этого выполнить несколько реализаций и принять в качестве результата наилучшее решение. В ходе различных компьютерных экспериментов установлено, что при малом лимите времени лучшие результаты дает единичная реализация. Если же моделирование может быть более длительным, статистически лучшие результаты достигаются при многократной реализации процесса имитации отжига при больших (близких к 1) значениях коэффициента α .

Однако наибольшее ускорение процесса имитации отжига можно достичь путем замены случайного назначения вершинам значений S_i , тщательно подобранными значениями с использованием любых доступных способов предварительной семантической обработки исходных данных. В такой ситуации в зависимости от количества вершин и степени оптимальности начальных значений удастся добиться даже многократного сокращения времени моделирования.

Выводы

Научная новизна: предлагается метод декомпозиции структур сложных многокомпонентных сетей, основанный на построении аналоговой модели сети и вероятностном алгоритме поиска оптимального разбиения. Для решения оптимизационной задачи предла-

гается применить метод имитации отжига, основанный на идее, заимствованной из статистической механики. Также предлагается модифицированный алгоритм имитации отжига для решения задачи оптимального разбиения графа на подграфы.

Практическая значимость: предложенный подход может быть использован для решения задач разбиения корпоративных сетей на регионы управления по критерию минимума интенсивности связей между регионами. При этом, уровни связности могут быть определены с использованием "гравитационных моделей", предложенных в [12].

Кроме того, разработанный подход к декомпозиции многосвязных структур может быть использован при структуризации компьютерных сетей с использованием мостов и маршрутизаторов для определения места их установки с целью решения задачи повышения эффективности балансировки нагрузки в сети.

Литература

1. Johnson D., Aragon C., Schevon C. Optimization by simulated annealing: an experimental evaluation. Part I: graph partitioning // Operations Research, 1989. – Vol. 37. – Pp. 865 – 892.
2. Kirkpatrick S., Gelat C.D., Vecchi M.P. Optimization by simulated annealing // Science, 1983. – Vol. 220. – Pp. 671 – 680.
3. Скляр А.А. К вопросу формирования иерархий в синергетических системах // Радиоэлектроника и информатика. 2001. – № 1. – С. 123-131.
4. Николс Дж. Динамика иерархических систем: Эволюционное представление: Пер. с англ. /Предисл. Б.Б. Кадомцева. -М.: Мир, 1989. -488 с.
5. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику: Учеб. руководство. -М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. -272 с.
6. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. -М.: Энергоатомиздат, 1994. -343 с.
7. Хакен Г. Синергетика: Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах: Пер. с англ. -М.: Мир, 1985. -423 с.
8. Хакен Г. Синергетика: Пер. с англ. -М.: Мир, 1980. -404 с.
9. Хакен Г. Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам: Пер. с англ. -М.: Мир, 1991. -240 с.
10. Исследования по теории структур. Сборник научных трудов. Под ред. М.А. Айзермана, Э.Р. Каянелло. -М.: Наука, 1988. -203 с.
11. Николс Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядочению через флуктуации. -М.: Мир, 1979. - 317 с.

12. Складов А.А., Макрушан І.А. Моделирование транспортных коммуникаций корпоративных компьютерных сетей: распределение транзакций по маршрутам. // Радиоелектроніка. Інформатика. Управління.- Запоріжжє, 2006. – № 2(16). – С. 70 – 74.

Резюме

Предложен метод декомпозиции структур сложных многокомпонентных сетей, основанный на построении аналоговой модели сети и вероятностном алгоритме поиска оптимального разбиения. Даны рекомендации по практическому использованию предложенного подхода

Запропоновано метод декомпозиції структур складних багатоконпонентних мереж, заснований на побудові аналогової моделі мережі й імовірнісному алгоритмі пошуку оптимальної розбивки. Дано рекомендації із практичного використання запропонованого підходу

The problem of analysis and synthesis of multiconnected networks with large dimension are considered. The method of decomposition of complicated multicomponent net structures based on construction of network analog model and probabilistic algorithm of optimal decomposition search is proposed

Поступила 18.03.2007 г.