

УДК 621.396.965.621.391.26

## СДЦ В ИМПУЛЬСНЫХ РЛС: С ФОРМУЛАМИ И КАРТИНКАМИ. 2. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ ОПТИМАЛЬНОЙ МЕЖДУПЕРИОДНОЙ ОБРАБОТКИ ГАУССОВЫХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ГАУССОВЫХ ПАССИВНЫХ ПОМЕХ

*Д. И. ЛЕХОВИЦКИЙ, В. П. РЯБУХА, Г. А. ЖУГА*

---

Статья конкретизирует и дополняет вводную статью [1] запланированного цикла статей по вопросам нетраекторной селекции движущихся целей (СДЦ) на фоне источников пассивных помех (ПП) различной физической природы в системах междупериодной обработки (МПО) сигналов импульсных РЛС. Основное внимание уделяется анализу физического смысла и экстремальных свойств операций оптимальной МПО гауссовых когерентных и некогерентных сигналов на фоне гауссовых ПП в гипотетических условиях точного знания их статистических характеристик. Приводимые результаты используются в последующих статьях цикла для сравнительной оценки качества существующих и перспективных квазиоптимальных систем МПО, предназначенных для работы в реальных условиях априорной неизвестности статистических характеристик входных воздействий

The introductory paper of the scheduled series of the papers devoted to the problems of non-trace moving targets detection (MTD) against the background of Gaussian clutters (GC) in the systems of interperiod processing (IPP) of the pulse radars is rendered concrete and complemented. The emphasis is made on the analysis of the physical sense and the extreme features of operations of the optimal IPP against the background of Gaussian clutter under hypothetical conditions of exact knowledge of their statistical characteristics. The presented results are used in the following papers of the series for the comparative estimate of the quality of the available and prospective quasi-optimal IPP systems intended for the operation under real conditions of a priori uncertainty of the input actions statistical characteristics.

### ВВЕДЕНИЕ

Данная статья – вторая из запланированного цикла статей по теории и технике обнаружения сигналов движущихся целей на фоне пассивных помех (ПП) в импульсных РЛС. Этой задаче, возникшей практически одновременно с появлением самих РЛС, но не потерявшей актуальности до настоящего времени, уделено огромное внимание в отечественной и зарубежной литературе, созданы и в ряде случаев достаточно эффективно работают разнообразные, в том числе и адаптивные, системы СДЦ.

Большинство из них проектировалось и создавалось в годы, когда характеристики имевшейся элементной базы были существенно ниже, чем современной цифровой техники, стремительно прогрессирующей и в настоящее время. В связи с этим появляются возможности практически реализовать резервы повышения эффективности СДЦ, связанные с ее приближением к рекомендациям теории, созданной задолго до возникновения этих возможностей. Оценка этих резервов и обоснование рациональных путей их практической реализации составляют основную цель данного цикла статей.

В первой (вводной) статье [1] приведены примеры ПП различной природы и физические предпосылки нетраекторной селекции движущихся целей (СДЦ) на их фоне в системах междупериодной обработки (МПО) сигналов когерентно-им-

пульсных РЛС. Кратко рассмотрены особенности оптимальной МПО когерентных гауссовых сигналов на фоне гауссовых ПП. Упор в изложении сделан «на картинку» (фото, схемы, графики) при минимальном числе формул, доказательств и литературных ссылок.

В откликах, поступивших на [1], были высказаны пожелания не ограничиваться в дальнейшем только «картинками». Эти пожелания по мере возможности учтены в данной статье, в связи с чем в ее заголовке вставка из [1] «почти без формул» заменена на вставку «с формулами». В остальном она конкретизирует и дополняет проведенный в [1] анализ физического смысла и экстремальных свойств операций оптимальной МПО гауссовых когерентных и некогерентных сигналов на фоне гауссовых ПП в гипотетических условиях точного знания их статистических характеристик. Используемые при этом формулы и доказательства в большинстве своем известны, но рассредоточены по многим литературным источникам, лишь незначительная часть которых могла быть включена в библиографический список.

Статья организована следующим образом. В п. 1 описываются входные воздействия системы МПО, ее задача и оптимальное решение при произвольных статистических характеристиках сигналов и помех. В п. 2 описываются гауссовы модели когерентных и некогерентных сигналов и авторегрессионных (АР) ПП, для которых в п. 3 син-

тезируются оптимальные системы МПО. В п. 4 анализируются физический смысл и экстремальные свойства оптимальных операций. В заключительном п. 5 обсуждаются сложности реализации оптимальной МПО и обосновывается необходимость создания адаптивных эквивалентов их квазиоптимальных разновидностей, которым посвящены следующие статьи данного цикла.

### 1. ВХОДНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ МПО, ЕЕ ЗАДАЧА И ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

А. Входными воздействиями систем МПО рассматриваемых импульсных РЛС являются  $M$ -мерные векторы - столбцы (пачки)

$$\mathbf{u} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^M = \mathbf{y} + \gamma \cdot \mathbf{s}, \quad \gamma = 0, 1 \quad (1)$$

случайных комплексных амплитуд помехи (ПП и внутреннего шума)  $\mathbf{y} = \{y_\ell\}_{\ell=1}^M$  и, возможно (при  $\gamma=1$ ), полезного сигнала  $\mathbf{s} = \{s_\ell\}_{\ell=1}^M$ , отраженные от каждого элемента разрешения по дальности в заданном угловом направлении в  $M$  смежных периодах зондирования (рис. 1).

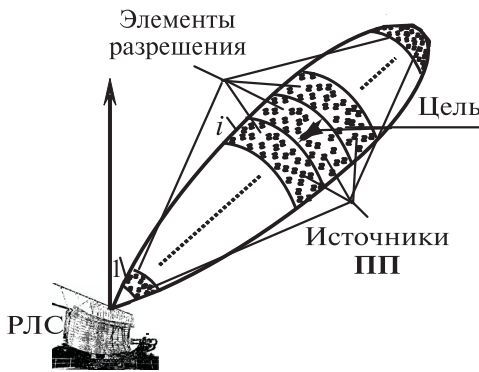


Рис. 1. Источники отражений в импульсных РЛС

В качестве примера на рис. 2 показаны квадраты модулей комплексных амплитуд реальных отражений РЛС УВД кругового обзора «Утес – Т» (Россия) в трех из  $M$  смежных периодов зондирования в 150 элементах разрешения по дальности, каждому из которых соответствует своя пачка (1).

Она формируется в блоке памяти (БП) системы МПО, включенном на выходе приемника, обычно согласованного с зондирующими импульсами передатчика  $g(t)$ . БП условно показан в виде набора линий задержки на интервалы, определяющиеся интервалами следования  $T_i$  этих импульсов. Пачку (1) образуют отсчеты комплексных амплитуд отводов линии задержки из одного и того же элемента дальности (момента времени). Число  $M$  импульсов пачки зависит от используемого способа обзора пространства. В РЛС программного обзора оно задается оператором, в РЛС кругового обзора определяется скоростью азимутального вращения антенны, азимутальной шириной ее главного луча и средним интервалом зондирования. Размеры пачек при круговом обзоре лежат обычно в пределах от 8 до 80.

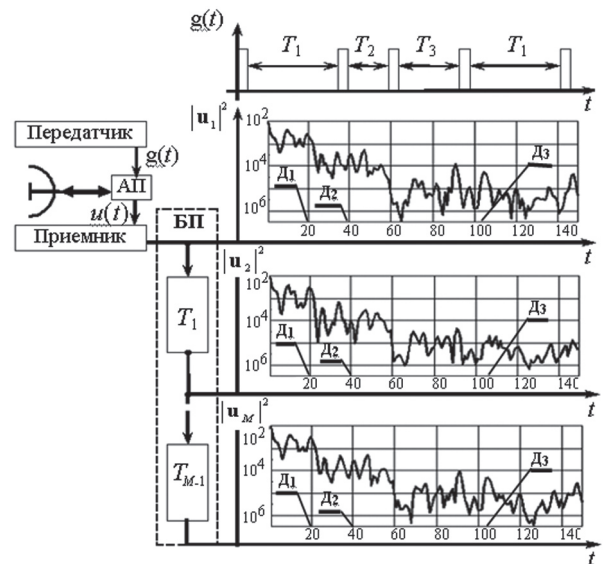


Рис. 2. Комплексные амплитуды ПП

Б. Задачей рассматриваемых систем МПО является проверка статистической гипотезы  $H = H_0$  о принадлежности входной выборки (1) только помехе ( $\gamma = 0$ ) или альтернативной гипотезы  $H = H_1$  о ее принадлежности смеси сигнала и помехи ( $\gamma = 1$ ). Основными показателями качества решения выступают вероятности ложной тревоги (ВЛТ)  $F$  и правильного обнаружения (ВПО)  $D$ .

В. Общая схема решения этой задачи показана на рис. 3 [2–4]. В ней входной  $M$ -мерный вектор (1) в формирователе предпороговой статистики (ФППС) преобразуется в случайный скаляр  $\xi(\mathbf{u})$ , который в пороговом устройстве (ПУ) сравнивается с порогом  $x_0$ . При  $\xi(\mathbf{u}) < x_0$  принимается гипотеза  $H = H_0$  об отсутствии, а при  $\xi(\mathbf{u}) \geq x_0$  – гипотеза  $H = H_1$  о наличии сигнала в аддитивной смеси (1).

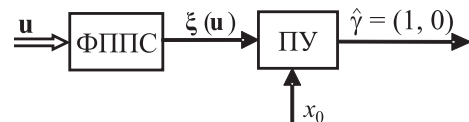


Рис. 3. Общая структура системы МПО

Схема рис. 3 оптимальна, если предпороговая статистика (ППС) представляет собой монотонно возрастающую функцию  $\xi(\mathbf{u}) = \phi(l(\mathbf{u}))$  (обычно – логарифм) «отношения правдоподобия»

$$l(\mathbf{u}) = p_1(\mathbf{u}) / p_0(\mathbf{u}), \quad (2)$$

где числитель и знаменатель – плотности распределения входного вектора (1) по гипотезам  $H = H_1$  и  $H = H_0$  соответственно.

Г. Из-за характерной для практики априорной неизвестности и динамичной изменчивости во времени и (или) в пространстве этих плотностей или их параметров сформировать оптимальную ППС обычно невозможно. Для этих условий обоснован теоретически и испытан на практике трехэтапный «адаптивный байесов подход [5, с. 101]». Его первый этап предусматривает синтез оптимальной систе-

мы обработки для выдвинутой «встречной» гипотезы о требующихся в (2) распределениях [5–7]. Именно этот этап анализируется в данной статье. В качестве «встречной» используется гипотеза о гауссовой плотности распределения вектора (1), во многих случаях адекватная реальным входным воздействиям систем МПО импульсных РЛС.

## 2. ГАУССОВЫ МОДЕЛИ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ СИСТЕМЫ МПО

**А.** При выдвинутой «встречной» гипотезе  $M$ -мерные слагаемые смеси (1) полагаются взаимно независимыми **гауссовыми** (нормальными) комплексными случайными векторами

$$\mathbf{y} \sim CN(0, \Phi), \quad \mathbf{s} \sim CN(0, \Phi_s) \quad (3)$$

с нулевыми средними значениями

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{s}} = 0, \quad (4)$$

статистические свойства которых полностью определяются  $M \times M$  **эрмитовыми** [14–16] корреляционными матрицами (**КМ**)

$$\Phi = \{\varphi_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^*}, \quad \Phi_s = \{\varphi_{i\ell}^{(s)}\}_{i,\ell=1}^M = \overline{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^*} \quad (5)$$

междупериодных флуктуаций импульсов пачки помех и сигнала. Здесь и далее черта сверху и звездочка – символы статистического усреднения и эрмитового сопряжения соответственно.

В этих условиях  $M$ -мерный входной вектор (1) также является случайным комплексным нормальным вектором с нулевым средним значением и плотностью распределения [2, 4, 8]

$$p_\gamma(\mathbf{u}) = \pi^{-M} |\Phi_\gamma|^{-1} \exp\{-\mathbf{u}^* \cdot \Psi_\gamma \cdot \mathbf{u}\}, \quad \gamma = 0, 1. \quad (6)$$

Здесь  $|\Phi_\gamma|$  – детерминант эрмитовой **КМ**

$$\Phi_\gamma = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*} = \begin{cases} \Phi_0 = \Phi, & \gamma = 0, \\ \Phi_1 = \Phi_0 + \Phi_s, & \gamma = 1, \end{cases} \quad (7.a)$$

в условиях (6) аккумулирующей всю статистическую информацию о свойствах вектора (1),

$$\Psi_\gamma = \{\psi_{ij}\}_{i,j=1}^M = \Phi_\gamma^{-1}, \quad \gamma = 0, 1. \quad (7.b)$$

Равенством Винера – Хинчина [2]

$$\Phi_\gamma = \int_{-1/2}^{1/2} S_\gamma(f) \cdot \mathbf{x}(f) \cdot \mathbf{x}^*(f) df \quad (8)$$

эта **КМ** связана со спектральной плотностью мощности (для краткости – спектром)  $S_\gamma(f)$  междупериодных флуктуаций импульсов пачки (1). Здесь

$$f = f / F_{av} = f \cdot T_{av} - \quad (9)$$

нормированная к средней частоте следования зондирующих импульсов

$$F_{av} = 1/T_{av}, \quad T_{av} = (M-1)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{M-1} T_i \quad (10)$$

(безразмерная) частота,

$$\mathbf{x}(f) = \left\{ e^{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \tau_\ell} \right\}_{\ell=1}^M - \quad (11)$$

вектор отсчетов комплексной гармоники частотой  $f$  в «моменты»  $\tau_\ell = T_{av}^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{\ell-1} T_i$ , имеющие смысл нормированных к среднему периоду  $T_{av}$  временных положений  $\ell$ -го ( $\ell \in 1, M$ ) импульса пачки относительно первого. В частном случае постоянного интервала зондирования, когда

$$T_i = T_{av} = T, \quad \tau_\ell = \ell - 1, \quad (12)$$

для этого вектора справедливо равенство

$$\int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{x}(f) \cdot \mathbf{x}^*(f) df = \mathbf{I}_M, \quad (13)$$

где  $\mathbf{I}_M$  – единичная  $M \times M$  матрица.

В (8), (13) и далее под интегралом от матрицы понимается, как обычно, матрица интегралов от ее элементов.

**КМ** (спектры) междупериодных флуктуаций импульсов пачки на практике исключительно разнообразны и даже в одной РЛС в зависимости от природы источников, времени года и суток, погодных условий и т. п. могут меняться в широких пределах. В связи с этим при теоретическом анализе обычно используют те или иные модели, которые при относительной простоте с той или иной степенью точности передают характерные особенности реальных сигналов и помех. К их числу относятся и модели, описываемые ниже. Вытекающие из них выводы в последующих статьях конкретизируются по результатам экспериментов в действующих РЛС.

**Б.** Начнем с широко распространенных «предельных» моделей междупериодных флуктуаций импульсов пачки полезного сигнала.

1. Пусть спектр сигнала равен

$$S_s(f) = \sigma_s^2 \cdot \delta(f - f_s), \quad (14)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция,  $\sigma_s^2 = \overline{|s_\ell|^2}$  – мощность каждого импульса пачки сигнала  $\mathbf{s} = \{s_\ell\}_{\ell=1}^M$ ,

$$f_s = f_{ds} \cdot T_{av} = 2 \cdot v \cdot T_{av} / \lambda - \quad (15)$$

нормированный (безразмерный) доплеровский сдвиг частоты сигнала точечной цели, численно равный удвоенному числу длин волн  $\lambda$ , пролетаемых ею за средний период зондирования  $T_{av}$  в радиальном направлении со скоростью  $v$ .

В этом случае, в соответствии с (8),

$$\Phi_s = \overline{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^*} = \sigma_s^2 \cdot \mathbf{x}(f_s) \cdot \mathbf{x}^*(f_s). \quad (16)$$

В условиях (3), (4) такую **КМ** имеет сигнал

$$\mathbf{s} = \beta_s \cdot \mathbf{t}_s, \quad \mathbf{t}_s = \sigma_s \cdot \mathbf{x}(f_s), \quad (17)$$

пропорциональный случаю  $M$ -мерному вектору  $\mathbf{t}_s$  со случайным скалярным коэффициентом пропорциональности

$$\beta_s \sim CN(0,1). \quad (18)$$

Его изменения одинаково («дружно» [2, 4]) изменяют амплитуды и фазы **всех** импульсов пачки, **не меняя** соотношений между ними, задаваемых вектором  $\mathbf{x}(f_s)$  (11). В связи с этим модуль  $|\rho_{pq}^{(s)}|$  коэффициентов корреляции

$$\rho_{pq}^{(s)} = \frac{\overline{s_p \cdot s_q^*}}{\sqrt{|s_p|^2 \cdot |s_q|^2}} = \frac{\Phi_{pq}^{(s)}}{\sqrt{\Phi_{pp}^{(s)} \cdot \Phi_{qq}^{(s)}}} \quad (19)$$

$p$ -го и  $q$ -го импульсов пачки сигнала равен

$$|\rho_{pq}^{(s)}| = 1 \text{ для всех } p, q \in 1, M. \quad (20)$$

Пачку (17) называют также квазидетерминированной, дружно флуктуирующей с рэлеевской амплитудой и равномерно распределенной на  $(0, 2\pi)$  начальной фазой, (полностью) **когерентной** [2–4, 8]. Ниже используется последний термин, а также его «математический синоним» – справедливость для ранга [14–16]  $M \times M$  **КМ**  $\Phi_s$  равенства

$$\text{rank } \Phi_s = 1, \quad (21)$$

следствием которого является, в частности, (20).

2. Пусть спектр сигнала равномерен,

$$S_s(f) = \sigma_s^2, \quad f \in -1/2, 1/2. \quad (22)$$

В этом случае в условиях (12), (13)

$$\Phi_s = \sigma_s^2 \cdot \mathbf{I}_M, \quad \text{rank } \Phi_s = M, \quad (23.a)$$

$$\rho_{pq}^{(s)} = 0, \quad p \neq q, \quad p, q \in 1, M. \quad (23.б)$$

Такие спектр и **КМ** может иметь сигнал от вертолета или от протяженной цели, равномошные «блестящие» точки которой движутся с радиальными скоростями  $v$ , непрерывно заполняющими интервал  $|v| \leq \lambda F_{av} / 4$ . Это возможно, в частности, если цель длиной  $\ell_{\text{ц}}$  движется со скоростью  $V$  перпендикулярно линии визирования на дальности  $D \leq 2\ell_{\text{ц}} V / \lambda F_{av}$ . При  $\ell_{\text{ц}} = 50$  м,  $V = 10^3$  м/с,  $F_{av} = 400$  Гц и  $\lambda = 0.1$  м эта дальность  $D \leq 2500$  м.

Такие же спектр и **КМ** может иметь и сигнал

$$\mathbf{s} = \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^M \beta_i \cdot \mathbf{t}_i, \quad (24)$$

где

$$\boldsymbol{\beta} = \{ \beta_i \}_{i=1}^M \sim CN(0, \mathbf{I}_M) - \quad (25)$$

$M$ -мерный вектор взаимно некоррелированных комплексных отсчетов белого шума с нулевым средним и единичной дисперсией (мощностью),  $\mathbf{T}$ -произвольная унитарная  $M \times M$  матрица, удовлетворяющая равенству [14–16]

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T} = \sigma_s^2 \cdot \mathbf{I}_M = \Phi_s. \quad (26)$$

Очевидный пример такой матрицы – скалярная (пропорциональная единичной) [16] матрица

$$\mathbf{T} = \sigma_s \cdot \mathbf{I}_M. \quad (27)$$

В этом случае сигнал (24) равен

$$\mathbf{s} = \sigma_s \cdot \boldsymbol{\beta}, \quad (28)$$

что с учетом (25) хорошо объясняет его название «шумовой» или (полностью) **некогерентный** [2–4].

Еще один пример –  $M \times M$  матрица

$$\mathbf{T} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{M}} \cdot \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = \{ \mathbf{x}(f_i) \}_{i=1}^M, \quad f_i = (i-1)/M, \quad (29)$$

составленная из  $M$  ортогональных  $M$ -мерных векторов гармоник (11)–(13), расставленных с шагом  $1/M$  на нормированной частотной оси. Формируемый ею по (24) **некогерентный** сигнал

$$\mathbf{s} = \frac{\sigma}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M \beta_i \cdot \mathbf{x}(f_i) \quad (30)$$

представляет собой **сумму** взвешенных со случайными **независимыми** весами (25) **когерентных** сигналов (17) [2–4, 8].

Различие представлений некогерентных сигналов порождает отличие схем их обработки при той же потенциальной эффективности. Последнее обусловлено статистической эквивалентностью любых гауссовых векторов с нулевым средним значением, имеющих одинаковую **КМ**.

**В.** В РЛС кругового обзора импульсы пачки сигнала, отраженного от точечной по азимуту цели, модулируются по амплитуде диаграммой направленности (**ДН**) антенны. Модулированная пачка  $\mathbf{s}_M$  связана с немодулированной равенством

$$\mathbf{s}_M = \{ s_i^{(M)} \}_{i=1} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{s}, \quad \mathbf{D} = \text{diag} \{ \partial_i \}_{i=1}, \quad (31)$$

где  $\mathbf{D}$  – диагональная матрица модуляции пачки при вращении антенны, элементы  $\partial_i > 0$  которой определяются формой главного луча ее **ДН** [1].

**Г.** Модулированная пачка (31) имеет **КМ**

$$\Phi_s = \overline{\mathbf{s}_M \cdot \mathbf{s}_M^*} = \{ \Phi_{ij}^{(s)} \}_{i,j=1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^*, \quad (32.a)$$

где  $M \times r$  матрица

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \quad (32.б)$$

левый «корень»  $M \times M$  матрицы  $\Phi_s$ , число столбцов которого совпадает с ее рангом  $r$  [14–16].

Ранг **КМ** (32), как и произвольного «корня»  $\mathbf{F}$  из нее, совпадает с рангом **КМ** немодулированной пачки. Совпадают и нормированные коэффициенты взаимной корреляции (19), (20), (23) импульсов этих пачек. Поэтому модулированные и немодулированные когерентные (некогерентные) пачки когерентны (некогерентны) в равной степени.

**Д.** **Полностью** когерентные (17) или некогерентные (24), (28), (30) сигналы соответствуют двум «предельным» разновидностям междупериодных флуктуаций импульсов пачки – полностью **коррелированным** (20) или полностью **некоррелированным** (23). Реальные сигналы обычно когерентны (или некогерентны) только **частично** – полностью

коррелированы или некоррелированы только некоторые импульсы пачки или даже никакая пара из них. Для них также могут использоваться представления (24), (31), (32), но с числом слагаемых в сумме (24)  $r \leq M$ , определяющим число линейно независимых  $M$ -мерных столбцов и, тем самым, ранг  $M \times r$  матриц  $\mathbf{T}, \mathbf{F}$  и  $M \times M$  матрицы  $\Phi_s$  (32).

Е. Перейдем к краткому описанию используемой модели помехи – аддитивной смеси взаимно независимых собственного шума приемника и внешних ПП. Ее КМ всегда является эрмитовой положительно определенной матрицей полного ранга  $r = M$  [13–16], обычно допускающей представление

$$\Phi = \{\varphi_{ij}\}_{i,j=1}^M = \mathbf{I}_M + \eta \cdot \rho. \quad (33)$$

Здесь единичная  $M \times M$  матрица  $\mathbf{I}_M$  имеет смысл КМ взаимно независимых шумов временных каналов обработки с нулевым средним значением и принятой за единицу дисперсией (мощностью),  $\eta$  – относительная мощность ПП (ОПШ),

$$\rho = \{\rho_{ij}\}_{i,j=1}^M = \int_{-1/2}^{1/2} s_{norm}(f) \cdot \mathbf{x}(f) \cdot \mathbf{x}^*(f) df, \quad \rho_{ii} = 1 \quad (34)$$

– нормированная КМ между периодическими флуктуациями ПП, связанная с их доплеровским спектром  $s_{norm}(f)$  равенством Винера – Хинчина (34).

Ж. Распространенным способом задания разнообразных ПП является их аппроксимация процессами авторегрессии (АР) различного (целого) порядка  $p \geq 1$  [11, 13] со спектрами вида

$$s_{norm}(f) = \frac{c_n}{\prod_{i=1}^p |1 - \beta_i \cdot e^{-j2\pi f}|^2}, \quad (35)$$

$$\beta_i = |\beta_i| \cdot e^{j2\pi f_i}, \quad |\beta_i| < 1, \quad i \in 1, p,$$

где  $c_n$  – константа, нормирующая мощность

$$\rho_{\ell\ell} = \int_{-1/2}^{1/2} S_{norm}(f) df = 1, \quad \ell \in 1, M. \quad (36)$$

Выбором модулей и фаз коэффициентов  $\beta_i$  можно сформировать ПП с  $n \leq p$  – модальными спектрами с произвольной шириной и расположением мод на частотной оси. Методика их задания подробно описана, например, в [11].

АР ПП минимального порядка  $p = 1$  имеет спектр

$$s_{norm}(f) = \frac{c_0}{|1 - \beta_1 \cdot e^{-j2\pi f}|^2} = \frac{c_0}{1 - 2 \cdot |\beta_1| \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (f - f_1)) + |\beta_1|^2} \quad (37)$$

и экспоненциальную корреляционную функцию

$$\rho_{pq} = \rho_1^{|\tau_p - \tau_q|}, \quad \rho_1 = |\beta_1|, \quad (38)$$

где  $\rho_1$  – коэффициент корреляции отсчетов ПП, разделенных интервалом времени  $T_{av}$  (10).

АР ПП бесконечного порядка ( $p \rightarrow \infty$ ) имеет спектр [17, с. 318]

$$s_{norm}(f) = e^{a \cdot \cos 2\pi(f - f_1)} / I_0(a) \quad (39)$$

с максимумом в точке  $f = f_1$ , и нормированную КМ с элементами

$$\rho_{pq} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{a \cdot \cos 2\pi(f - f_1)}}{I_0(a)} e^{j2\pi(\tau_p - \tau_q)f} df, \quad (40)$$

которые в условиях (12) и  $f_1 = 0$  равны

$$\rho_{pq} = I_{|p-q|}(a) / I_0(a). \quad (41)$$

Здесь  $I_\nu(x)$  – модифицированная функция Бесселя  $\nu$ -го порядка,  $a$  – параметр, связанный с шириной спектра  $\Delta f$  на выбранном уровне  $1/d$  или модулем коэффициента корреляции  $\rho_1$  равенствами

$$\Delta f = \frac{1}{\pi} \arccos \left( 1 - \frac{\ln d}{a} \right), \quad |\rho_1| = I_1(a) / I_0(a). \quad (42)$$

Формула (39) описывает спектр эквидистантных по времени отсчетов непрерывного процесса с гауссовым (колокольным) спектром мощности. В ней корректно учтен известный эффект «наложения» спектров при такой дискретизации. Влияние этого эффекта тем меньше, чем уже спектр (выше коэффициент корреляции) исходного непрерывного процесса. Так, при  $|\rho_1| \geq 0.98$  элементы нормированной КМ (41) практически совпадают с существенно более просто вычисляемыми элементами гауссовых (колокольных) КМ

$$\rho_{pq} = \rho_1^{|\tau_p - \tau_q|}, \quad p, q \in 1, M. \quad (43)$$

3. На рис. 4 приведены примеры спектров (в дБ)

$$S(f) = 1 + \eta \cdot s_{norm}(f) \quad (44)$$

смеси шума и АР ПП порядка  $p \rightarrow \infty$  и  $p = 5$  с максимумом при  $f_1 = 0$  и коэффициентом между периодической корреляции  $\rho_1 = 0.99$ . Параметром семейств служит отношение помеха-шум  $\eta$ , меняющееся от 10 до 60 дБ с шагом 10 дБ. Эти спектры периодичны с единичным периодом, симметричны относительно точки  $f = 0$  и поэтому показаны только при  $f \in 0, 0.5$ .

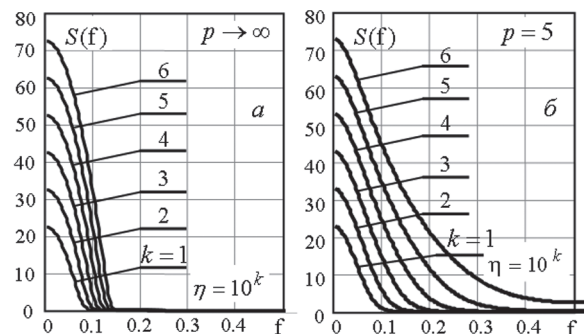


Рис. 4. Спектры смеси шума и АР ПП порядка  $p$

Видно, что рост порядка  $p$  увеличивает скорость спадания спектра на низком уровне.

**И.** Важное свойство АР ПП порядка  $p < M$  со спектрами (35) заключается в том, что матрица

$$\Omega = \{\omega_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M = \mathbf{p}^{-1}, \quad (45.a)$$

обратная  $M \times M$  КМ  $\mathbf{p}$  (34), является эрмитовой ленточной с шириной ленты  $zz = 2 \cdot p + 1$  [13],

$$\omega_{i\ell} = 0, \quad |i - \ell| > p, \quad i, \ell \in 1, M. \quad (45.б)$$

В качестве примера на рис. 5 приведены матрицы (45) размера  $8 \times 8$  с шириной ленты  $zz = 3$  (а) и  $zz = 5$ , обратные КМ  $\mathbf{p}$  (34) АР ПП порядков  $p = 1$  и  $p = 2$  соответственно при  $\rho_1 = 0.99$ .

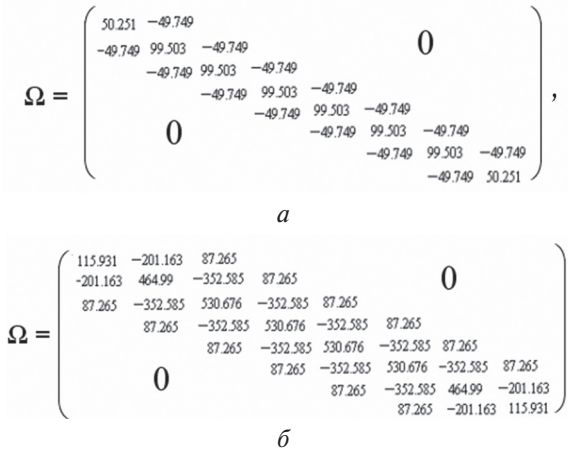


Рис. 5. Структуры матриц, обратных КМ АР ПП

Эрмитова матрица (45), как обратная положительно определенной (п. о.) КМ, также положительно определена. Поэтому она имеет (не единственный) «корень», под которым понимается любая матрица  $\mathbf{K}$ , удовлетворяющая равенству  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \Omega$ . В роли соответствующих корней широко используются **треугольные** (нижние или верхние) **матрицы** [14–16]. **Треугольные** корни эрмитовых ленточных  $M \times M$  матриц с шириной ленты  $zz = 2 \cdot p + 1$  – также ленточные с шириной ленты  $z = p + 1$ . Правые нижние треугольные корни матриц (рис. 5) показаны на рис. 6.

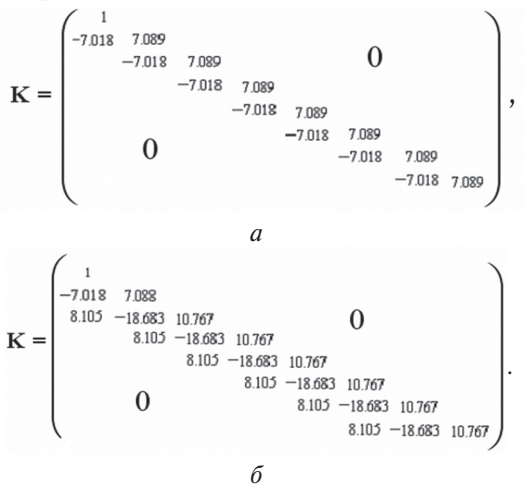


Рис. 6. Структуры нижних треугольных «корней» матриц, обратных КМ АР ПП

Очевидно, что при высокой относительной интенсивности  $\eta \gg 1$  АР ПП порядка  $p < M$  близкой к ленточной будет и матрица  $\Psi = \Phi^{-1}$ , обратная КМ вида (33) смеси шума и ПП, а также треугольные  $M \times M$  матрицы-корни  $\mathbf{H} = \{h_{i\ell}\}_{i,\ell}^M$  из нее, удовлетворяющие равенству

$$\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} = \Psi = \Phi^{-1}. \quad (46)$$

Отмеченные особенности КМ ПП, обратных к ним матриц и треугольных корней из них важны для обоснования квазиоптимальных разновидностей систем МПО и их адаптивных аналогов, рассматриваемых в последующих статьях цикла.

**3. СТРУКТУРЫ И ПАРАМЕТРЫ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ МПО ГАУССОВЫХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ГАУССОВЫХ ПОМЕХ**

**А.** Конкретизируем вид оптимальной ППС и вытекающие из нее структуры и параметры оптимальных систем МПО рассматриваемых гауссовых сигналов на фоне гауссовых помех.

В силу (6) отношение правдоподобия (2) с точностью до не зависящего от входного вектора (и потому несущественного) множителя равно

$$l(\mathbf{u}) = \exp \left\{ \mathbf{u}^* \cdot (\Phi_0^{-1} - \Phi_1^{-1}) \cdot \mathbf{u} \right\}.$$

В роли оптимальной ППС может выступать случайная величина

$$\xi(\mathbf{u}) = c \cdot \ln(l(\mathbf{u})) = c \cdot \xi_0(\mathbf{u}), \quad (47)$$

пропорциональная случайному скаляру

$$\xi_0(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p}^* \mathbf{p} = q_0 - q_1 = \mathbf{v}_0^* \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_1. \quad (48)$$

Здесь

$$\mathbf{L} = \Psi_0 - \Psi_1 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^* - \quad (49)$$

эрмитова неотрицательно определенная «решающая» [8]  $M \times M$  матрица оптимальной обработки, равная разности матриц  $\Psi_0$  и  $\Psi_1$ , обратных КМ  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  по гипотезам  $H_0$  и  $H_1$ ;

$\mathbf{R} = \{\mathbf{r}_\ell\}_{\ell=1}^r$  –  $M \times r$  матрица – «корень» из нее, образованная  $M$ -мерными столбцами  $\mathbf{r}_\ell$ , число которых совпадает с рангом  $r \in 1, M$  матрицы  $\mathbf{L}$ ;

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}^* \mathbf{u}, \quad q_\gamma = \mathbf{u}^* \Psi_\gamma \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\gamma = \mathbf{H}_\gamma \cdot \mathbf{u}, \quad (50)$$

$$\mathbf{H}_\gamma^* \cdot \mathbf{H}_\gamma = \Psi_\gamma, \quad \gamma \in 0, 1.$$

**Б.** Построенные в соответствии с (48)–(50) схемы оптимальных систем МПО показаны на рис. 7. Одинарными стрелками здесь и далее обозначаются скаляры, двойными – векторы-столбцы, зачернением их «наконечника» – эрмитово сопряжение, черными широкими стрелками – матрицы.

На этапе линейной обработки входной вектор  $\mathbf{u}$  в схемах рис. 7, а, в преобразуется в фильтрах с матричными импульсными характеристиками (МИХ)  $\mathbf{L}$  и  $\Psi_\gamma$ , а в схемах рис. 1, б, з – с МИХ, равными их «корням»  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{H}_\gamma$ ,  $\gamma \in 0, 1$ .

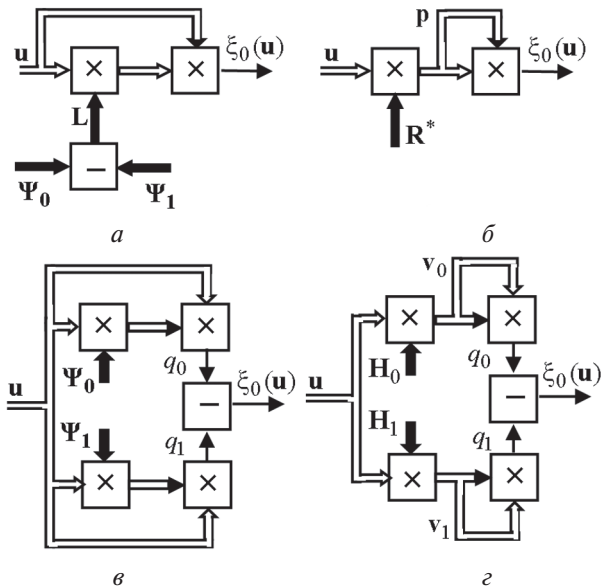


Рис. 7. Структуры оптимальных систем МПО

В. Используя для КМ сигнала представление (32.а) с матрицами  $F = \{f_\ell\}_{\ell=1}^r$  ранга  $r \in 1, M$ , составленными из  $r$   $M$ -мерных линейно независимых столбцов  $f_\ell$ , и справедливость для матрицы  $\Psi_1 = (\Phi + F \cdot F^*)^{-1}$  равенства [14–16]

$$\Psi_1 = \Psi - \Psi \cdot F \cdot Q^{-1} \cdot F^* \cdot \Psi, \quad (51)$$

$$Q = I_r + F^* \cdot \Psi \cdot F, \quad \Psi = \Phi_0^{-1},$$

оптимальную ППС (47), (48) можно также представить в виде:

$$\xi(u) = c \cdot \xi_0(u), \quad \xi_0(u) = p^* \cdot p, \quad (52)$$

$$p^* = u^* \cdot R \cdot A, \quad R = \Psi \cdot F, \quad A \cdot A^* = Q^{-1}.$$

На рис. 8 показаны варианты схем формирования вектора  $p^* = \{p_\ell^*\}_{\ell=1}^r$  произвольного размера  $r = \text{rank } R \in 1, M$ , квадрат нормы которого определяет ППС  $\xi_0(u)$ .

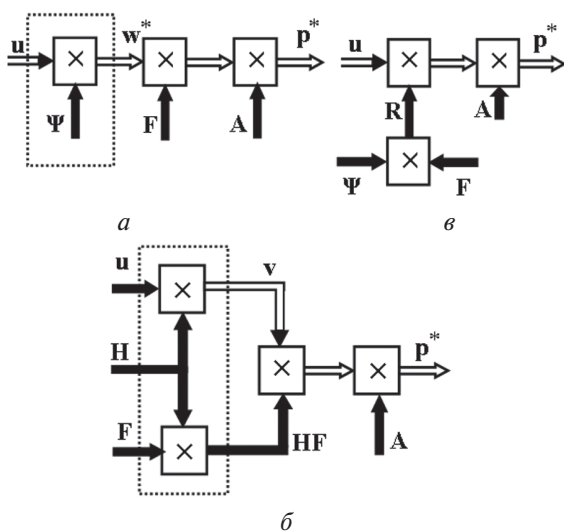


Рис. 8. Структуры и параметры линейного тракта оптимальных систем МПО

Г. В частном случае  $M \times M$  матрицы  $F$  (32) полного ранга  $r = M$  с матрицей  $T$  (29) ППС (52) и схемы рис. 8 соответствуют оптимальной обработке некогерентной пачки сигнала в представлении (30).

В силу унитарности (26) матрицы  $T$  (29) для  $M$ -мерного вектора  $p^* = \{p_\ell^*\}_{\ell=1}^M$  в этом случае справедливо также равенство

$$p^* = u^* \cdot \Psi \cdot A, \quad A \cdot A^* = Q^{-1}, \quad Q = D^{-2} + h \cdot \Psi, \quad (53)$$

позволяющее сформировать его и по более простым схемам, показанным на рис. 9. Источником упрощения служат более простые представления некогерентного сигнала (28) и корня  $T$  (27) его КМ (23).

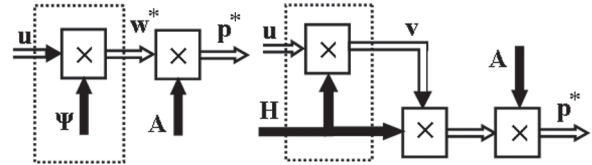


Рис. 9. Линейный тракт оптимальных систем МПО некогерентных сигналов на фоне ПП

В (53) и далее вместо абсолютной мощности  $\sigma_s^2$  импульсов пачки сигнала используется их относительная (по отношению к мощности шума приемника) мощность (ОСШ), обозначаемая через  $h$ .

Д. Для когерентной пачки сигнала с КМ (16) ранга  $r = 1$ , когда матрица  $F$  в силу (32) содержит единственный столбец

$$F = f(f_s) = \sqrt{h} \cdot z(f_s), \quad z(f_s) = D \cdot x(f_s), \quad (54)$$

а матрицы  $Q$  (51) и  $A$  (52) преобразуются в действительные скаляры, оптимальная ППС

$$\xi(u) = c_1 \cdot \xi_0(u), \quad \xi_0(u) = |p|^2, \quad (55)$$

$$p = w^* \cdot z(f_s) = v^* \cdot z_H = u^* \cdot r,$$

$$w = \Psi \cdot u, \quad v = H \cdot u, \quad z_H = H \cdot z(f_s), \quad r = \Psi \cdot z(f_s)$$

и может формироваться схемами, показанными на рис. 10 [1–5].

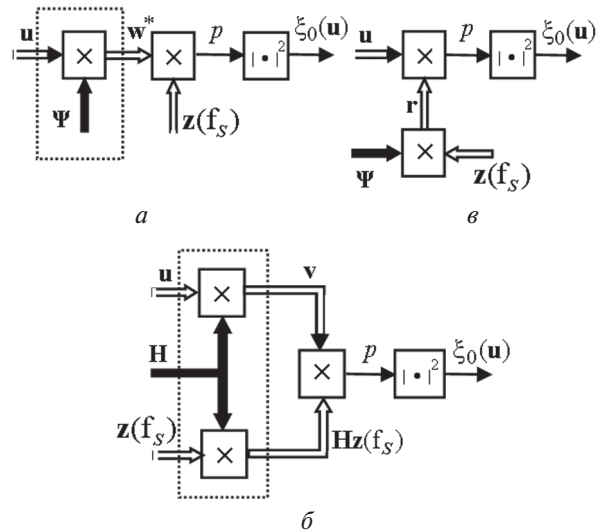


Рис. 10. Структуры и параметры оптимальных систем МПО когерентных сигналов на фоне ПП

Операции оптимальной обработки в схемах рис. 7–10 имеют глубокий физический смысл и экстремальные свойства, анализ которых составляет содержание остальной части данной статьи.

#### 4. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ ОПТИМАЛЬНОЙ МПО

А. Начнем со смысла преобразования

$$\mathbf{w}_\gamma = \left\{ w_\ell^{(\gamma)} \right\}_{\ell=1}^M = \Psi_\gamma \cdot \mathbf{u} \quad (56)$$

в схемах рис. 7–10 входного  $M$ -мерного вектора  $\mathbf{u}$  (1), (6) в фильтре с  $M \times M$  МИХ  $\Psi_\gamma$  (7.б).

В силу линейности этого преобразования  $M$ -мерный вектор  $\mathbf{w}_\gamma$  на его выходе также нормален, имеет нулевой вектор средних значений и КМ

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{w}_\gamma} &= \overline{\mathbf{w}_\gamma \cdot \mathbf{w}_\gamma^*} = \overline{\Psi_\gamma \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* \cdot \Psi_\gamma} = \Psi_\gamma \Phi_\gamma \Psi_\gamma = \\ &= \Psi_\gamma = \Phi_\gamma^{-1} = \int_{-1/2}^{1/2} S_{out}(\varphi) \cdot \mathbf{x}(\varphi) \cdot \mathbf{x}^*(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (57)$$

обратную КМ входного вектора  $\mathbf{u}$ . В связи с этим фильтр с МИХ  $\Psi_\gamma = \Phi_\gamma^{-1}$  называется **обращающим** фильтром дискретного процесса  $\mathbf{u}$  с КМ  $\Phi_\gamma$  [1–3].

На рис. 11 показана одна из множества возможных разновидностей обращающего фильтра  $M$ -элементной ( $M=4$ ) пачки, содержащего  $M$  весовых сумматоров, весами которых служат элементы соответствующей строки матрицы  $\Psi_\gamma$ .

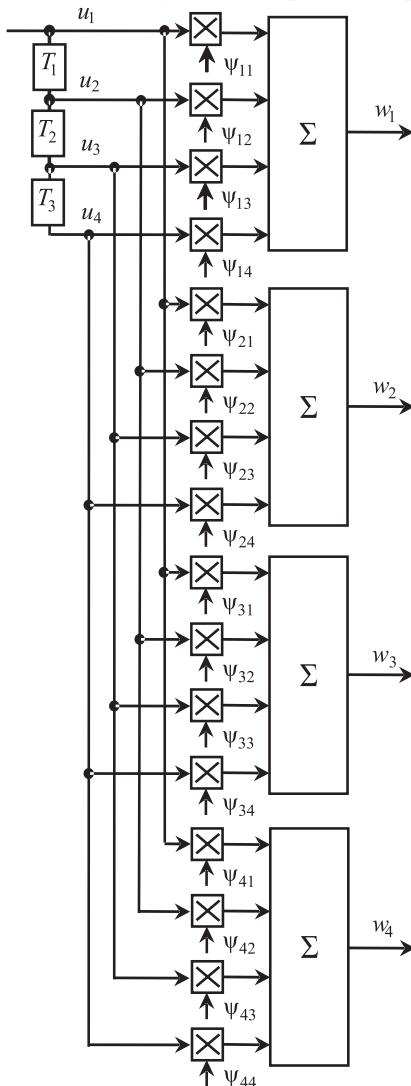


Рис. 11. Пример обращающего фильтра

Б. Название фильтра оправдывается и тем, что при определенных условиях спектр  $S_{out}(f)$  его выходного процесса  $\mathbf{w}_\gamma$  обратен спектру  $S_\gamma(f)$  входного процесса  $\mathbf{u}$ . Конкретизируем эти условия, ограничиваясь для простоты ситуацией (12), (13) постоянства интервалов зондирования.

Из (8) и (57) следует, что

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} S_{out}(\varphi) S_\gamma(f) \sigma(\varphi, f) \mathbf{x}(\varphi) \mathbf{x}^*(f) d\varphi df = \mathbf{I}_M, \quad (58.a)$$

где функция

$$\sigma(\varphi, f) = \mathbf{x}^*(\varphi) \cdot \mathbf{x}(f) = \sum_{\ell=1}^M x_\ell^*(\varphi) \cdot x_\ell(f), \quad (58.б)$$

имеющая смысл корреляции гармоник с частотами  $\varphi$  и  $f$ , в условиях (11), (12) равна

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi, f) &= \sum_{\ell=1}^M e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Delta \cdot \ell} = e^{j \cdot \pi \cdot (M+1) \Delta} \cdot \text{sum}(\Delta), \Delta = f - \varphi, \\ \text{sum}(\Delta) &= \frac{\sin(\pi \cdot M \cdot \Delta)}{\sin(\pi \cdot \Delta)}. \end{aligned} \quad (59)$$

Как видно из рис. 12, по мере роста  $M$  ширина главного луча функции (59) уменьшается, а значение максимума в точке  $\Delta=0$  растет. При этом при любых нечетных  $M=2 \cdot k-1$  интеграл

$$I(M) = \int_{-1/2}^{1/2} \text{sum}(\Delta) d\Delta = \sum_{\ell=1}^M \frac{\sin \pi(\ell - (M+1)/2)}{\pi(\ell - (M+1)/2)}$$

остается неизменным и равным  $I(M)=1$ . Это равенство можно считать справедливым и для четных  $M=2 \cdot k$  при  $k \geq 15$  (см. врезку на рис. 12).

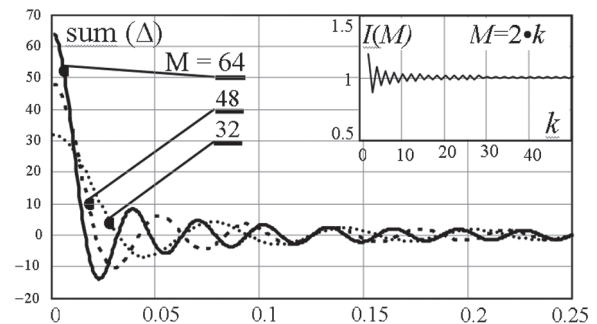


Рис. 12. Функция  $\text{sum}(\Delta)$  и интеграл  $I(M)$  от нее

Функция с такими свойствами и шириной  $2/M \ll \Delta f$  на уровне первых нулей, существенно меньшей эффективной ширины  $\Delta f$  спектра  $S_\gamma(f)$  входного процесса, может быть приближенно аппроксимирована дельта-функцией Дирака  $\text{sum}(\Delta) \approx \delta(\Delta) = \delta(f - \varphi)$ . При такой замене равенство (58) преобразуется в приближенное равенство

$$\int_{-1/2}^{1/2} S_{out}(f) \cdot S_\gamma(f) \cdot \mathbf{x}(f) \cdot \mathbf{x}^*(f) df = \mathbf{I}_M,$$

которое, как следует из (13), выполняется при

$$S_{out}(f) = 1/S_\gamma(f). \quad (60)$$



Тем самым фильтр с МИХ  $\Psi_\gamma = \Phi_\gamma^{-1}$  произвольного порядка  $M \geq 1$ , обращающий  $M \times M$  КМ  $\Phi_\gamma$  входного процесса со спектром  $S_\gamma(f)$  шириной  $\Delta f \leq 1$ , при  $M \gg 1/\Delta f$  обращает и спектр этого процесса, что согласуется с его определением «обращающий» (**inverse**).

**В.** Поскольку в линейной системе с произвольной частотной характеристикой (**ЧХ**)  $K(f)$  спектр  $S_{out}(f)$  на выходе связан со спектром  $S_{in}(f)$  на входе равенством [2–4]

$$S_{out}(f) = |K(f)|^2 \cdot S_{in}(f), \quad (61)$$

то, в силу (60), модуль **ЧХ**  $K_{inv}^{(\gamma)}(f)$  фильтра с МИХ  $\Psi_\gamma = \Phi_\gamma^{-1}$  равен

$$|K_{inv}^{(\gamma)}(f)| = 1/S_\gamma(f) = S_{out}(f) \quad (62)$$

и это равенство тем точнее, чем «сильнее» выполняется неравенство  $M \gg 1/\Delta f$  [1, 18].

В качестве примера на рис. 13 показаны модули **ЧХ**  $|K_{inv}^{(\gamma)}(f)|$ ,  $\gamma=0$  (*a*) и  $\gamma=1$  (*б*) обращающих фильтров смеси шума и **АР ПП** порядка  $p \rightarrow \infty$  (39)–(42) с коэффициентом междупериодной корреляции  $\rho_1 = 0.99$  и **ОПШ**  $\eta = 10^5$  (см. рис. 4.а) при нулевой радиальной скорости перемещения их источников, и обращающего фильтра суммы этой помеховой смеси с сигналом с аналогичной **КМ** (41), но с  $\rho_1 = 0.998$  и **ОСШ**  $h = 5$  от цели, движущейся с оптимальной ( $f_s = 0.5$ ) скоростью.

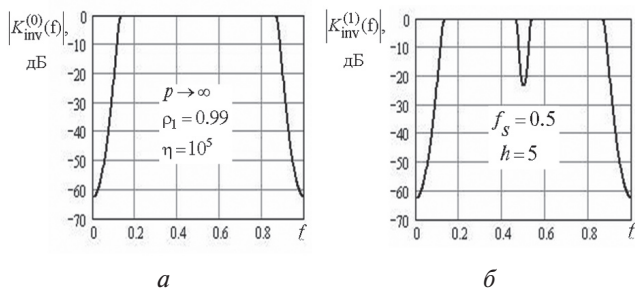


Рис. 13. Модули **ЧХ** обращающих фильтров

Аналогичные модули **ЧХ** обращающих фильтров, но для **АР ПП** порядка  $p = 5$  (см. рис. 4.б) и того же сигнала от цели, но движущейся со вдвое меньшей радиальной скоростью ( $f_s = 0.25$ ), показаны на рис. 14.

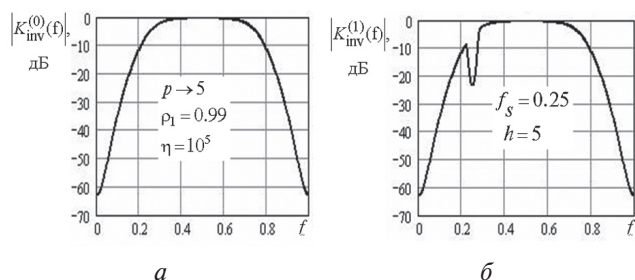


Рис. 14. Модули **ЧХ** обращающих фильтров

Из вида этих **ЧХ** можно заключить, что на первом этапе оптимальной **МПО** в схемах рис. 8.а, 9.а, и 10.а входной вектор  $\mathbf{u}$  (1) преобразу-

ется в обращающем фильтре с МИХ  $\Psi = \Phi^{-1}$  и **ЧХ**  $|K_{inv}^{(0)}(f)| = 1/S(f)$  (62), обратной спектру смеси шума и **ПП**, имеющей «провалы» на частотах «гребней» спектра **ПП** (см. рис. 4). За счет этого **максимально** подавляется помеховая компонента у входной смеси (1), что ниже поясняется более подробно.

**Г.** Важнейшее свойство обращающего фильтра заключается в (условной) **минимизации мощности** процесса на каждом из его выходов. Чтобы убедиться в этом, заметим вначале, что взаимокорреляционная матрица (**ВКМ**)

$$\Phi_{\mathbf{w}_\gamma} = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_\gamma^*} = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*} \cdot \Psi_\gamma = \Phi_\gamma \cdot \Psi_\gamma = \mathbf{I}_M$$

входного и выходного процессов равна единичной  $M \times M$  матрице  $\mathbf{I}_M$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_\ell^{(\gamma)*}} &= \Phi_\gamma \cdot \Psi_\ell^{(\gamma)} = \mathbf{e}_\ell, \\ \mathbf{w}_\ell^{(\gamma)*} &= \mathbf{u}^* \cdot \Psi_\ell^{(\gamma)}, \quad \ell \in 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (63)$$

где  $\mathbf{e}_\ell$  и  $\Psi_\ell^{(\gamma)} = \Psi_\gamma \cdot \mathbf{e}_\ell$  –  $\ell$ -е столбцы  $M \times M$  матриц  $\mathbf{I}_M$  и  $\Psi_\gamma$  соответственно.

Из равенств (63) следует, что:

1.  $\ell$ -я компонента  $w_\ell^{(\gamma)} = \mathbf{e}_\ell^* \cdot \mathbf{w}_\gamma$  выходного  $M$ -мерного вектора  $\mathbf{w}_\gamma$  обращающего фильтра некоррелирована со всеми компонентами входного вектора  $\mathbf{u}$ , кроме  $\ell$ -й;

2. Эта компонента равна взвешенной сумме  $M$  компонент входного вектора  $\mathbf{u}^*$  с весами, равными элементам  $\ell$ -го  $M$ -мерного столбца  $\Psi_\ell^{(\gamma)}$  матрицы  $\Psi_\gamma$ , являющегося решением системы уравнений  $\Phi_\gamma \cdot \Psi_\ell^{(\gamma)} = \mathbf{e}_\ell$ .

Эти условия необходимы и достаточны, чтобы квадратичная форма

$$\sigma_{\gamma_\ell}^2 = \overline{|\omega_\ell^{(\gamma)}|^2} = \Psi_\ell^{(\gamma)*} \Phi_\gamma \Psi_\ell^{(\gamma)} = \Psi_{\ell\ell}^{(\gamma)}, \quad \ell \in 1, M, \quad (64)$$

описывающая мощность  $\ell$ -й ( $\ell \in 1, M$ ) компоненты  $\omega_\ell^{(\gamma)}$  выходного вектора  $\mathbf{w}_\gamma$  обращающего фильтра, была **минимальной** по сравнению с любой другой квадратичной формой  $\mathbf{k}^* \cdot \Phi_\gamma \cdot \mathbf{k}$  с той же матрицей, но с вектором весов  $\mathbf{k} = \{k_i\}_{i=1}^M \neq \Psi_\ell^{(\gamma)}$ , который условие 1 не обеспечивает, но имеет тот же «основной» вес  $k_\ell = \Psi_{\ell\ell}^{(\gamma)} \neq 0$  [14–16]. Последнее условие исключает безусловный нулевой (тривиальный) минимум мощности помехи, доставляемый нулевым вектором весов ( $\mathbf{k} = 0$ ), который одновременно полностью подавит и полезный сигнал цели независимо от скорости ее движения.

Применительно к схемам рис. 8.а, 9.а, 10.а это означает, что процесс линейного преобразования входного вектора  $\mathbf{u}$  (1) в обращающем фильтре с МИХ  $\Psi = \Phi^{-1}$  и **ЧХ** (62), обратной спектру смеси шума и **ПП**, сопровождается (условной) минимизацией мощности **помех** на его выходах (их наилуч-

шей нетривиальной компенсацией). Такой фильтр объединяет  $M$  оптимальных компенсаторов (подавителей) помех (например, трансверсальных фильтров схемы рис. 11) с **одинаковой** кратностью междупериодной компенсации  $N = M - 1$ , формирующих весовые суммы  $w_\ell^* = \mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\Psi}_\ell$  с вектором весов, пропорциональным  $\ell$ -м столбцу  $\boldsymbol{\Psi}_\ell$  ( $\ell \in 1, M$ ) матрицы  $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}$ , обратной **КМ** помех.

Д. Перейдем теперь к смыслу преобразования

$$\mathbf{v}_\gamma = \left\{ v_\ell^{(\gamma)} \right\}_{\ell=1}^M = \mathbf{H}_\gamma \cdot \mathbf{u} \quad (65)$$

входного  $M$ -мерного вектора  $\mathbf{u} \sim CN(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}_\gamma)$  в схемах рис. 7.з, 8.б, 9.б, 10.б в фильтре с  $M \times M$  **МИХ**  $\mathbf{H}_\gamma$  – «корне» матрицы  $\boldsymbol{\Psi}_\gamma = \boldsymbol{\Phi}_\gamma^{-1}$  (50).

Как и вектор  $\mathbf{w}_\gamma$  (56), выходной  $M$ -мерный вектор  $\mathbf{v}_\gamma$  этого фильтра также нормален, имеет нулевой вектор средних значений и **КМ**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{v}_\gamma} &= \overline{\mathbf{v}_\gamma \cdot \mathbf{v}_\gamma^*} = \overline{\mathbf{H}_\gamma \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{H}_\gamma^*} = \\ &= \mathbf{H}_\gamma \cdot \boldsymbol{\Phi}_\gamma \cdot \mathbf{H}_\gamma^* = \mathbf{H}_\gamma \mathbf{H}_\gamma^{-1} \mathbf{H}_\gamma^{*-1} \mathbf{H}_\gamma^* = \mathbf{I}_M, \end{aligned} \quad (66)$$

совпадающую с **КМ**  $M$  некоррелированных отсчетов **белого** шума равной (единичной) мощности в (33). В связи с этим фильтры с **МИХ**  $\mathbf{H}_\gamma$ , удовлетворяющими равенству (50), называются **обеляющими** для процессов с **КМ**  $\boldsymbol{\Phi}_\gamma$  [1–3].

Е. Равенство (50) для эрмитовой положительной определенной (**э.п.о.**)  $M \times M$  матрицы  $\boldsymbol{\Psi}_\gamma = \boldsymbol{\Phi}_\gamma^{-1}$  может обеспечиваться матрицами – «корнями» различного вида. Практически наиболее удобны сомножители ее разложений **Холеского** вида

$$\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} = \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^*, \quad (67)$$

$$\mathbf{N} = \{ n_{ij} \}_{i,j=1}^M, \mathbf{H} = \{ h_{ij} \}_{i,j=1}^M, n_{ij} = h_{ij} = 0, j > i,$$

где  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{N}$  – **нижние треугольные** матрицы с действительными положительными диагональными элементами (рис. 15), существующие для любых **э.п.о.** матриц [14–16], в том числе **КМ** и обратных им.



Рис. 15. Треугольные верхне-нижнее и нижне-верхнее разложения **э.п.о.** матрицы  $\boldsymbol{\Psi}$

Нетрудно убедиться, что и для **КМ**

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{v}_\gamma} = \overline{\mathbf{v}_\gamma \cdot \mathbf{v}_\gamma^*} = \overline{\mathbf{N}_\gamma^* \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{N}_\gamma}$$

вектора

$$\mathbf{v}_\gamma = \left\{ v_\ell^{(\gamma)} \right\}_{\ell=1}^M = \mathbf{N}_\gamma^* \cdot \mathbf{u}$$

на выходе фильтра с верхней треугольной **МИХ**  $\mathbf{N}_\gamma^*$  справедливо равенство

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{v}_\gamma} = \mathbf{I}_M,$$

в связи с чем он также является обеляющим.

На рис. 16 показаны возможные разновидности обеляющих фильтров  $M$ -элементных ( $M = 4$ ) пачек с нижней и верхней треугольными **МИХ**  $\mathbf{H}$  (а) и  $\mathbf{N}^*$  (б) соответственно. Они содержат  $M$  весовых сумматоров, весами которых служат поддиагональные и диагональные элементы соответствующей строки матрицы  $\mathbf{H}$  (а) и диагональные и наддиагональные элементы соответствующей строки матрицы  $\mathbf{N}^*$  (б).

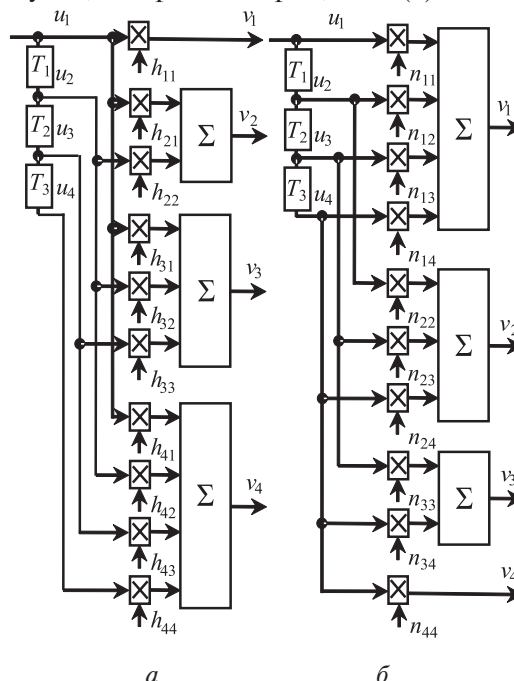


Рис. 16. Разновидности обеляющих фильтров

Ж. Из (13), (57) и (66) следует, что спектр процесса на выходе таких фильтров

$$S_{out}(f) = 1, \quad (68)$$

что также согласуется с их определением «обеляющих» (**whitening**).

В соответствии с (61) для модуля  $|K_{white}^{(\gamma)}(f)|$  его **ЧХ** справедливо равенство

$$|K_{white}^{(\gamma)}(f)| = 1 / \sqrt{S_\gamma(f)} = \sqrt{K_{inv}^{(\gamma)}(f)}. \quad (69)$$

Поэтому в условиях примеров п. 4.В они совпадают с показанными на рис. 13, 14 в логарифмическом масштабе модулями **ЧХ** обрабатывающих фильтров, но числа на оси ординат должны быть уменьшены вдвое.

Тем самым в схемах рис 8.б, 9.б, 10.б входной вектор  $\mathbf{u}$  (1) преобразуется в обеляющем фильтре с **ЧХ**, обратной корню из спектра помехи. Как и **ЧХ** обрабатывающего фильтра, **ЧХ** обеляющего также имеет «провалы» на частотах «гребней» спектра **ПП**, которые, однако, при наличии **ПП** менее глубоки. Поэтому помеха подавляется в нем не сильнее, чем в обрабатывающем, но по-прежнему **экстремально** в смысле, конкретизируемом ниже.

З. Для фильтра с **МИХ**  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\gamma$  (50), (67) (рис. 14, а) **ВКМ** процессов на его входах и выходах

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{u}\mathbf{v}_\gamma} = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_\gamma^*} = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{H}_\gamma^*} = \boldsymbol{\Phi}_\gamma \cdot \mathbf{H}_\gamma^* = \mathbf{H}_\gamma^{-1}$$

равна нижней треугольной матрице  $\mathbf{H}_\gamma^{-1}$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\ell) \cdot \mathbf{v}_\ell^{(\gamma)*} &= \Phi_\gamma(\ell) \cdot \mathbf{h}_\ell^{(\gamma)} = (1/h_{\ell\ell}) \cdot \mathbf{e}_\ell^{(\ell)}, \\ \mathbf{v}_\ell^{(\gamma)*} &= \mathbf{u}(\ell)^* \cdot \mathbf{h}_\ell^{(\gamma)}, \quad \ell \in 1, M. \end{aligned} \quad (70.a)$$

Здесь  $\mathbf{u}(\ell) = \{u_i\}_{i=1}^\ell$  –  $\ell$ -мерный вектор из  $\ell$  первых компонент входного  $M$ -мерного вектора  $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^M$ ;  $\Phi_\gamma(\ell) = \{\phi_{ij}^{(\gamma)}\}_{i,j=1}^\ell$  –  $\ell \times \ell$  главная (угловая) подматрица  $M \times M$  КМ  $\Phi_\gamma$ ;  $\mathbf{h}_\ell^{(\gamma)}$  – вектор из  $\ell$  первых компонент  $\ell$ -го столбца верхней треугольной матрицы  $\mathbf{H}_\gamma^*$ ;  $\mathbf{e}_\ell^{(\ell)}$  –  $\ell$ -й столбец единичной  $\ell \times \ell$  матрицы  $\mathbf{I}_\ell$  (с единственной ненулевой последней компонентой, равной единице).

Из равенств (70.a) следует, что:

1.  $\ell$ -я ( $\ell \in 1, M$ ) компонента  $v_\ell^{(\gamma)}$  выходного вектора  $\mathbf{v}_\gamma$  некоррелирована со всеми **предшествующими** компонентами  $u_i$  ( $i \in 1, \ell-1$ ) входного вектора  $\mathbf{u}$ .

2. Эта компонента равна взвешенной сумме первых  $\ell$  компонент входного вектора  $\mathbf{u}$  с весами, равными элементам  $\ell$ -мерного вектора  $\mathbf{h}_\ell^{(\gamma)}$ , являющегося решением системы линейных уравнений

$$\Phi_\gamma(\ell) \cdot \mathbf{h}_\ell^{(\gamma)} = (1/h_{\ell\ell}) \cdot \mathbf{e}_\ell^{(\ell)}.$$

Эти условия необходимы и достаточны, чтобы квадратичная форма

$$\sigma_{\gamma\ell}^2 = \left| \mathbf{v}_\ell^{(\gamma)} \right|^2 = \mathbf{h}_\ell^{(\gamma)*} \cdot \Phi_\gamma(\ell) \cdot \mathbf{h}_\ell^{(\gamma)} = 1, \quad \ell \in 1, M, \quad (70.b)$$

описывающая мощность  $\ell$ -й ( $\ell \in 1, M$ ) компоненты  $v_\ell^{(\gamma)}$  выходного вектора  $\mathbf{v}_\gamma$  (65) обесцеляющего фильтра, была **минимальной** по сравнению с любой другой квадратичной формой  $\mathbf{k}^* \cdot \Phi_\gamma(\ell) \cdot \mathbf{k}$  с той же  $\ell \times \ell$  матрицей  $\Phi_\gamma(\ell)$ , но с  $\ell$ -мерным вектором весов  $\mathbf{k} = \{k_i\}_{i=1}^\ell \neq \mathbf{h}_\ell^{(\gamma)}$ , который не обеспечивает условие 1, но имеет тот же «основной» вес  $k_\ell = h_{\ell\ell}^{(\gamma)} \neq 0$  [14–16].

Как и для обращаемого фильтра, минимум (70.b) – условный: вес  $\ell$ -й компоненты входного процесса в весовой сумме  $v_\ell^{(\gamma)} = \mathbf{h}_\ell^{(\gamma)*} \cdot \mathbf{u}(\ell)$  удовлетворяет условию  $k_\ell = h_{\ell\ell}^{(\gamma)} \neq 0$ .

Применительно к схемам рис. 8, в, 9, б, 10, в это означает, что процесс преобразования входной смеси  $\mathbf{u}$  (1) в обесцеляющем фильтре с **нижней** треугольной  $M \times M$  МИХ  $\mathbf{H}$  (67) и ЧХ (69), обратной корню из спектра смеси шума и ПП, сопровождается (условной) минимизацией мощности **помехи** на его выходах. Эта минимизация обеспечивается  $M$  компенсаторами (подавителями) помехи (в частности, трансверсальными фильтрами) с последовательно **возрастающей** кратностью междупериодной компенсации  $N = \ell - 1$ ,  $\ell \in 1, M$  (рис. 16, а), формирующими весовые суммы  $v_\ell = \mathbf{h}_\ell^* \cdot \mathbf{u}(\ell)$  с  $\ell$ -мерными векторами весов  $\mathbf{h}_\ell^*$ , образованными поддиагональными и диагональным элементом  $\ell$ -й ( $\ell \in 1, M$ ) строки нижнего треугольного сомножителя  $\mathbf{H}$  (67) матрицы  $\Psi$ , обратной КМ помех  $\Phi$ .

В обесцеляющем фильтре (рис. 16, б) с  $M \times M$  верхней треугольной МИХ  $\mathbf{N}^*$  (67) также объединены  $M$  компенсаторов помех, но с последовательно **убывающей** кратностью компенсации  $N = M - \ell$ ,  $\ell \in 1, M - 1$ , минимизирующих мощность помехи на его выходах.

Поскольку кратность компенсации помех в обесцеляющих фильтрах не превосходит используемой в компенсаторах обращаемого фильтра, мощность помехи на выходах обесцеляющих фильтров не может быть меньше, чем на соответствующих выходах обращаемого (при выровненных «основных» весах).

**И.** Проведенное рассмотрение показывает, что в схеме рис. 10, б в целом фактически реализуется классический метод **В. А. Котельникова**, предусматривающий обеление (декорреляцию) отсчетов помехи (преобразование принимаемой пачки в обесцеляющем фильтре основного тракта приема), коррекцию опорного сигнала (преобразование  $\mathbf{z}_H(f_s) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{z}(f_s)$  в обесцеляющем фильтре тракта опорного сигнала) и последующую **согласованную** обработку  $p = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{z}_H$  на фоне белого шума сигнала, прошедшего обесцеляющий фильтр основного тракта приема [2–6].

**К.** Перейдем к смыслу остальных операций оптимальной МПО, начав со схемы рис. 10, в обработки **когерентного** сигнала. В ней входной вектор преобразуется в настроенном на частоту сигнала  $f_s$  фильтре с ИХ (весовым вектором)  $\mathbf{r} = \Psi \cdot \mathbf{z}(f_s)$  (55) и ЧХ, квадрат модуля которой

$$kp(f, f_s) = \left| \mathbf{x}^*(f) \cdot \mathbf{r}(f_s) \right|^2 = \left| \mathbf{x}^*(f) \cdot \Psi \cdot \mathbf{z}(f_s) \right|^2, \quad (71)$$

зависит не только от  $f_s$ , но и от формы спектра помехи. Примеры ЧХ (71) оптимальных фильтров размеров  $M=32$  и  $M=64$  при  $f_s=0.25$ , АР ПП порядков  $p \rightarrow \infty$  и  $p=5$  с коэффициентами междупериодной корреляции  $\rho_1=0.99$  мощностью  $\eta=10^2, 10^4, 10^6$  (рис. 4) показаны на рис. 17.

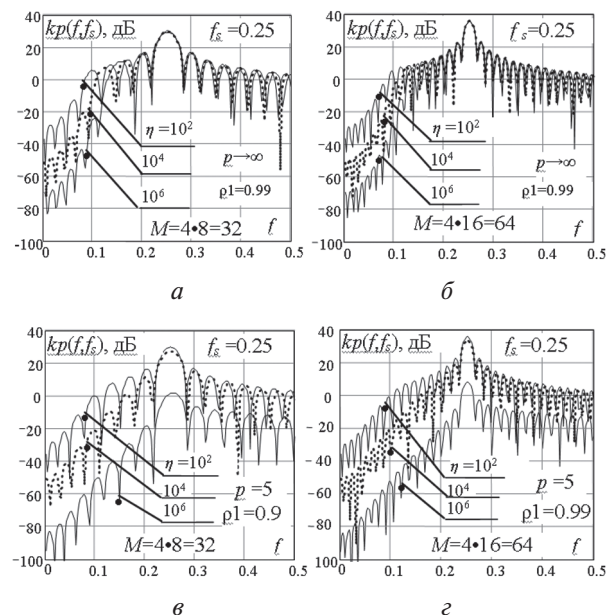


Рис. 17. Квадраты модулей ЧХ оптимальных фильтров

Видно, что в каждой из оптимальных **ЧХ** сформирован «провал» в зоне гребня спектра **ПП**, который «отслеживает» форму этого гребня («углубляется» с ростом интенсивности **ПП**). За счет этого спектр (61) помехи

$$S_{out}(f, f_s) = S(f) \cdot kp(f, f_s) = S(f) \cdot |x^*(f) \cdot r(f_s)|^2 \quad (72)$$

на выходе оптимального фильтра даже при произвольной интенсивности **ПП** может быть таким же, как и при их отсутствии. Примеры таких ситуаций приведены на рис. 18, *а, б*, где показаны спектры (72) на выходе оптимального фильтра размеров  $M = 32$  и  $M = 64$  при наличии на входе **ПП** с гауссовым спектром (**АР ПП** порядка  $p \rightarrow \infty$ ) с  $\rho_1 = 0.99$  и  $\eta = 10$  и  $60$  (дБ).

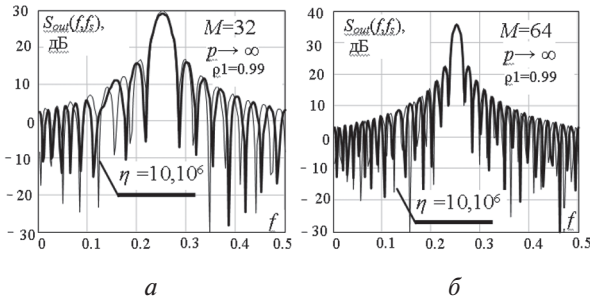


Рис. 18. Спектры помех на выходе оптимальных фильтров ( $f_s = 0.25$ )

В этих случаях оптимальный фильтр полностью нейтрализует **ПП** (компенсирует их) и когерентно накапливает импульсы пачки полезного сигнала, обеспечивая такие же показатели обработки, как и в отсутствие **ПП**. Это происходит тогда, когда полезный сигнал имеет нормированную доплеровскую частоту  $f_s$ , на которой спектр помехи на входе  $S(f_s) \approx 1$  (0 дБ) (как, например, на рис. 4, *а*).

На рис. 19 *а, б* показаны аналогичные семейства выходных спектров помех, когда входной является смесь шума и **АР ПП** порядка  $p = 5$  с относительной интенсивностью  $\eta = 10$  и  $60$  (дБ).

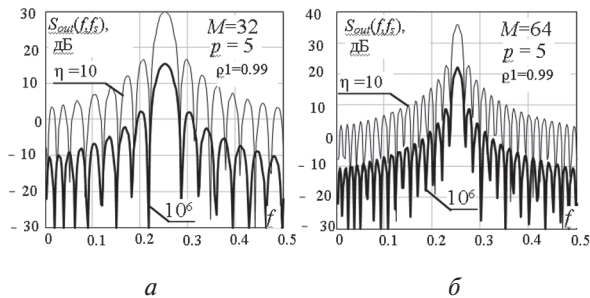


Рис. 19. Спектры помех на выходе оптимальных фильтров ( $f_s = 0.25$ )

Здесь входной спектр помеховой смеси на частоте  $f = f_s$  настройки фильтра при  $\eta = 10$  дБ близок к 0 дБ, а при  $\eta = 60$  дБ – к 15 дБ (рис. 4, *б*). Примерно на столько же на этой частоте выходной спектр при  $\eta = 60$  дБ меньше, чем при  $\eta = 10$  дБ.

**Л.** Причину уменьшения можно пояснить, анализируя квадратичную форму

$$q_\Psi(f) = x^*(f) \cdot \Psi \cdot x(f), \quad (73)$$

имеющую, в частности, смысл **ЧХ** оптимального фильтра когерентного сигнала при неподвижной антенне ( $z(f_s) = x(f_s)$ ) в точках  $f = f_s \in -1/2, 1/2$  (см. (71)). Используя (57)–(60), ее можно записать как

$$q_\Psi(f) = \int_{-1/2}^{1/2} 1/S(\varphi) \cdot |\sigma(f, \varphi)|^2 d\varphi, \quad (74)$$

$$|\sigma(f, \varphi)|^2 = \text{sum}^2(\Delta) = \left| \frac{\sin(\pi \cdot M \cdot \Delta)}{\sin(\pi \cdot \Delta)} \right|^2, \Delta = f - \varphi.$$

Последняя функция при  $M \gg 1/\Delta f$  приближенно аппроксимируется дельта – функцией  $\delta(\Delta) = \delta(f - \varphi)$  (см. п. 4.Б), но с коэффициентом пропорциональности  $J = \int_{-1/2}^{1/2} \text{sum}^2(\Delta) d\Delta = M$ . При этом равенства (71) – (73) можно записать в виде

$$q_\Psi(f) = x^*(f) \cdot \Psi \cdot x(f) \approx M/S(f), \quad (75a)$$

$$kp(f, f) \approx M^2/S^2(f), S_{out}(f, f) \approx M^2/S(f), \quad (75б)$$

полностью объясняющем значения кривых рис. 17, 18, 19 в точке  $f = f_s$ .

**М.** Мощность помехи  $P_{clut}(f_s)$  на выходе фильтра с произвольной **ИХ**  $k(f_s)$

$$P_{clut}(f_s) = \int S_{out}(f, f_s) df = \int S(f) \cdot kp(f, f_s) df = \int S(f) \cdot |x^*(f) \cdot k(f_s)|^2 df$$

с учетом (8) равна

$$P_{clut}(f_s) = k^*(f_s) \cdot \int S(f) \cdot x(f) \cdot x^*(f) df \cdot k(f_s) = k^*(f_s) \cdot \Phi \cdot k(f_s). \quad (76)$$

Для оптимального фильтра с **ИХ** (весовым вектором)  $k(f_s) = r(f_s)$  (55) при неподвижной антенне ( $z(f_s) = x(f_s)$ ) эта мощность

$$P_{clut}(f_s) = r^*(f_s) \cdot \Phi \cdot r(f_s) = z^*(f_s) \cdot \Psi \cdot z(f_s) = q_\Psi(f_s) \approx M/S(f_s) \quad (77)$$

обратно пропорциональна значению входного спектра помехи на частоте  $f = f_s$  настройки фильтра. Это, однако, не означает, что рост мощности **ПП** на входе оптимального фильтра, уменьшающий мощность помехи на его выходе, будет увеличивать выходное отношение сигнал/(помеха + шум) (**ОСПШ**)  $\mu = (P_{sig}/P_{clut})$ , поскольку в этом случае выходная мощность рассматриваемого сигнала будет уменьшаться еще быстрее. В соответствии с (76), (16), (71), (75) она равна

$$P_{sig}(f_s) = r^*(f_s) \cdot \Phi \cdot r(f_s) = h \cdot r^*(f_s) \cdot z(f_s) \cdot z^*(f_s) \cdot r(f_s) = h \cdot kp(f_s, f_s) \approx h \cdot M^2/S^2(f_s) \quad (78)$$

и, следовательно, обратно пропорциональна квадрату значения спектра помехи на частоте настройки фильтра. Поэтому выходное **ОСПШ**

$$\begin{aligned} \mu &= h \cdot \mu_n, \\ \mu_n &= \frac{\mathbf{r}^*(f_s) \cdot \mathbf{z}(f_s) \cdot \mathbf{z}^*(f_s) \cdot \mathbf{r}(f_s)}{\mathbf{r}^*(f_s) \cdot \Phi \cdot \mathbf{r}(f_s)} = \quad (79) \\ &= \mathbf{z}^*(f_s) \cdot \Psi \cdot \mathbf{z}(f_s) \approx M/S(f_s) > 0 \end{aligned}$$

оптимального для сигнала с частотой  $f_s$  фильтра пропорциональна мощности помехи (77) и тем меньше, чем выше значение спектра ПП  $S(f_s) \geq 1$  на этой частоте, что физически вполне естественно.

**Н.** Выходное ОСПШ (79) оптимального фильтра больше выходного ОСПШ любого другого линейного фильтра с ИХ  $\mathbf{k}(f_s) \neq \alpha \cdot \mathbf{r}(f_s)$ , неколлинеарной  $\mathbf{r}(f_s)$  (55). Этот известный факт следует из справедливости равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}(f_s) &= \mu_n \cdot \mathbf{r}(f_s), \quad \mathbf{C} = \Psi \mathbf{z}(f_s) \cdot \mathbf{z}^*(f_s), \\ \mathbf{r}(f_s) &= \Psi \mathbf{z}(f_s), \end{aligned}$$

означающих, что скаляр  $\mu_n > 0$  (79) является собственным значением, а вектор  $\mathbf{r}(f_s)$  – соответствующим ему собственным вектором матрицы  $\mathbf{C}$ . Так как ранг этой матрицы равен 1, то все ее остальные собственные значения равны нулю. Поэтому  $\mu_n > 0$  является максимальным собственным значением этой матрицы и, следовательно, максимумом отношения квадратичных форм (обобщенного отношения Рэлея) в (79), достижимым только на соответствующих собственных векторах вида  $\alpha \cdot \mathbf{r}(f_s)$  ( $\alpha \neq 0$ ), коллинеарных вектору  $\mathbf{r}(f_s)$  [14–16].

**П.** Обсудим в заключение особенности оптимальной обработки некогерентных сигналов, образованных суммой взаимно независимых когерентных слагаемых (24), в схемах рис. 8, 9. Как и при обработке когерентных, в них также предусматривается минимизация (условная, п.п. 4. Г, 3) мощности ПП (их компенсация) обрабатываемыми (а) или обесвечиваемыми (б) фильтрами. В схемах рис. 8, кроме того, взаимно независимые когерентные слагаемые некогерентного сигнала (30) когерентно накапливаются в соответствующих согласованных фильтрах с ИХ  $\mathbf{z}(f_\ell)$  (рис. 8, а) или  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{z}(f_\ell)$  (рис. 8, б) ( $\ell \in 1, M$ ), в результате чего максимизируются ОСПШ для каждого из них. Соответствующие согласованные фильтры отсутствуют в схеме рис. 9, поскольку максимальное ОСПШ для слагаемых, представляющих собой столбцы единичной  $M \times M$  матрицы  $\mathbf{I}_M$  (27), обеспечивается уже на выходе обрабатывающего фильтра (а) или двух последовательно включенных обесвечивающих (б).

Для конкретизации роли матрицы  $\mathbf{A}$  – «корня» матрицы  $\mathbf{Q}^{-1} = (\mathbf{D}^{-2} + h \cdot \Psi)^{-1}$  (53) в схемах рис. 8, 9 – рассмотрим оптимальную МПО «слабых» и «сильных» некогерентных сигналов, когда для матрицы  $\mathbf{Q}^{-1}$  допустимы приближенные равенства  $\mathbf{Q}^{-1} \approx \mathbf{D}^2$  и  $\mathbf{Q}^{-1} \approx (1/h) \cdot \Phi$  соответственно. В этих случаях оптимальная ППС в силу (53) пропорциональна значению

$$\xi_0(\mathbf{u}) = \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{w} = \sum_{\ell=1}^M d_\ell^2 \cdot |w_\ell|^2, \quad \mathbf{w} = \{w_\ell\}_{\ell=1}^M = \Psi \cdot \mathbf{u} \quad (80)$$

при «слабом» некогерентном сигнале и

$$\begin{aligned} \xi_0(\mathbf{u}) &= \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v} = \sum_{\ell=1}^M |v_\ell|^2, \quad (81) \\ \mathbf{v} &= \{v_\ell\}_{\ell=1}^M = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

при «сильном» некогерентном сигнале.

Построенные по (80), (81) «квазиоптимальные» системы МПО гауссовых некогерентных сигналов на фоне гауссовых ПП показаны на рис. 20.

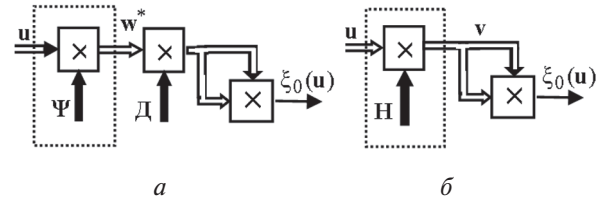


Рис. 20. Квазиоптимальная обработка «слабых» (а) и «сильных» (б) некогерентных сигналов

В них МПО «слабых» некогерентных сигналов сводится к некогерентному накоплению (суммированию квадратов модулей) выходных сигналов обрабатывающего, а «сильных» – обесвечивающего фильтра ПП. В связи с этим матрица  $\mathbf{A}$  в схемах рис. 9 играет роль оптимального регулятора степени преобразования спектра ПП в соответствии с уровнем некогерентного сигнала – от обращения спектра ПП при «слабом» сигнале до обесвечивания – при «сильном».

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**А.** Проведенный в статье обзор и анализ структур, параметров, физического смысла и экстремальных свойств оптимальных систем МПО систематизирует известные способы и средства достижения потенциальных возможностей междупериодной обработки гауссовых когерентных и некогерентных сигналов на фоне гауссовых собственных шумов приемника и пассивных помех от внешних источников. Эти способы и средства можно кратко свести к следующим.

Статистически оптимальная МПО гауссовых когерентных сигналов (14)–(21) и некогерентных, представляющих собой аддитивную смесь взаимно независимых когерентных (22)–(30), на фоне гауссовых шума и ПП (3)–(7), (33) предусматривает этапы линейной и нелинейной обработки.

Первый этап для когерентных сигналов заключается в преобразовании вектора входных воздействий в линейном фильтре (рис. 10.б), максимизирующем энергетическое отношение сигнал/(помеха + шум) (ОСПШ), а для некогерентных – в преобразовании этого вектора в наборе линейных фильтров (рис. 8.в), максимизирующих ОСПШ для каждого из их независимых когерентных слагаемых. Второй этап для когерентного сигнала заключается в сравнении с порогом квадрата модуля (55) результата линейной обработки, а для некогерентного – в сравнении с порогом результата некогерентного накопления (суммы квадратов

модулей) (52) нормированных выходных сигналов набора линейных фильтров его когерентных слагаемых.

Энергетическое **ОСПШ** для  $M$ -элементной пачки когерентного сигнала, как и для независимых  $M$ -элементных когерентных слагаемых некогерентного, максимизируется линейным фильтром с оптимальной  $M$ -мерной импульсной характеристикой (**ИХ**) (п. 4.Н). Такую **ИХ** имеет, в частности, фильтр, образованный последовательным соединением **обращающего** (п. 4.А) фильтра помех с  $M \times M$  матричной **ИХ** (**МИХ**), **обратной**  $M \times M$  корреляционной матрице (**КМ**) помех (33), и фильтра с  $M$ -элементной **ИХ** (54), согласованной с соответствующей когерентной пачкой ожидаемого сигнала, который максимизирует энергетическое отношение сигнал/шум (**ОСШ**) в отсутствие **ПП**.

Обращающий фильтр помехи преобразует входной  $M$ -мерный вектор помехи с произвольной **КМ** в выходной  $M$ -мерный вектор с **КМ**, обратной входной (п. 4. А). Это преобразование сопровождается оптимальной нетривиальной минимизацией мощности помех (п. 4. Г) на выходах набора из  $M$  фильтров подавления помех равного порядка (кратности)  $N = M - 1$  (рис. 11) с **ИХ**, равной соответствующей  $M$ -мерной строке матрицы, обратной входной **КМ** помех. Частотная характеристика (**ЧХ**) **обращающего** фильтра имеет «провалы» в зоне «гребней» энергетического спектра входного процесса (рис. 13). Этот «провал» зависит от интенсивности и формы спектра помех и при определенных условиях (п. 4.В) обратен ему (62).

Функции **обращающего** фильтра могут быть выполнены двумя последовательно соединенными **обеляющими** фильтрами помех. **МИХ** первого из них пропорциональна (неединственному) матричному «корню» (50) из  $M \times M$  **МИХ** **обращающего** фильтра, а второго – эрмитово сопряжена с **МИХ** первого. В роли этих **МИХ** могут выступать, в частности, сомножители **Холецкого** верхнее – нижнего и нижнее – верхнего **треугольных** разложений **МИХ** **обращающего** фильтра (матрицы, обратной  $M \times M$  **КМ** помех) (рис. 15). **Обеляющий** фильтр преобразует входной  $M$ -мерный вектор коррелированных отсчетов помехи в выходной  $M$ -мерный вектор со взаимно некоррелированными компонентами равной (единичной) мощности (п.4.Д). Это преобразование сопровождается оптимальной нетривиальной минимизацией мощности помех (п. 4. З) на выходах набора из  $M$  фильтров подавления помех порядка (кратности)  $N \in 0, M - 1$  с  $(N + 1)$ -мерными **ИХ**, образованными ненулевыми элементами соответствующих строк **треугольных** **МИХ** **обеляющих** фильтров (рис. 16).

**Б.** Точная реализация оптимальной обработки могла бы оказаться весьма сложной даже в рассмотренных гипотетических условиях точного знания статистических характеристик (**КМ**) гауссовых входных воздействий. Наиболее сложные операции обращения или обеления помехи, тре-

бующие порядка  $M^2$  умножений (рис. 11, 16) в каждом элементе разрешения по дальности с типичной для практики временной протяженностью от единиц до долей мкс. В реальных условиях априорной неизвестности и изменчивости **КМ** эти операции значительно усложняются из-за необходимости вводить дополнительно еще более емкие по вычислительным затратам операции оценивания неизвестных параметров, предусматриваемые вторым этапом «адаптивного байесова подхода [5, с.101]». В то же время эти затраты в типичных ситуациях существенно нестационарных по дальности и (или) азимуту **ПП** могут не дать положительного эффекта из-за плохого соотношения между числом параметров, подлежащих оцениванию, и доступным объемом классифицированной обучающей выборки, пригодной для решения этой задачи. Именно этим можно, вероятно, объяснить осторожность многих разработчиков, стремящихся повысить эффективность нетраекторной **СДЦ** на фоне **ПП** за счет улучшения неадаптивных разновидностей систем **МПО** (в частности, цифровых фильтровых или компенсационно-фильтровых на основе неадаптивных систем **ЧПВ** различной кратности [2–4, 10, 17–19]).

**В.** Более перспективным и универсальным представляется, однако, другой подход. Он связан с неравенством вкладов в общий эффект различных оптимальных операций, вследствие чего близкие к потенциально возможным характеристики могут обеспечить и не строго оптимальные (квазиоптимальные) системы **МПО** с существенно меньшим числом параметров, подлежащих оцениванию на этапе адаптации. Их разработке, сравнительному анализу, обоснованию рациональных способов адаптивной реализации и результатам экспериментальной проверки посвящены следующие статьи данного цикла.

#### Литература.

- [1] *Леховицкий Д. И.* СДЦ в импульсных РЛС: Почти без формул, но с картинками. 1. Оптимальная междупериодная обработка гауссовых сигналов на фоне гауссовых пассивных помех. – Х.: Прикладная радиоэлектроника. Т. 5, 2006, № 2. – С. 192–200.
- [2] Радиоэлектронные системы. Основы построения и теория: Справочник/ Я. Д. Ширман, С. Т. Багдасарян, А. С. Маляренко, Д. И. Леховицкий, С. П. Лещенко и др. / Под ред. Я. Д. Ширмана. – М.: Радиотехника, 2007.
- [3] *Алмазов В. Б., Белов А. А., Кокин В. Н., Рябуха В. П.* Теоретические основы радиолокации: Учебное пособие. – Х.: ХВУ, 1996.
- [4] *Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. – М.: Сов. радио, 1960. – 448 с.
- [5] *Репин В. Г., Тартаковский Г. П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. – М.: Сов. радио, 1977.
- [6] *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Книга третья. – М.: Сов. радио, 1976. – 288 с.

- [7] Стратонович Р. Л. Принципы адаптивного приема. – М.: Сов. радио, 1973. – 144 с.
- [8] Ширман Я. Д. Разрешение и сжатие сигналов. – М.: Сов. радио, 1974.
- [9] Монзинго Р. Д., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки. Введение в теорию. /Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1986.
- [10] Леховицкий Д. И., Рябуха В. П., Жуга Г. А., Лаврентьев В. Н. Экспериментальные исследования систем СДЦ на основе АРФ в импульсных РЛС с попаречной вобуляцией периодов зондирования. – Х.: Прикладная радиоэлектроника, т.7, 2008, №1.
- [11] Леховицкий Д. И., Кириллов И. Г. Моделирование пассивных помех импульсным РЛС на основе процессов авторегрессии произвольного порядка / Системи обробки інформації: Збірник наукових праць. – Х.: ХУПС, 2008. – Вип. 3 (70).
- [12] Хастингс Н., Дж. Пикок. Справочник по статистическим распределениям. – М.: Статистика, 1980. – 95 с.
- [13] Дженкинс Р., Ваттс Д. Спектральный анализ его приложения. / Пер. с англ. – М.: Мир, т. 2, 1972.
- [14] Беллман Р. Введение в теорию матриц. / Пер. с англ. Под ред. Лидского В. Б. – М.: Наука, 1976.
- [15] Стренг Г. Линейная алгебра и ее приложения. – М.: Мир, 1980.
- [16] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
- [17] Вопросы статистической теории радиолокации: т.1 /Под ред. Тартаковского Г. П. – М.: Сов. радио, 1963. – 424 с.
- [18] Леховицкий Д. И., Жуга Г. А., Вовшин Б. М., Лаврукевич В. В. Извлечение метеоинформации на основе спектрального и корреляционного анализа отражений в импульсных доплеровских метеорологических РЛС. Прикладная радиоэлектроника. Т. 6, 2007, №3. С. 21–40.

- [19] Бакулев Г. А., Степин В. М. Методы и устройства селекции движущихся целей. – М.: Радио и связь, 1986. – 288 с.

Поступила в редколлегию 3.04.2008



**Леховицкий Давид Исаакович**, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра Харьковского Национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов: адаптивная пространственно-временная обработка сигналов на фоне помех в информационных системах различного назначения.



**Рябуха Вячеслав Петрович**, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского центра Харьковского Национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов: радиолокационные системы, обнаружение и измерение параметров сигналов на фоне помех.



**Жуга Геннадий Александрович**, научный сотрудник Харьковского Национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов: унифицированные процессоры и системы адаптивной обработки сигналов на фоне помех.