



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЦЕНТР ВИЩОЇ ОСВІТИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ**

**М. І. ЖУК, В. В. СЕМЕНЕЦЬ**

**МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ ОБРОБКИ ТА АНАЛІЗУ  
МЕДИКО-БІОЛОГІЧНИХ СИГНАЛІВ**

**Харків 2006**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЦЕНТР ВИЩОЇ ОСВІТИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

М. І. ЖУК, В. В. СЕМЕНЕЦЬ

**МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ ОБРОБКИ ТА АНАЛІЗУ  
МЕДИКО-БІОЛОГІЧНИХ СИГНАЛІВ**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів, які навчаються за спеціальностями “Фізична та біомедична електроніка”, “Біотехнічні і медичні апарати та системи”

Харків 2006

*Гриф надано Міністерством  
освіти і науки України  
(Лист від 19.04.2006 р. №14/18.2-968)*

Жук М.І. Семенець В.В. Методи і алгоритми обробки та аналізу медико-біологічних сигналів: Навч. посібник / За загальною редакцією проф. А.І. Биха - Харків: ХНУРЕ, 2006. – 264 с.

ISBN 966-659-123-5

У навчальному посібнику розглянуто особливості, структурні властивості та синдромальні характеристики біосигналів, які застосовуються у функціональній діагностиці, викладено основи спектрального аналізу аналогових і дискретизованих сигналів, алгоритми функціонування та синтезу цифрових фільтрів, основні поняття імовірно-статистичних методів обробки медико-біологічної інформації, принципи побудови й окремі реалізації алгоритмів обробки та аналізу найбільш поширених у функціональній діагностиці медико-біологічних сигналів – електрокардіограм, реограм, сфігмограм, електроенцефалограм і викликаних потенціалів мозку.

Посібник рекомендовано студентам денної та заочної форм навчання спеціальностей “Фізична та біомедична електроніка”, “Біотехнічні і медичні апарати та системи”.

Іл.: 147. Табл.: 16. Бібліогр. наймен.:15.

Рецензенти:

С. В. Сторчун, д-р техн. наук, проф., Національний університет “Львівська політехніка”;

В. П. Манойлов, д-р техн. наук, проф., Житомирський державний технологічний університет;

В. О. Фесечко, канд. техн. наук, проф., Національний технічний університет «Київський політехнічний інститут».

ISBN 966-659-123-5

©М. І. Жук, В. В. Семенець,  
2006

Перелік умовних скорочень і позначень .....	5
Вступ .....	7
1 Загальна характеристика медико-біологічної інформації .....	8
1.1 Автоматизований аналіз МБІ .....	8
1.2 Класифікація медико-біологічної інформації .....	10
1.3 Електрокардіограма .....	14
1.4 Фонокардіограма .....	17
1.5 Векторкардіограма .....	21
1.6 Реограма .....	21
1.7 Сфігмограма .....	23
1.8 Електроенцефалограма .....	25
1.9 Електроміограма .....	27
2 Спектральний аналіз сигналів .....	31
2.1 Спектри періодичних сигналів .....	31
2.2 Розподіл потужності в спектрі періодичного сигналу .....	38
2.3 Спектри неперіодичних сигналів .....	38
2.4 Узагальнений ряд Фур'є .....	43
2.5 Розкладання сигналів за спеціальними функціями .....	44
2.6 Розкладання сигналів за функціями Уолша .....	48
2.7 Дискретні та цифрові сигнали .....	51
3 Дискретне перетворення Фур'є .....	54
3.1 Перетворення Фур'є безперервного сигналу .....	54
3.2 ДПФ дискретизованого обмеженого в часі сигналу .....	55
3.3 ДПФ дискретизованого необмеженого в часі сигналу .....	61
3.4 Функції вікон .....	65
3.5 Швидке перетворення Фур'є .....	71
4 Цифрові фільтри .....	77
4.1 Загальна характеристика .....	77
4.2 Нерекурсивні фільтри .....	81
4.3 Рекурсивні фільтри .....	92
5 Імовірно-статистичні методи аналізу медико-біологічної інформації .....	102
5.1 Числові оцінки статистичних характеристик .....	102
5.2 Розподіл імовірностей .....	108
5.3 Оцінки статистичних гіпотез .....	116
5.4 Кореляційний аналіз .....	121
6 Узагальнені алгоритми автоматизованої обробки й аналізу електрокардіограм .....	131
6.1 Основні складові обробки і аналізу електрокардіограм .....	131
6.2 Алгоритм виділення елементів електрокардіограми, їх групування й усереднення .....	132
6.3 Алгоритм розпізнавання характерних точок електрoкардіосигналу .....	137
6.4 Алгоритм виділення характерних точок на ЕКГ .....	141

6.5	Алгоритм вимірювання комплексу параметрів електрокардіосигналу	143
6.6	Алгоритм синдромального аналізу ЕКГ	146
7	Класифікація аритмій і лікарські алгоритми їхнього аналізу	151
7.1	Механізм виникнення аритмій	151
7.2	Види аритмій	152
7.3	Електрокардіографічні ознаки аритмій	153
8	Алгоритми оперативної обробки й аналізу електрокардіосигналів	163
8.1	Етапи обробки електрокардіосигналу	163
8.2	Попередня обробка електрокардіосигналу	165
8.3	Алгоритм виявлення QRS-комплексів і розпізнавання їхніх характерних точок	171
8.4	Класифікація форми QRS-комплексу	181
8.5	Алгоритми розпізнавання і діагностики аритмій	186
8.6	Алгоритми аналізу ЕКГ під час фізичного навантаження	200
9	Алгоритми оцінки стану периферичного кровообігу	210
9.1	Аналіз стану кровеносних судин	210
9.2	Аналіз характеру кровообігу	219
10	Алгоритми аналізу електроенцефалограм	226
10.1	Алгоритм аналізу структурних властивостей ЕЕГ-сигналу	226
10.2	Метод викликаних потенціалів з використанням функцій Уолша	237
10.3	Алгоритми розрахунку амплітуди ЕЕГ як потенціалу в однорідному необмеженому середовищі	239
10.4	Алгоритм дискримінантного аналізу ЕЕГ-сигналів	243
10.5	Алгоритми кореляційно-спектрального аналізу ЕЕГ	252
	Контрольні запитання та завдання	257
	Перелік посилань	263

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ І ПОЗНАЧЕНЬ

- АВ** – атріовентрикулярний
- АКГ** – апекскардіограма
- АКФ** – автокореляційна функція
- АС** – асинхронне скорочення
- АСЩП** – автоспектральна щільність потужності
- АФ** – аналоговий фільтр
- АЦП** – аналого-цифровий перетворювач
- АЧХ** – амплітудно-частотна характеристика
- БШС** – багатшарова сфера
- ВІС** – велика інтегральна схема
- ВКГ** – векторкардіограма
- ВКФ** – взаємна кореляційна функція
- ВП** – викликані потенціали
- ВСЩП** – взаємоспектральна щільність потужності
- ВЧФ** – всечастотний фільтр
- ДПФ** – дискретне перетворення Фур'є
- ДРГ** – диференціальна реограма
- ЕЕГ** – електроенцефалограма
- ЕКГ** – електрокардіограма
- ЕКС** – електрокардіосигнал
- ЕМГ** – електроміограма
- ЕМС** – електроміосигнал
- ЕОМ** – електронна обчислювальна машина
- ІХС** – ішемічна хвороба серця
- КСА** – кореляційно-спектральний аналіз
- МБІ** – медико-біологічна інформація
- НОЕ** – необмежений однорідний електроліт

**ОЗЕ** – обернена задача енцефалографії  
**ПЗЕ** – пряма задача енцефалографії  
**РГ** – реограма  
**РФ** – рекурсивний фільтр  
**РЦФ** – рекурсивний цифровий фільтр  
**СА** – синоаурикулярний  
**СКВ** – середньоквадратичне відхилення  
**ССС** – серцево-судинна система  
**СФ** – смуговий фільтр  
**СФГ** – сфігмограма  
**ФВЧ** – фільтр верхніх частот  
**ФКГ** – фонокардіограма  
**ФНЧ** – фільтр нижніх частот  
**ФЧХ** – фазочастотна характеристика  
**ЦФ** – цифровий фільтр  
**ЧСС** – частота серцевих скорочень  
**ШППХ** – швидкість поширення пульсової хвилі  
**ШПФ** – швидке перетворення Фур'є

У сучасній медичній апаратурі широке застосування одержали обчислювальні пристрої різного ступеня складності. В одних випадках це можуть бути портативні пристрої переносного типу для реєстрації відхилення від норми окремих, найбільш життєво важливих фізіологічних показників, в інших – складні технічні комплекси для детального аналізу багатьох фізіологічних процесів, кожен з яких характеризується десятками взаємозалежних параметрів. Зрозуміло, що складність пристрою відбивається ступенем деталізацій аналізу, характером алгоритмів обробки медико-біологічної інформації, закладених у ці пристрої. Наведені алгоритми припускають послідовне виконання зазначених процедур, пов'язаних із визначенням структури фізіологічного процесу, вимірювання параметрів, які характеризують прямо або побічно цю структуру. Додатково до цього визначаються вторинні показники, що установлюють внутрішні зв'язки між окремими складовими життєдіяльності організму. Виконання закладених в алгоритмах обчислювальних процедур спрямовано на одержання точного діагнозу, оптимізацію лікувального процесу.

Нині відсутні підручники та навчальні посібники, в яких розглядаються принципи побудови алгоритмів автоматизованого аналізу медико-біологічних сигналів.

Зведення про різні математичні методи обробки медико-біологічної інформації містяться у великій кількості наукових статей, монографій, дисертацій, звітів з виконання науково-дослідних робіт.

У даному посібнику за курсами “Автоматизація обробки і аналізу медико-біологічної інформації” та “Методи перетворення, обробки і аналізу біомедичних сигналів” подані алгоритми обробки найбільш інформативних, і водночас найбільш трудомістких для аналізу медико-біологічних сигналів – електрокардіограми й електроенцефалограми. В посібнику розглядаються принципи побудови та окремі реалізації алгоритмів попередньої обробки і алгоритмів контурного аналізу сигналів.

Більш детально розглянуті алгоритми аналізу ритму серцевих скорочень, застосовувані в складних кардіомоніторних комплексах. Ці алгоритми використовують для встановлення діагнозу логічні структури разом із методами розпізнавання образів. Для кваліфікованої побудови обчислювальних алгоритмів у визначеному розподілі розглянуті лікарські алгоритми визначення захворювань на прикладах порушень ритму серцевих скорочень.

Окремим розділом подані алгоритми аналізу електроенцефалограми. Деякі з них побудовані на основі досить складних у математичному відношенні статистичних методів. У посібнику визначені тільки особливості застосування цих методів для аналізу електроенцефалограм і наведені структурні схеми алгоритмів. Даний посібник призначається для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальностями “Фізична та біомедична електроніка” й “Біотехнічні та медичні апарати і системи” та для широкого кола осіб, що займаються розробкою та експлуатацією електронної медичної техніки.

# 1 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

## 1.1 Автоматизований аналіз медико-біологічної інформації

Розвиток засобів обчислювальної техніки відкрив широкі перспективи використання її для підвищення ефективності медико-біологічних досліджень. Прогрес у багатьох галузях медицини і біології неможливий без широкого впровадження в практику сучасних методів автоматизованої обробки медико-біологічних даних.

Під обробкою медико-біологічної інформації (МБІ) розуміється перетворення вихідних даних відповідно до визначеного алгоритму для одержання необхідних результатів.

*Обробка даних* – це обчислювальний процес, спрямований на отримання з цих даних інформації для її подальшого сприйняття машиною або людиною.

*Обробка даних у реальному масштабі часу* – це обчислювальний процес, який відбувається в темпі, що забезпечує обслуговування деякого зовнішнього процесу, не залежного від даної обчислювальної системи (системи реального часу). *Аналіз даних* – це процес перетворення даних, спрямований на одержання опису цих даних через свої властивості або складові частини й їхні відношення. Оскільки цей процес завжди спрямований на отримання корисної інформації, то автоматизований аналіз даних і обробка даних – поняття дуже близькі. І не має необхідності розрізняти їх, крім окремих випадків.

Можна відзначити два основних напрямки впровадження автоматизації в медичну практику. Перший напрямок полягає в автоматизації обробки даних аж до встановлення остаточного діагнозу. Другий напрямок – допомога лікарю в осмислюванні величезних обсягів інформації за рахунок виділення діагностично корисних ознак і наочного відображення результатів аналізу.

Автоматичний аналіз біосигналів застосовується в клінічній медицині для функціональної діагностики й автоматизованого спостереження за хворими; профілактичній медицині під час профоглядів і масових обстежень населення; авіакосмічній і спортивній медицині для контролю за станом людини, що знаходиться в екстремальних умовах; протезуванні – під час конструювання біокерованих протезів та імплантації біокерованих електричних стимуляторів; фізіологічних, психофізіологічних і ергономічних дослідженнях для контролю стану людини-оператора, для цілей профвідбору та навчання.

Медико-біологічні дані за обсягом інформації, що міститься в них, можна розділити на 5 груп:

1. Якісні ознаки – колір шкірних покривів, наявність болю, аускультативні феномени, спадкові особливості, колір виділень і тощо.

2. Одиничні числові дані (температура тіла, артеріальний тиск, кількість формених елементів крові і та ін.)

3. Динамічні дані (електрокардіограма, електроенцефалограма, балістокардіограма, міограма тощо.)

4. Динамічні картини (поле біопотенціалів, електрокардіострумограма)

5. Статичні картини (рентгенограма, скенограма, томограма).

Одна і та сама характеристика, що описує живий організм, може опинитися в будь-якій групі даних. Наприклад, температура може бути оцінена як якісна ознака (відчуття від доторкання), як числовий показник (під час використання термометра), як динамічний показник (електротермографія), як статична або динамічна картина, одержувана з екрана тепловізора.

Застосування аналізу й обробки сигналів у біології і медицині можна поділити на дві категорії: 1) аналіз сигналів, вироблених приладами, що несуть інформацію про біологічні системи; 2) аналіз сигналів, вироблених власне живими системами. Аналіз сигналів першої категорії дуже важливий і покладений в основу багатьох діагностичних і фізіотерапевтичних методів. Особливістю другої категорії є необхідність поєднання біологічних і технічних принципів; це сигнали природного походження (електрокардіограма, фонокардіограма, електроміограма, електроенцефалограма, викликані потенціали, сфігмограма, спірограма та ін.).

Автоматичний аналіз біосигналів застосовується й у ході експериментальних фізіологічних і біомедичних досліджень. За допомогою автоматичного аналізу електроенцефалограми (ЕЕГ) здійснюється розпізнавання стадій сну людини, широко застосовуване в фізіологічних дослідженнях; шкіро-гальванічна реакція нерідко використовується як показник емоційної напруги в психофізіологічних експериментах; електрокардіограми (ЕКГ) і реограми (РГ) використовуються під час вивчення реакції серцево-судинної системи на значущі зовнішні подразники.

Методів обробки біосигналів так само багато, як розроблених пристроїв і систем. Більшість із них мають евристичний характер. Універсальних методів обробки сигналів мало. Для кожного біосигналу та навіть для кожної обробки цього біосигналу існує безліч прийомів і методів. Незважаючи на численність цих методів, усі вони вирішують задачу розпізнавання образів, тобто ідентифікації приналежності оброблюваної реалізації до деякого класу схожих реалізацій із цілком визначеними властивостями.

Як науковий напрямок, автоматизована обробка й аналіз інформації висуває нові завдання. Це розробка, створення й експлуатація автоматизованих приладів, комплексів і систем аналізу фізіологічної інформації для діагностики захворювань; диспансерного спостереження за виявленими хворими; створення архівів у вигляді інформаційно-пошукових систем; підвищення ефективності та надійності діагностики і лікування захворювань; удосконалення всієї сукупності заходів для профілактики, виявлення, лікування та реабілітації хворих; проведення наукових досліджень з вивчення біофізичних основ фізіологічної інформації.

## 1.2 Класифікація медико-біологічної інформації

Аналіз біосигналів визначається підкласами інформації різних органів живого організму, інформації, що характеризує умови життя організму, визначає засоби її виявлення, а також характеристики і параметри. Класифікація МБІ наведена на рис. 1.1 і 1.2.

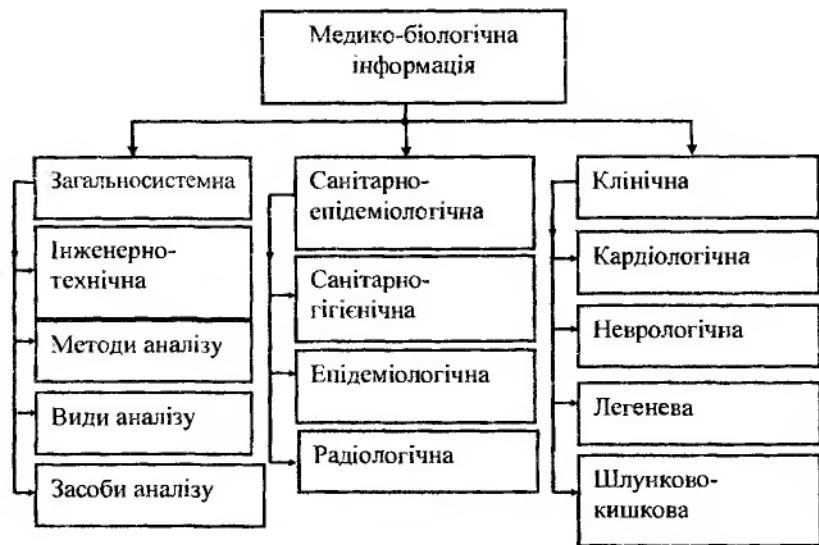


Рисунок 1.1 – Класифікація медико-біологічної інформації

Всю сукупність різного роду сигналів, характерних для тих або інших методів функціональних досліджень, можна поділити на дві великі групи: детерміновані та стохастичні. Детерміновані сигнали є деякими відомими функціями часу. Як правило, якщо сигнал визначений цілком, то з інформаційної точки зору він не викликає інтересу дослідника, оскільки не містить ніяких додаткових зведень. Тому практично мова йде про сигнали, вид яких заданий, але конкретні параметри, що визначають однозначно форми цих сигналів, невідомі. Серед детермінованих сигналів прийнято виділяти періодичні та неперіодичні.

Періодичні сигнали задовольняють співвідношенню  $x(t) = x(t \pm nT)$ ,  $n=1,2,3,\dots$

Такого роду сигнали можна розділити на гармонійні  $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$  і полігармонійні, що являють собою суму гармонійних коливань із кратними частотами

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(k\omega_0 t + \varphi_k).$$

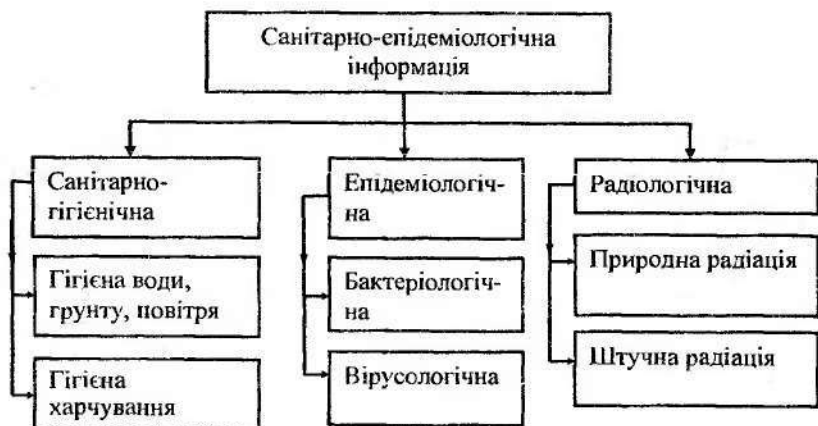


Рисунок 1.2 – Класифікація санітарно-епідеміологічної інформації

Неперіодичні сигнали відрізняються великою різноманітністю як у відношенні тимчасових залежностей, так і характеру амплітудного спектра

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k).$$

Тут частоти  $\omega_k$  не є кратними деякій частоті  $\omega_0$ .

Стохастичними називаються сигнали, зміна яких у часі або просторі підпорядковуються імовірнісним законам. Точне значення таких сигналів у кожен момент не може бути зазначено, виходячи з умов експерименту. Для подібних сигналів можливо виявлення визначених не випадкових закономірностей, пов'язаних, наприклад, із функціональним станом органу, що досліджується.

Доцільно розділити всі стохастичні сигнали на три групи: випадкові скалярні процеси; випадкові векторні процеси; векторні поля.

Випадковий скалярний процес  $X(t)$  – це функція одного аргументу  $t$  (як правило, функція часу), причому для кожного фіксованого  $t$  значення  $X(t)$  є деякою випадковою величиною

$$X_1(t) = \|X_1(t_1); X_1(t_2); X_1(t_3); \dots\|.$$

Це найбільш поширений вид стохастичних сигналів, характерних для методів функціональної діагностики.

Векторний випадковий процес – це сукупність декількох скалярних процесів

$$X_1(t) = \|X_1(t); X_2(t), \dots, X_n(t)\|.$$

На практиці частіше за все  $n = 2, n = 3$ , тобто розглядаються двовимірні або тривимірні вектори які, з геометричної точки зору інтерпретуються як плоскі (двовимірний варіант) або просторові (тривимірний варіант) криві. В цьому випадку мова йде про такі фізіологічні характеристики, які не можуть бути описані інакше, ніж сукупністю декількох компонентів одиничного векторного сигналу (наприклад, вектор-електрокардіограма).

Випадкове поле  $X(l_1, l_2, \dots, l_k, t)$  є функцією не одного, а декількох аргументів  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_k$ , інтерпретованих зазвичай як координати  $K$ -вимірного простору, і, можливо, часу  $t$ . Найчастіше зустрічаються двовимірний  $X(l_1, l_2)$  і тривимірний  $X(l_1, l_2, l_3)$  варіанти. До випадкових полів такого типу відносяться двовимірні та тривимірні зображення.

У табл. 1.1 зазначені типові сигнали функціонально-діагностичних досліджень і класи процесів, до яких вони відносяться. Для кожного сигналу вказуються діапазон інформативних частот і типової амплітуди сигналу (для методів, де зазначені параметри визначаються природним шляхом, а не характеристиками вторинних перетворювачів сигналу).

Таблиця 1.1 – Типові сигнали функціонально-діагностичних досліджень

Органи	Вид сигналу	Клас процесу	Параметри	
			Амплітуда, мкВ	Частотний спектр, Гц
1	2	3	4	5
Серце	Електрокардіограма	Імпульсний випадковий процес	30–30000	0,15–300
	Фонокардіограма	Імпульсний випадковий процес		20–800
	Балістокардіограма	Імпульсний випадковий процес		0,1–30
	Електрокімограма	Імпульсний випадковий процес		0,8–100
	Кінетокардіограма	Імпульсний випадковий процес		0,1–50

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4	5
	Алекскардіограма	Імпульсний випадковий процес		0,1-50
	Вектор-електрокардіограма	Векторний випадковий процес	5-15	0,3-500
Головний мозок	Електроенцефалограма	Випадковий процес	10-500	0,3-100
	$\delta$ -ритми	Випадковий процес	10-30	0,3-3
	$\theta$ -ритми	Випадковий процес	20	3-7
	$\alpha$ -ритми	Випадковий процес	20-100	7-13
	$\beta$ -ритми	Випадковий процес	5-30	13-30
	$\gamma$ -ритми	Випадковий процес	2-10	30-80
	$\lambda$ -ритми	Імпульсний випадковий процес	20-40	7-11
	Викликані потенціали	Імпульсний випадковий процес	0,1-2	0,1-500
	Електрокортикограма	Випадковий процес		0,3-80
Нервова система	Нейрограма	Точковий випадковий процес	5	<10 кГц
	Електроміелограма	Випадковий процес	10-60	0,5-20
Кровоносні судини	Шкірно-гальванічна реакція за Тархановим	Випадковий процес	100-2000	0,1-10
	За Фере	Випадковий процес	2-20	0,1-10
	Реограма	Випадковий процес	0,1-10000	0,1-100
	Імпедансна плетизмограма	Випадковий процес	20-100	0-10

Продовження таблиці 1.1

1	2	3	4	5
	Сфігмограма	Випадковий процес		0,1–50
Легені	Імпедансна пневмограма	Випадковий процес	до 10000	0,1–10
	Флебограма	Випадковий процес		0,2–80
	Імпульсна легенева вентиляція	Випадковий процес	до 10000	0,1–200
	Електроокулограма	Випадковий процес	20–200	0,1–5
Око	Електроретинограма	Випадковий процес	до 50	0–200
М'язи	Електроміограма	Випадковий процес	до 20000	1–10000
Шлунок	Електрогастрограма	Випадковий процес	0,01–20	0,01–10
Інші органи	Рентгенограма	Випадкове поле	мінімум 0,2 мм	контрастність 1,5%
	Сканограма ультразвукова	Випадкове поле		
	Томограма	Випадкове поле		

Нижче будуть розглянуті особливості та структурні властивості медико-біологічних сигналів, які найчастіше застосовуються під час автоматизованого аналізу, таких як електрокардіограма, фонокардіограма, векторкардіограма, електроенцефалограма, реограма, сфігмограма, електроміограма.

### 1.3 Електрокардіограма

Електрокардіограма – це графічне зображення коливань електричних потенціалів, знятих із поверхні тіла. Зміна електричного потенціалу протягом одного серцевого циклу має вигляд характерної кривої, наведеної на рис. 1.3. ЕКГ складається з зубців, сегментів та інтервалів. Зубці або хвилі ЕКГ характеризують розмір, напрямок і локалізацію потенціалів серця. Відрізки ЕКГ, які знаходяться між зубцями, мають назву – сегменти, а відрізки, складені з сегмента і зубця, що прилягає, – інтервали.

Горизонтальні відрізки сегментів вказують на відсутність різниці потенціалів на поверхні тіла. Вони зображуються нульовою або ізоелектричною лінією.



Зубці Q, R, S складають шлуночковий комплекс. Інтервал QRS характеризує поширення збудження по міокарду шлуночків, вимірюється від початку зубця Q до кінця зубця S, тривалість коливається від 0,06с до 0,1с.

Комплекс QRS, або шлуночковий комплекс, відображає деполяризацію шлуночків. Інтервал QRS вимірюється від початку зубця Q до кінця зубця S. характеризує поширення збудження по міокарду шлуночків. Тривалість його коливається від 0,06с до 0,12с. Усякий позитивний зубець цього комплексу позначають як зубець R; якщо їх декілька, то всі вони називаються зубцями R, відрізняються від першого апострофом (R, R', R" тощо). Зубець Q – це негативний зубець комплексу QRS, який передує зубцю R. Негативні зубці, що з'являються за R, позначаються як S, S', S".

Сегмент ST – відрізок від кінця комплексу QRS до початку зубця T – вказує на те, що міокард шлуночків цілком охоплений збудженням. Зубець T відповідає процесу виходу шлуночків із стану збудження, тобто процесу реполяризації. Він може бути позитивним, негативним, двофазним. За формою зубець T нагадує трикутник із положистим підйомом, закругленою вершиною і крутим спуском.

Інтервал QT, який називають електричною систолою, вимірюється від початку зубця Q до кінця T і показує час, необхідний для деполяризації та реполяризації шлуночків. Тривалість цього інтервалу залежить від статі, віку і частоти серцевих скорочень. При нормальній частоті ритму вона складає приблизно 0,04 с.

Сегмент TP – від кінця зубця T до початку зубця P наступного серцевого циклу – означає фазу спокою серцевого м'яза, протягом якої електрична активність відсутня, під час запису йде горизонтальна ізоелектрична лінія, що відповідає діастолі серця.

Інтервал R–R – це відстань між піками двох послідовних зубців R. Весь серцевий цикл електричної активності реєструється інтервалом R–R.

З усіх біоелектричних сигналів електрокардіосигнал – найхарактерніший за формою й упорядкованістю. Проте форма, амплітуда та тривалість інтервалів і сегментів сигналу залежить від багатьох чинників, пов'язаних із функціональним і органічним станом серця. Діапазон значень для типових параметрів елементів ЕКГ у нормі наведені в табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Параметри елементів електрокардіограми

Найменування параметра	Значення параметрів елементів ЕКГ					
	Зубець P	Інтервал PQ	Комплекс QRS	Інтервал QT	Сегмент ST	Зубець T
Амплітуда, мВ	0–0,25	0	0,3–5,0	0	0	0,4–1,0
Тривалість, с	0,07–0,11	0,12–0,2	0,06–0,1	0,35–0,44	0,06–0,15	0,1–0,25

## 1.4 Фонокардіограма

Фонокардіограма (ФКГ) – це акустичні коливання, що виникають під час роботи клапанового апарата серця і руху крові в передсердях, шлуночку, аорті та легеневій артерії. Ці коливання в межах одного серцевого циклу поділяються на тони і шуми, частотний діапазон яких знаходиться в межах 20–2000 Гц. Тони складаються зі звуків однієї частоти (чисті тони) або декількох частот із кратними співвідношеннями між ними (складні тони). Шуми утворені коливаннями різною частотою без будь-яких правильних співвідношень.

Тони серця виникають у моменти зміни стану серця під час переходу від одного фрагмента серцевого циклу до іншого. Шуми серця обумовлені рухом крові протягом будь-якого періоду серцевого циклу або декількох періодів. Як правило, вони довше тонів, нерідко утворені коливаннями високої частоти, яка досягає 1 кГц. Основними параметрами елементів ФКГ є їхня тимчасова характеристика, інтенсивність і частотний склад.

На рис. 1.4 наведена структура тонів фонокардіограми разом з електрокардіограмою.

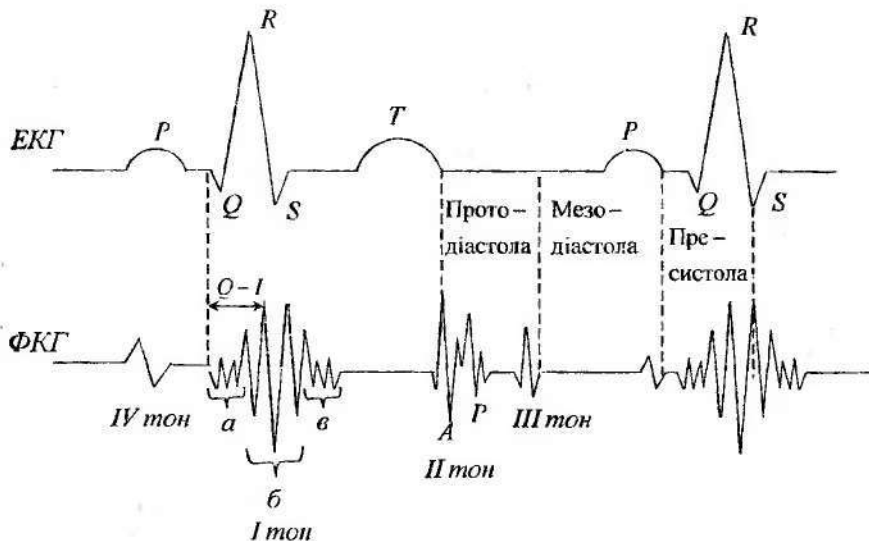


Рисунок 1.4 – Тони фонокардіограми

За один період серцевих скорочень виникають чотири серцевих тони: I, II, III і IV.

Тон I має місце при систолі шлуночків, тобто в інтервалі QRS – комплексу, тому називається систолічним. Він утворюється внаслідок закриття мітрального і тристульчатого клапанів і скорочення міокарда шлуночків. Крім того, в його утворенні беруть участь звуки, пов'язані з відкриттям клапанів

аорти і легеневої артерії. Тривалість I тону в нормі коливається від 0,07с до 0,13с.

На ФКГ I тон зображається групою коливань, які виникають через 0,04–0,06с після зубця Q на ЕКГ. В I тоні є початкова, центральна і кінцева частини. Початкова частина (а) утворена 1–2 коливаннями невеликої амплітуди і низької частоти (20–40 Гц). Ці коливання виникають внаслідок зміни положення серця на початку систоли шлуночків. Центральна частина тону (б) утворена коливаннями максимальної амплітуди і частоти (100–150 Гц), які виникають внаслідок закриття атріовентрикулярних клапанів. Кінцевий компонент (в) утворений з 2–3 коливань низької частоти, що виникають під час відкриття напівмісячних клапанів і коливань стінок аорти і легеневої артерії.

Відстань від початку зубця Q ЕКГ до початку максимальних коливань I тону називається інтервалом “Q – I тон”. Тривалість цього інтервалу в нормі не повинна перевищувати 0,06с. Цей параметр відіграє важливу роль у діагностиці мітрального стенозу.

Тон I буває розщепленим або роздвоєним. При цьому обидві частини тону знаходяться дуже близько одна від одної (0,01–0,03 с), загальна тривалість тону при цьому зберігається.

Тон II виникає на початку діастоли (наприкінці хвилі T) і тому називається діастолічним. Він утворюється, в основному, внаслідок закриття та напруги клапанів аорти і легеневої артерії. Основу тону складає центральна його частина, утворена 2 компонентами:

- перший, більшої амплітуди, пов'язаний із напругою стулок аортальних клапанів і називається аортальним компонентом А (рис. 1.4);
- другий утворений напругою стулок клапанів легеневої артерії і називається пультмональним компонентом Р.

Тон II утворений частотами приблизно 100–150 Гц, тривалість його дорівнює 0,06–0,10с; виникає одночасно з закінченням хвилі T на ЕКГ або на 0,02–0,04с пізніше. Інтервал між хвилею T і початком I тону називається “інтервал T–II тон”.

Відстань від початку I тону до початку II тону називається “механічною систолою” (на відміну від електричної систоли – інтервалу QT). Схема вимірювання інтервалів ФКГ наведена на рис. 1.5.

Тон III серця виникає під час діастоли в фазі швидкого наповнення шлуночків кров'ю. Він обумовлений коливаннями стінок шлуночків, виникає через 0,11 – 0,15с після II тону, складається з 2–3 коливань частотою 20–70 Гц, тривалість тону 0,04–0,06с.

Тон III у здорових дітей і осіб молодого віку називається фізіологічним і не свідчить про патологію. Поява III тону в осіб літнього віку, особливо за наявності у них надлишкової жирової клітковини на грудній стітці, є патологією і свідчить про слабкість міокарда.

Тон IV серця виникає під час систоли передсердь, тому його називають передсердним тоном. Він обумовлений скороченням передсердь (рис. 1.4), виявляється тільки у дітей і осіб молодого віку; виникає через 0,04–0,06с після

початку зубця Р на ЕКГ, складається з 2–3 коливань низької частоти і невеликої амплітуди, його можна зареєструвати тільки фонокардіографом.

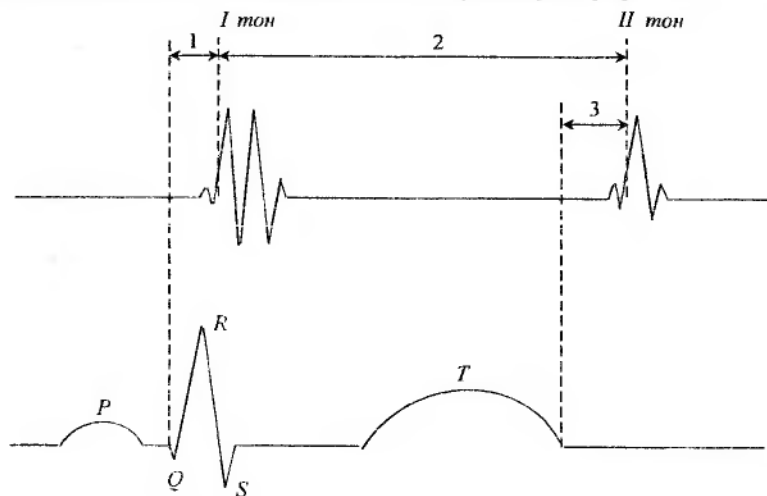


Рисунок 1.5 – Схема вимірювання інтервалів ФКГ:

1 – інтервал Q – I тон; 2 – механічна систола; 3 – інтервал T – II тон

Поява тону IV в осіб похилого віку свідчить про поганий стан міокарда.

Звук, що виникає під час відкриття мітрального клапана, називається мітральним клацанням. Чим вище піднімається тиск у лівому передсерді при мітральному стенозі, тим раніше відбувається відкриття мітрального клапана і тим ближче до II тону реєструється мітральне клацання. Інтервал II тон – мітральне клацання дорівнює 0,06–0,08с і менше. При не дуже чітко вираженому стенозі і порівняно невисокому тиску в передсерді цей інтервал дорівнює 0,09с і більше.

Крім зазначених тонів, різні патологічні стани можуть викликати додаткові звуки, що реєструються на ФКГ і називаються екстратонами. Екстратони виникають при спайках між перикардом і плеврою. Якщо такий тон визначається в діастолічному інтервалі, то його називають “протодіастолічним перикардгоном”, якщо в систолі – то “систолічним клацанням”. Надходження крові в аорту або легеневу артерію під час систоли при підвищеному тиску спричиняє розтягування стінок цих судин і може супроводжуватися появою “тону розтягування” в систолічному інтервалі. Шуми виникають під час руху крові в судинах у періоди систоли і діастоли, тому називаються систолічними та діастолічними.

Найважливішою характеристикою шуму є його конфігурація – зміна амплітуди в часі. На рис. 1.6 показані спадні (а), зростаючі (б), ромбоподібні (в), стрічкоподібні (г) шуми.

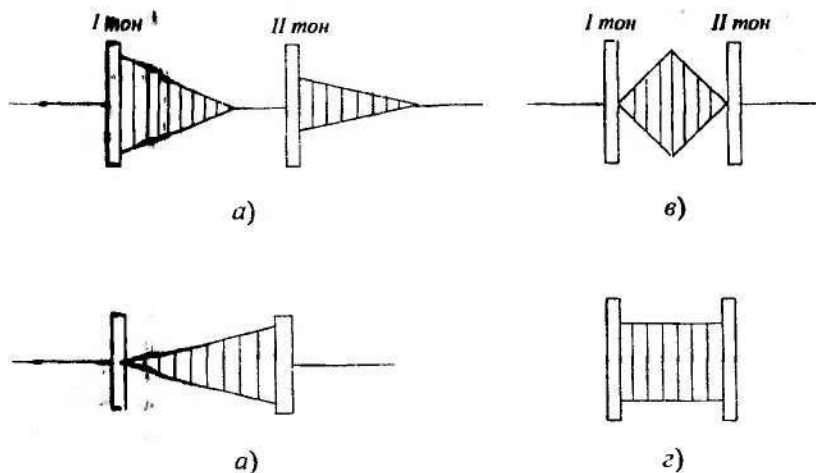


Рисунок 1.6 – Конфігурація шумів серця

Конфігурація шуму визначається характером змін кровоструму. Наприклад, ромбовидна форма шуму вигнання характерна для стенозу (звуження) вихідного отвору (аортального, пульмонального). Чим різкіший стеноз, тим триваліший шум, особливо час його зростання.

На рис. 1.7 показані форми шумів при різних пороках серця: а) значна недостатність мітрального клапана ; б) стеноз легеневої артерії ; в) дефект міжшлуночкової перегородки.

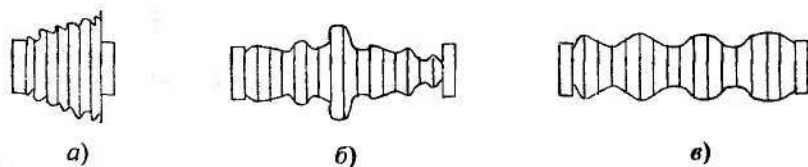


Рисунок 1.7 – Шуми при пороках серця

Існує спеціальний атлас ФКГ, який дозволяє прискорити встановлення діагнозу.

## 1.5 Векторкардіограма

Векторкардіограма (ВКГ) – це просторова фігура, що є графічним зображенням змін розміру і напрямку вектора сумарної електро-рухомої сили (ЕРС), яка виникає в серці протягом усього серцевого циклу.

ВКГ дозволяє зробити просторово-кількісне дослідження електричного поля серця. У процесі збудження в серці виникає ЕРС, яка складає суму елементарних або дипольних ЕРС. Сумарні ЕРС, що відповідають визначеним моментам збудження, мають назву моментні; але оскільки ЕРС – величина векторна, то й миттєві ЕРС – це миттєві вектори. В зв'язку з тим, що в процесі деполяризації (збудження) і реполяризації (відновлення) мускулатури передсердь і шлуночків виникає ЕРС у вигляді послідовного ряду миттєвих векторів, головним із яких є P, QRS, T, то векторкардіограма складається відповідно з петель P, QRS і T.

Отже, вектор сумарної ЕРС за час одного серцевого циклу створює три просторові петлі, змінюючи свій розмір і орієнтацію. Під час періоду активації (збудження) передсердь утворюється петля P, після неї створюється петля QRS (збудження шлуночків), а реполяризація шлуночків відображається петлею T.

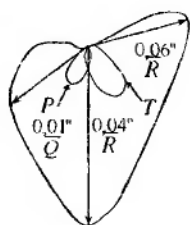


Рисунок 1.8 – Нормальна ВКГ

На рис. 1.8 зображена нормальна векторкардіограма у фронтальній проекції: петлі QRS, T і P, а також миттєві вектори  $\vec{Q}(0,01c)$ ,  $\vec{R}(0,04c)$  і  $\vec{T}(0,06c)$ . Аналіз ВКГ передбачає визначення форми петель P, QRS, T, стан траси цих петель, просторове положення миттєвих векторів, визначення площі петель P, QRS, T, визначення кута розбіжності максимальних векторів петель QRS і T.

## 1.6 Реограма

Реограма – це крива, що відображає характер пульсових коливань електричного опору живої тканини організму змінному струму високої частоти під час змін її кровозаповнення, обумовлених циклічною роботою серця.

Реограма може бути описана функціональною залежністю  $\Delta R = f(t)$ ,

де  $\Delta R$  – зміна електричного опору,  $t$  – час.

Між змінами електричного опору і пульсових коливань об'єму крові існує чітка лінійна залежність. У момент появи в міжелектродному просторі систолічного об'єму крові електропровідність цієї зони збільшується, опір падає. Спад пульсової хвилі й амплітуди реограми обумовлений зниженням електропровідності під час діастолі. Коливання опору пов'язані не тільки з об'ємом крові, але й швидкістю її руху. Впливають на коливання опору скорочувальна здатність міокарда, діаметр і еластичність судин, умови

венозного відтоку, фази подиху, розмір і форми електродів. Реограма відображує сумарний опір усіх тканин, що знаходяться в міжелектродному просторі, у вигляді інтегральної кривої, в генерації (генезі) якої головна роль належить пульсовим коливанням кровонаповнення. Реограма може бути використана для дослідження кровонаповнення будь-якого органа. Найбільше поширення одержали реовазограма (кровонаповнення кінцівок), реоенцефалограма (головного мозку), реоєпатограма (печінки), реопневмограма (органів дихання).

Реограми будь-якої області, крім серця, в нормі мають загальну конфігурацію, наведену на рис. 1.9.

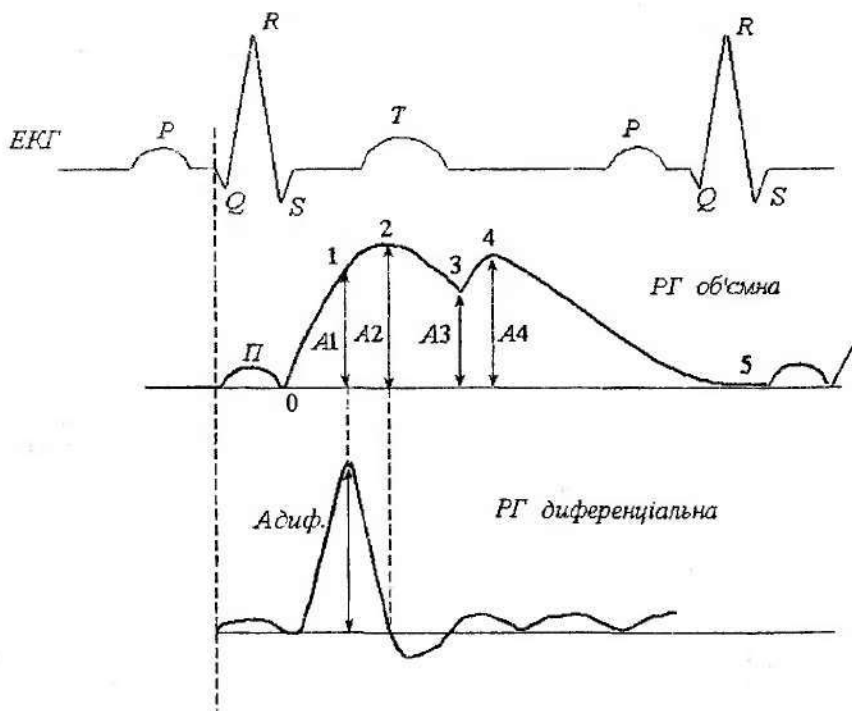


Рисунок 1.9 - Об'ємна і диференціальна реограми

Реограма складається з анакоти (висхідна частина), вершини і катакоти (спадної частини), на якій розташовуються 1-3 додаткові хвилі. Амплітуда систолічної хвилі  $A_2$  відображує пульсовий приріст об'єму крові, інтенсивність артеріального кровонаповнення. Вершина реограми відповідає моменту, коли приплив крові дорівнює відтоку, швидкість кровонаповнення дорівнює нулю. Тут найбільша зміна опору частини, що досліджується.

Спадна частина кривої – від вершини систолічної хвилі до кінця кардіоциклу, інтервал 2–5 – відповідає катакrotичній фазі пульсової хвилі, що характеризує венозний відтік. Крутий спуск катакrotи свідчить про добрий відтік. У середині або в першій третині спадної частини катакrotи розташовується гостре або закручене заглиблення – інцизура, точка 3, що характеризує розмір периферичного опору. З інцизури починається висхідна частина дикrotичної хвилі (інтервал 3–4). На катакrotі спостерігається декілька дрібних хвиль, розташування і виразність яких визначаються властивостями судинних стінок.

Систолічному підйому може передувати пресистолічна хвиля П, тривалістю 0,08–0,12с. Ця хвиля відповідає скороченню передсердь.

Положення елементів реограми, їхні взаємовідношення з елементами ЕКГ залежать від виду реограм і визначаються особливостями даного органу.

На рис 1.9 наведена диференціальна реограма (ДРГ) – перша похідна об'ємної РГ. ДРГ характеризує швидкість зміни кровонаповнення досліджуваного органу, дозволяє одержати інформацію про судинний тонус і скорочення міокарда.

Для обробки реограм застосовуються такі методи: метод виділення артеріальної і венозної складових; амплітудно-частотний (спектральний) аналіз; контурний аналіз об'ємної РГ; контурний аналіз ДРГ; векторреографія.

## 1.7 Сфігмограма

Сфігмограма (СФГ) – це фізіологічний сигнал, який характеризує рух артеріальної стінки під впливом хвилі тиску крові під час кожного скорочення серця. Ступінь деформації артеріальної стінки під час просування пульсової хвилі залежить від властивостей судин і рівня тиску крові. Аналіз сфігмограми дає можливість одержати різноманітну інформацію про функціональний стан артеріальних судин великого кола кровообігу. При цьому розраховуються такі гемодинамічні показники системи кровообігу, як швидкість поширення пульсової хвилі по судинах м'язового та еластичного типу, модуль об'ємної пружності й еластичний опір артеріальної системи.

Розрізняють СФГ центрального і периферичного артеріального пульсу. Криві пульсу сонної та підключичної артерії (центрального пульсу) відрізняються від кривих периферичних артерій (прсменевих, стегнової, артерій стопи та ін.)

Крива центрального артеріального пульсу (рис. 1.10, а) починається невеликою пресистолічною хвилею 1, що визначається скороченням лівого шлуночка. Потім йде швидкий крутий підйом (анакрота) головної хвилі 2, що відображає надходження крові з лівого шлуночка в центральні артерії. Тривалість підйому кривої від 0,08 до 0,1с.

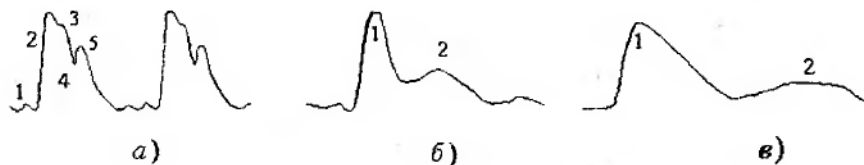


Рисунок 1.10 – Нормальна артеріальна сфігмограма: а) сонна артерія; б) стегнева артерія; в) артерії стопи

Після вигину на вершині головна хвиля переходить у спадне коліно 3 (катакрота), кінець якого відповідає закінченню систоли лівого шлуночка. На спадному коліні СФГ є чіткий, спрямований униз зубець 4 – інцизура (вирізка). Найнижча точка інцизури відображує момент повного закриття напівмісячних клапанів. У нормі інцизура буває гострокінцевою і розташовується приблизно на висоті 2/3 загальної амплітуди пульсової хвилі. При патологічних станах рівень розташування інцизури може змінюватися. Так, під час зниження артеріального тиску і периферичного опору інцизура розташовується нижче звичайного рівня, а в крайніх випадках, наприклад, при великій крововтраті, наближається до основної лінії.

Діастолічна частина кривої центрального артеріального пульсу починається хвилею 5, що, на думку деяких авторів, є відбитком основного власного коливання артерії. Ця хвиля називається дікروتичною; вона показує, що на початку діастоли тиск в артерії підвищений. Діастолічна частина кривої відображає рівномірний спад тиску, що відповідає рівномірному відтоку крові на периферію. Діастолічні хвилі на СФГ центрального пульсу мають неспостійний характер.

Криві пульсу периферичних артерій (рис. 1.10, б, в) більш прості і за формою істотно відрізняються від СФГ центрального артеріального пульсу. СФГ периферичного пульсу складається з двох хвиль – основної 1 і дікротичної 2. Підйом основної хвилі плавно переходить у вершину, від якої крива знижується та створює злегка увігнуте плато, до якого примикає дікротична хвиля. На СФГ артерій стопи дікротична хвиля, як правило, виражена більш чітко. Отже, СФГ периферичних артерій відрізняються від СФГ центральних артерій тим, що основна хвиля не має додаткових коливань як на підйомі, так і на вершині. Після неї можуть бути зареєстровані одна або декілька додаткових хвиль, які є результатом власних коливань судин.

Під час аналізу СФГ враховують їхню форму, тривалість анакротичного підйому; співвідношення амплітуди основної і дікротичної хвиль. У здорових осіб амплітуда дікротичної хвилі складає майже половину максимальної висоти кривої і знижується при патології. Характер СФГ периферичних артерій

більше, ніж криві центрального пульсу, визначається станом судинних стінок, їхнім тонусом і багато в чому залежить від місцевих гемодинамічних умов.

## 1.8 Електроенцефалограма

ЕЕГ – це крива зміни електричного потенціалу шкіри голови людини, що відображує загальний функціональний стан мозку. ЕЕГ є важливим діагностичним засобом для виявлення багатьох неврологічних порушень, наприклад, епілепсії, для ранньої діагностики і локалізації пухлин мозку, оцінки глибини коми при інтенсивній терапії, визначення й оцінки різних фаз сну. Запис ЕЕГ дозволяє нейрофізіологу візуально оцінити амплітудні значення електричної активності головного мозку.

Найбільш помітним типом електричної активності є ритмічна активність із частотою приблизно 10 Гц, яка локалізована в потиличній частині голови і найбільш виражена в стані, обумовленому „спокійною бадьорістю”. Вона послаблюється або блокується під час зміни стану незалежно від того, відбувається в стані збільшення або, навпаки, зменшення рівня „бадьорості”. Ритмічна активність, яка володіє такими властивостями, називається  $\alpha$ -активністю. Домінуюча  $\alpha$ -активність перебуває в межах від 8 до 13 Гц. Ритмічна активність на більш високих частотах (14–30 Гц) називається  $\beta$ -активністю. Коливання більш низьких частот називаються  $\delta$ -активністю (1–3 Гц) і  $\theta$ -активністю (4–7 Гц), а коливання більш високих частот –  $\gamma$ -активністю (30–50 Гц).

Характер сигналів, що реєструються, залежить від багатьох чинників. До них відносяться такі: вік та психічний стан (ступінь „бадьорості”, рівень уваги) людини, що обстежується; область мозку; спадкові чинники; вплив на мозок (травми, функціональні розлади, захворювання, стимуляція, вплив лікарськими препаратами та ін.); артефакти.

В нормальній ЕЕГ дорослої людини в стані „спокійної бадьорості” зазвичай переважає ритмічна  $\alpha$ -активність, тоді як  $\delta$ - і  $\theta$ -активність мають нерегулярний характер і виявляються набагато менше.  $\beta$ - і  $\gamma$ -активність, як правило, присутні, але виражені слабо і мають значно меншу амплітуду в порівнянні з  $\alpha$ -активністю. На рис. 1.11 наведені електроенцефалограма і її частотні складові у вигляді  $\Delta$ ,  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ -ритмів.

Більшість захворювань, травм і функціональних розладів, що зачіпають головний мозок, впливають також і на ЕЕГ. При цьому спектральний склад зміщується в бік низьких частот. Більш важкі травми викликають більш низькочастотну активність. Реєструючи ЕЕГ одночасно від різних частин голови, можна виявляти функціональні розлади мозку і говорити про ступінь їхньої ваги, локалізації і ступінь ураження.

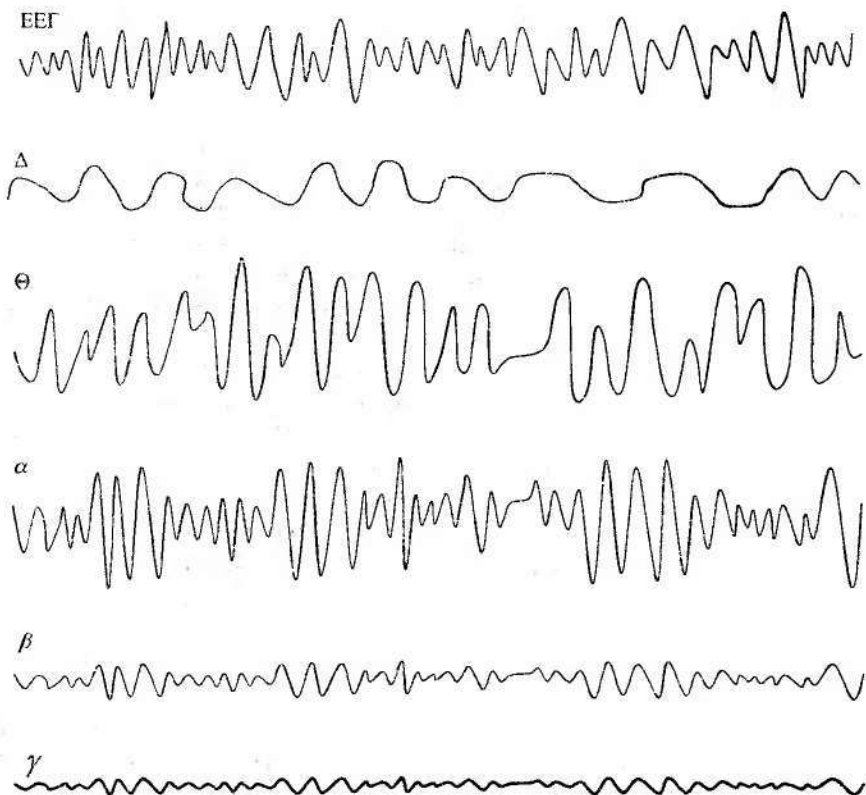


Рисунок 1.11 – Електроенцефалограма і її складові

Такі висновки ґрунтуються на спектральному складі сигналів. Різні травмн. захворювання, наприклад, пухлини, крововиливи, тромбози, запалення супроводжуються різними змінами в ЕЕГ і її спектральному складі (рис.1.12).

Крім особливостей ЕЕГ-сигналу, пов'язаних з його спектральними властивостями, можуть проявитися і нестационарні компоненти ЕЕГ, які накладаються на стаціонарну активність. Ці компоненти в залежності від форми мають назви спайок, гострих хвиль і пік-хвиль. Вони виявляються, головним чином, у хворих із різними формами епілептичних припадків (рис. 1.13).

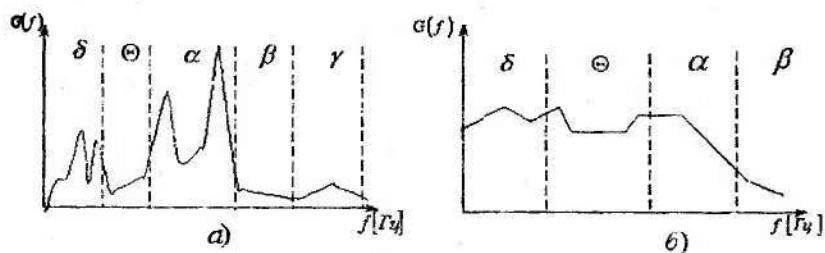


Рисунок 1.12 – Спектри ЕЕГ:  
а) – стан пильнування; б) – перехід до дрімоти

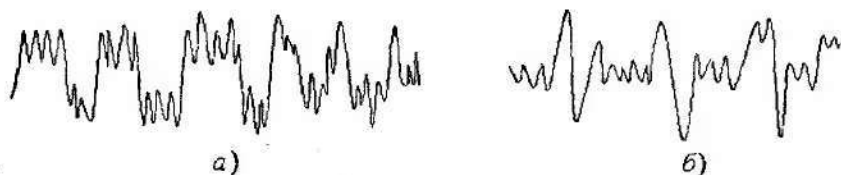


Рисунок 1.13 – Електроенцефалограми при епілепсіях:  
а) – пік-хвиля; б) – гострі хвилі

Для діагностики захворювань і спостереження за глибиною наркозу під час операцій застосовується спектрально-кореляційний аналіз ЕЕГ. При цьому визначаються частотні спектри з поданням результатів у вигляді набору спектральних характеристик, що змінюються у часі, за різними відведеннями. Кореляційні характеристики встановлюють зв'язок характеру зміни сигналу в різних відділах головного мозку за прийнятою системою відведень.

## 1.9 Електроміограма

Електроміограма (ЕМГ) – це запис фізіологічного сигналу, що виникає внаслідок біоелектричної активності м'язів. Електроміографічний сигнал (ЕМС) несе інформацію про стан нервово-м'язового апарата і може бути використаний для діагностики нервово-м'язових поразок різного генезу. Оцінка ушкоджень, що виникають у результаті травми, раннє виявлення патології, що розвивається, диференціальна оцінка зміни стану нервово-м'язового апарата залежить від області клінічного застосування ЕМГ.

Електричні сигнали м'язів складаються з так званих потенціалів дії окремих рухових волокон. Волокна м'яза функціонально організовані в

підгрупи – рухові одиниці. Активність кожної рухової одиниці керується розташованим у спинному мозку мотонейроном, аксони якого йдуть до м'яза. Аксон – це відросток нервової клітини, що проводить нервовий імпульс від тіла клітки до периферії. У м'язі аксон розгалужується на нервові закінчення, кожне з яких через нервово-м'язове з'єднання збуджує м'язове волокно. Приклади потенціалів дії рухових одиниць наведені на рис. 1.14.

Розрізняють три типи електроміографічних сигналів, відповідно до локальної, стимуляційної або глобальної електроміографії.

Для локальної ЕМГ виконується аналіз електричної активності елементарних утворень нейромоторного апарата: рухових одиниць, окремих м'язових волокон, міоневральних закінчень.



Рисунок 1.14 – Потенціали дії рухових одиниць

Параметрами локального ЕМС є тривалість, частота коливань, значення амплітуд, розмір інтервалів між імпульсами. Знання цих параметрів дозволяє визначити швидкість проведення імпульсу по м'язовому волокну, розмір «території» рухової одиниці, густоту м'язових волокон.

При стимуляційній ЕМГ вивчається сигнал, що виникає у відповідь на подразнення стимулом нерва або м'яза. Параметрами такого ЕМС є характеристика подразливого тону, тривалість латентних (схованих) періодів із моменту нанесення подразнення на частину нерва до появи коливання потенціалу в м'язі, амплітудно-частотні та часові показники наведених (викликаних) потенціалів дії, структура окремих складових, одночасність і синфазність коливань.

На рис. 1.15 показаний сигнал наведеного або викликаного потенціалу дії. Тут чітко проглядаються окремі структурні елементи коливального характеру, що підлягають аналізу.

При глобальній електроміографії аналізуються біоелектричні сигнали, пов'язані з порушенням безлічі сегментарних мотонейронів і збуджуваних ними м'язів під час рухових реакцій у нормі та під час рухових порушень. На рис. 1.16 наведений електроміографічний сигнал такого типу.

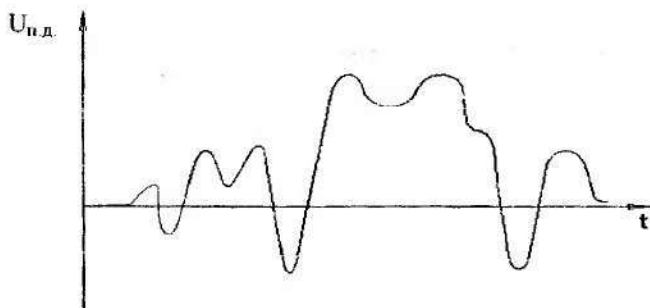


Рисунок 1.15 – Наведений потенціал дії

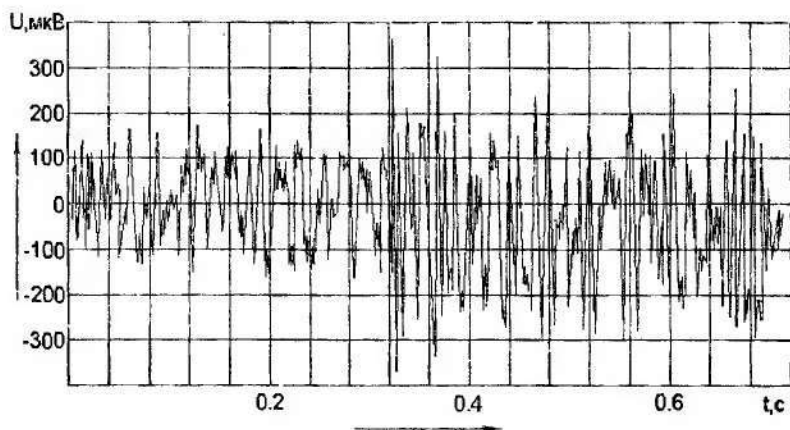


Рисунок 1.16 – Електроміографічний сигнал глобального типу

При глобальній ЕМГ аналізуються амплітудний і частотний склад, статистичні показники, різні тимчасові характеристики, в тому числі час «рекрутування», тобто час від появи перших коливань потенціалу до досягнення найбільших амплітуд, кількість екстремумів одного знака, кількість перетинань нульової лінії за одиницю часу. Важливе діагностичне значення мають відносні показники, що дають порівняльну оцінку електричної активності в різних м'язах при різних видах рухових реакцій.

Найбільше застосування під час дослідження електроміографічних сигналів одержали структурний або контурний і кореляційно-спектральні методи аналізу.

На рис. 1.17 наведені графіки, що характеризують розподіл енергії в частотному діапазоні: крива 1 – для потенціалу дії рухової одиниці; крива 2 – для електроміосигналу глобального типу.

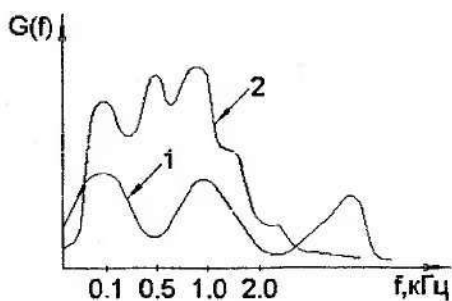


Рисунок 1.17 – Енергетичні спектри EMC

## 2 СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ СИГНАЛІВ

Розглянемо спектральне уявлення детермінованих фізіологічних сигналів.

*Спектральним уявленням* детермінованого сигналу  $S(t)$  називається його подання у вигляді суми скінченної або нескінченної кількості гармонійних складових. Основою спектрального уявлення сигналів є *перетворення Фур'є*.

### 2.1 Спектри періодичних сигналів

Будь-який складний періодичний сигнал може бути поданий у вигляді суми елементарних гармонійних сигналів.

Нехай функція  $S(t)$  періодично повторюється з частотою  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  і для неї виконуються умови Дирихле:

1) в будь-якому кінцевому інтервалі функція  $S(t)$  має бути безперервною або мати кінцеву кількість розривів першого роду, тобто під час прямування  $t$  до точок розриву функція  $S(t)$  повинна мати кінцеві межі;

2) в межах одного періоду функція повинна мати кінцеву кількість максимумів і мінімумів.

Така періодична функція  $S(t)$  може бути подана у вигляді ряду Фур'є

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\Omega_1 t + b_n \cdot \sin n\Omega_1 t), \quad (2.1)$$

де  $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt$  – середнє значення сигналу,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cdot \cos n\Omega_1 t dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cdot \sin n\Omega_1 t dt,$$

де  $\Omega_1$  – основна частота або частота першої гармоніки;

$\Omega_n = n\Omega_1$  – частоти вищих гармонік.

Ряд Фур'є можна записати інакше

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\Omega_1 t - \varphi_n), \quad (2.2)$$

де  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ;  $\varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$  – амплітуда і фаза  $n$ -ї гармоніки.

Обернені залежності для коефіцієнтів  $a_n$  і  $b_n$  мають такий вигляд:

$$a_n = A_n \cos \varphi_n; \quad b_n = A_n \sin \varphi_n.$$

Сукупність гармонійних складових, на які розкладається функція  $S(t)$ , називається спектром. Причому сукупність коефіцієнтів  $A_n$  називається спектром амплітуд, а сукупність значень  $\varphi_n$  – спектром фаз.

Наочне уявлення про спектр дають спектральні діаграми: амплітудні (рис. 2.1, а) і фазові (рис. 2.1, б). Під час їхньої побудови по осі абсцис відкладають частоти гармонік, а по осі ординат – значення амплітуд або фаз кожної гармоніки.

Спектр періодичної функції називається лінійчатим або дискретним, оскільки складається з окремих ліній, що відповідають таким частотам:  $0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n$ .

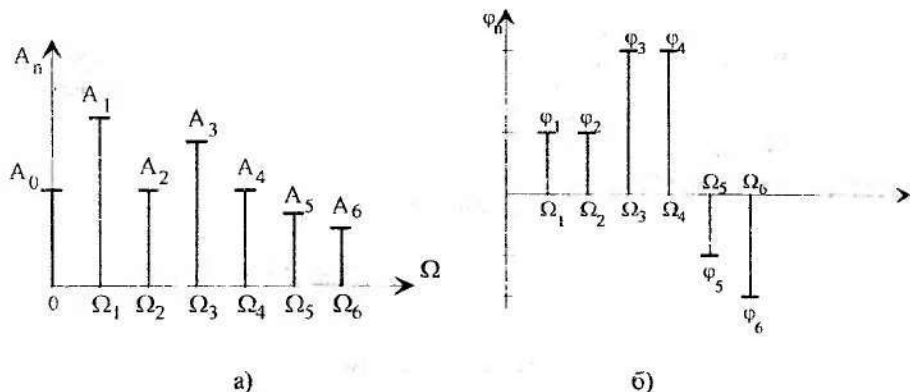


Рисунок 2.1 – Спектральні діаграми: а) амплітудні; б) фазові

Ряд Фур'є можна записати й у комплексній формі. Для цього скористаємося формулами Ейлера

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}.$$

Приймаємо, що  $\alpha = n\Omega_1 t$ . Підставляємо ці співвідношення у вирази (2.2), одержимо ряд Фур'є в комплексній формі

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{A}_n \cdot e^{jn\Omega_1 t}. \quad (2.3)$$

У цьому виразі  $\underline{A}_n = A_n \cdot e^{j\varphi_n}$  – комплексна амплітуда  $n$ -ї гармоніки, що пов'язана з коефіцієнтами ряду Фур'є співвідношеннями

$$\underline{A}_n = a_n - jb_n; \quad \underline{A}_{-n} = a_n + jb_n.$$

Підставляючи значення  $A_n$  в (2.3), одержимо

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{(jn\Omega_1 t + \varphi_n)}. \quad (2.4)$$

Комплексну амплітуду можна одержати безпосередньо з функції  $S(t)$ , не беручи до уваги обчислення коефіцієнтів  $a_n$  і  $b_n$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cdot e^{-jn\Omega_1 t} dt. \quad (2.5)$$

Цей вираз дозволяє знайти амплітудний спектр, тобто сукупність гармонійних складових у сумі утворюючих  $S(t)$ .

### 2.1.1 Спектр послідовності прямокутних однополярних імпульсів (рис. 2.2)

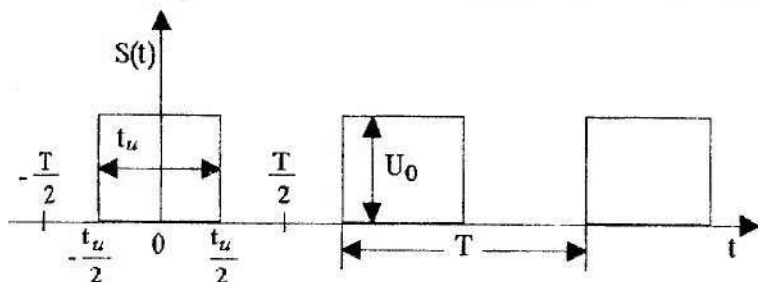


Рисунок 2.2 -- Послідовність однополярних імпульсів

Початок відліку обрано так, що функція виявилася парною і спектр міститиме тільки косинусоїдальні складові

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos n\Omega_1 t.$$

Визначимо середнє значення (постійну складову)

$$\frac{a_0}{2} = U_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{t_u} U_0 dt = U_0 \cdot \frac{t_u}{T}.$$

Визначимо амплітуди гармонік

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{t_u} U_0 \cdot \cos n\Omega_1 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{t_u} U_0 \cdot \cos n\Omega_1 t dt = \frac{4}{T} U_0 \cdot \frac{\sin n\Omega_1 t}{n\Omega_1} \Big|_0^{t_u} = \frac{4}{T} U_0 \cdot \frac{\sin \frac{n\Omega_1 t_u}{2}}{\frac{n\Omega_1}{2}}.$$

Оскільки  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T = \frac{2\pi}{\Omega_1}$ , тоді

$$U_n = \frac{2}{\pi} U_0 \cdot \frac{\sin \frac{n\Omega_1 t_u}{2}}{n} \quad \text{чи} \quad U_n = \frac{2}{\pi} U_0 \cdot \frac{\sin \frac{n\pi t_u}{T}}{n}. \quad (2.6)$$

Ці вирази визначають амплітудний спектр послідовності прямокутних однополярних імпульсів. Амплітуди гармонік при різноманітних  $n$  залежать від величини  $(\sin(n\Omega_1 t_u/2))/n$ .

Очевидно, що при  $\sin \frac{n\Omega_1 t_u}{2} = \pi \cdot k$  амплітуда  $n$ -ї гармоніки дорівнює нулю ( $U_n = 0$ ).

Визначимо номери гармонік  $n$ , для яких  $U_n = 0$

$$\sin \frac{n\Omega_1 t_u}{2} = \pi \cdot k \Rightarrow n = \frac{T}{t_u} \cdot k; \quad n\Omega_1 = \frac{2\pi}{t_u} \cdot k.$$

Амплітудна спектральна діаграма послідовності прямокутних імпульсів має вигляд, поданий на рис. 2.3. Спектр має нескінченну кількість гармонік. З рисунка видно, що на частотах  $\frac{2\pi}{t_u}, \frac{4\pi}{t_u}, \frac{6\pi}{t_u}, \dots$  огинаюча спектра дорівнює нулю.

Кількість гармонік на одному відрізку спектра  $n = \frac{T}{t_u}$ . Період  $T$  визначає відстань на шкалі частот між сусідніми лініями спектра  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ .

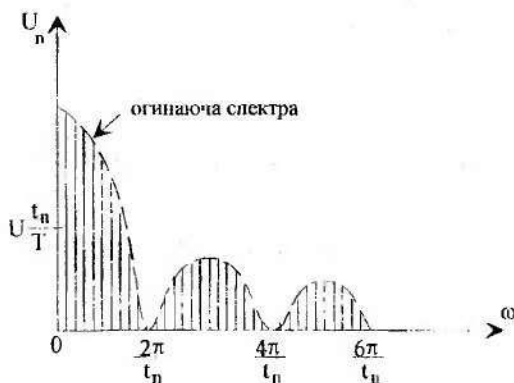


Рисунок 2.3 – Спектр послідовності однополярних прямокутних імпульсів

### 2.1.2 Спектр послідовності прямокутних різнополярних імпульсів (рис. 2.4)

Обчислимо комплексні амплітуди гармонійних складових для коливань типу

$$S(t) = \begin{cases} E & \text{при } 2m\frac{T}{2} < t < (2m+1)\frac{T}{2}, \\ -E & \text{при } (2m+1)\frac{T}{2} < t < 2(m+1)\frac{T}{2}; \end{cases}$$

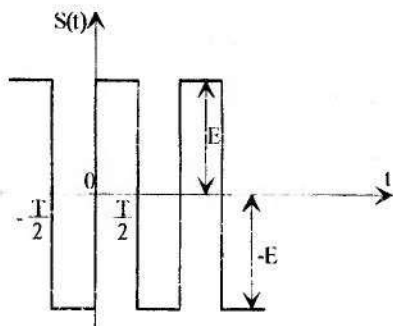


Рисунок 2.4 – Різнополярні імпульси

Визначимо комплексну амплітуду  $n$ -ї гармоніки

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cdot e^{-jn\Omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 (-E) \cdot e^{-jn\Omega_1 t} dt + \int_0^{T/2} (E) \cdot e^{-jn\Omega_1 t} dt \right] = \\ &= \frac{2E}{T} \cdot \frac{e^{-jn\Omega_1 t}}{-jn\Omega_1} \Big|_{-T/2}^0 + \frac{2E}{T} \cdot \frac{e^{-jn\Omega_1 t}}{-jn\Omega_1} \Big|_0^{T/2} = \frac{2E}{jn\pi} \cdot (1 - \cos n\pi). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Оскільки при  $n = 0, 2, 4, \dots$ ,  $1 - \cos n\pi = 0$ , то постійної складової і парних гармонік це коливання не містить.

При  $n = 1; n = 3; n = 5$

$$A_1 = \frac{2E}{j\pi} (1 + 1) = \frac{4E}{\pi} e^{-j90^\circ}, \quad A_3 = \frac{4E}{3\pi} e^{-j90^\circ}, \quad A_5 = \frac{4E}{5\pi} e^{-j90^\circ}.$$

Перейдемо від комплексних амплітуд до миттєвих значень гармонік, подамо заданий сигнал у вигляді суми гармонійних складових

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n\Omega_1 t - \varphi_n) = \frac{4E}{\pi} \cdot \cos\left(\Omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \\
 &+ \frac{4E}{3\pi} \cdot \cos\left(3\Omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4E}{5\pi} \cdot \cos\left(5\Omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \\
 &= \frac{4E}{\pi} \sin \Omega_1 t + \frac{4E}{3\pi} \sin 3\Omega_1 t + \frac{4E}{5\pi} \sin 5\Omega_1 t.
 \end{aligned}$$

Подання періодичного сигналу у вигляді сукупності гармонік називається відшукуванням спектра.

### 2.1.3 Залежність спектра від зміни параметрів послідовності імпульсів

Розглянемо характер зміни спектра від зміни періоду і тривалості імпульсів.

1. Порівнюємо спектри двох послідовностей з однаковими тривалостями й амплітудами імпульсів, але різними періодами:  $t_{u1} = t_{u2}; T_2 < T_1$  (рис. 2.5).

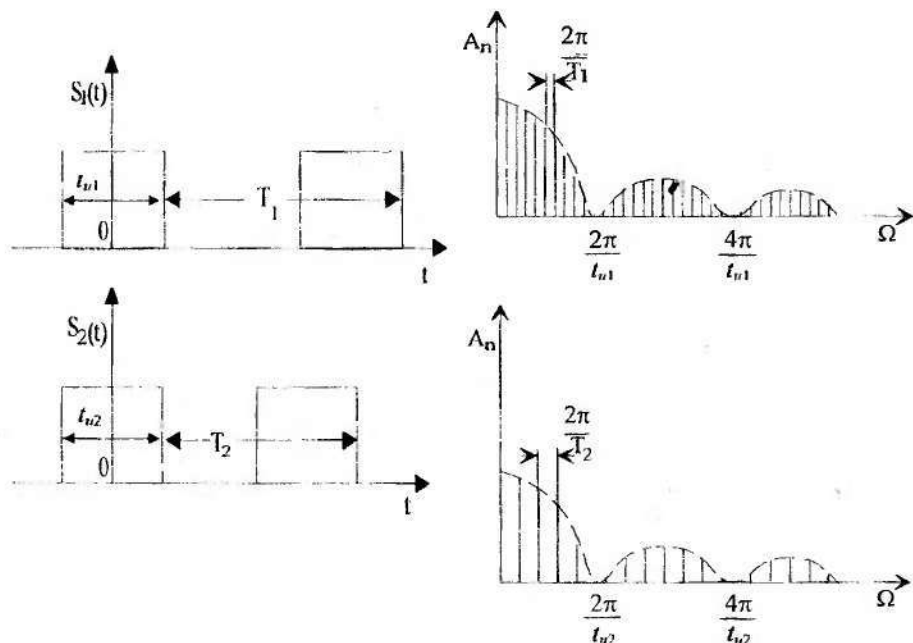


Рисунок 2.5 – Спектри порівнювальних послідовностей

Результати порівняння:

а) ширина відрізка спектра не змінюється, оскільки вона залежить від тривалості імпульсу  $2\pi/t_u$ ;

б) відстань між гармоніками збільшується, оскільки  $(\Omega_2 = 2\pi/T_2) > (\Omega_1 = 2\pi/T_1)$ ;

в) кількість гармонік на одному відрізку спектра зменшується –  $n = 2\pi/t_u$ ;

г) розмір постійної складової й амплітуди гармонік збільшуються (у визначених межах).

2. Порівняємо спектри двох послідовностей з однаковими періодами, але різними тривалостями імпульсів:  $T_1 = T_2$ ;  $t_{u1} > t_{u2}$  (рис. 2.6).

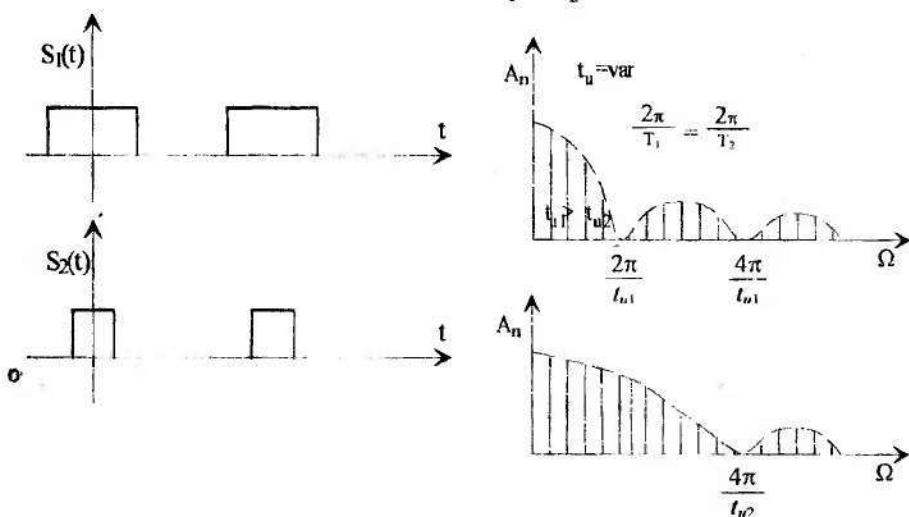


Рисунок 2.6 – Послідовності імпульсів та їхні спектри

Результати порівняння:

а) ширина одного відрізка спектра від  $\Omega = 0$  до  $\Omega = \frac{2\pi}{t_{u2}}$  змінюється; при зменшенні  $t_u$  ширина зростає;

б) відстань між гармоніками  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  не змінюється;

в) кількість гармонік  $n = \frac{T}{t_u}$  на одному відрізку спектра збільшується.

**ВИСНОВОК.** Ширина відрізка спектра тим більше, чим менше тривалість імпульсу; гармоніки тим ближче одна до одної, чим більше період. Амплітуда гармонік зменшується при збільшенні періоду і щільності.

## 2.2 Розподіл потужності в спектрі періодичного сигналу

Нехай несинусоїдальний періодичний струм  $i(t)$  протікає активним опором  $R$  (рис. 2.7). Визначити середню за період потужність, що витрачається на цьому опорі.

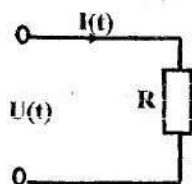


Рисунок 2.7– Коло для визначення потужності

Середня за період потужність визначається співвідношенням

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) R dt. \quad (2.8)$$

Розкладемо функцію струму  $i(t)$  у ряд Фур'є

$$i(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\Omega t + b_n \cdot \sin n\Omega t).$$

Підставимо цей розклад у вираз (2.8)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\Omega t + b_n \cdot \sin n\Omega t) \right]^2 \cdot R dt.$$

З огляду на те, що  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ ,  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ , а інтегрування за період вихідної функції гармонійних коливань із подвоєною частотою і добуток косинусів і синусів дають нуль, одержимо

$$P = \left[ \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right] \cdot R. \quad (2.9)$$

Якщо  $I_0 = \frac{a_0}{2}$  – постійна складового струму, а  $I_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  – амплітуда  $n$ -ї гармоніки, то

$$P = I_0^2 \cdot R + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2 \cdot R.$$

Середня потужність періодичного коливання виражається нескінченною сумою потужностей спектральних складових.

## 2.3 Спектри неперіодичних сигналів

Нехай заданий сигнал  $S(t)$ , що діє в кінцевому інтервалі часу  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Для проведення гармонійного аналізу діємо так:

1. Перетворимо наш неперіодичний сигнал у періодичний шляхом повторення його з довільним періодом  $T$ . Для отриманої таким способом функції застосуємо розкладання в ряд Фур'є.

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{A}_n \cdot e^{jn\Omega_1 t}; \quad \underline{A}_n = A_n \cdot e^{j\varphi_n},$$

де  $\underline{A}_n$  – комплексна амплітуда  $n$ -ї гармоніки.

Відомо, що комплексну амплітуду можна одержати з функції  $S(t)$  відповідно до виразу (2.5)

$$\underline{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cdot e^{-jn\Omega_1 t} dt.$$

2. Припустимо, що  $T$  прямує до нескінченності. Наприкінці одержимо нескінченно малі амплітуди гармонійних складових, сума яких зображує вихідну функцію  $S(t)$ . Кількість цих гармонік буде нескінченно великою, а відстань між гармоніками – нескінченно малою.

Спектр із лінійчатого стає *суцільним*. Відобразимо це аналітично.

Підставимо  $\underline{A}_n$  в  $S(t)$

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cdot e^{-jn\Omega_1 t} dt \right] \cdot e^{jn\Omega_1 t}.$$

Оскільки  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , тому

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cdot e^{-jn\Omega_1 t} dt \right] \cdot e^{jn\Omega_1 t} \cdot \Omega_1.$$

При  $T \rightarrow \infty$  розмір  $\Omega_1$  перетворюється в нескінченно малу поточну частоту, а операція підсумовування – в операцію інтегрування, тобто  $\lim_{T \rightarrow \infty} \Omega_1 = d\omega$ ;  $\lim_{T \rightarrow \infty} n\Omega_1 = \omega$ .

Отже, одержимо

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

У цьому виразі позначимо другий інтеграл через  $F(\omega)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (2.10)$$

Функція частоти  $F(\omega)$  називається *спектральною щільністю*, або *спектральною характеристикою* функції часу  $S(t)$ .

Підставивши  $F(\omega)$  у вихідний вираз  $S(t)$ , одержимо

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.11)$$

Вирази (2.10) і (2.11) мають назви пари перетворень Фур'є, що пов'язують між собою функцію часу  $S(t)$  і комплексну функцію частоти  $F(\omega)$ .

Пояснимо зміст спектральної щільності  $F(\omega)$ .

Якщо сигнал періодичний, то  $n$ -а гармоніка з частотою  $n\Omega_1 = \Omega_n$  матиме амплітуду  $A_n = \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cdot e^{-jn\Omega_1 t} dt$ .

Якщо ж сигнал неперіодичний, але в деякому обмеженому інтервалі збігається з періодичним  $S(t)$ , тоді на частоті  $\omega = \Omega_n$  спектральна щільність дорівнює

$$F(\Omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cdot e^{-jn\Omega_1 t} dt.$$

Звідси бачимо, що  $F(\omega) = \frac{T}{2} \cdot A_n$ . Оскільки  $T = \frac{1}{f_1}$ , тому  $F(\Omega_n) = \frac{A_n}{f_1}$ .

Очевидно, що значення спектральної щільності на визначеній частоті утворюється шляхом ділення амплітуди  $n$ -ї гармоніки на смугу частот  $f_1$ , яка відокремлює сусідні лінії дискретного спектра. Отже,  $F(\omega)$  має значення щільності амплітуд (амплітуда: герц) і визначає розмір сигналу, що припадає на одиницю смуги частот шириною в один герц. Тому ця неперервна функція частоти і називається спектральною щільністю амплітуд або просто спектральною щільністю.

Огинаюча суцільного спектра неперіодичного сигналу й огинаюча лінійчатого спектра періодичного сигналу збігаються за формою і відрізняються масштабом.

Спектральну щільність можна подати в комплексній формі

$$F(j\omega) = F_D(\omega) + jF_Y(\omega) = F(\omega) \cdot e^{j\theta(\omega)}, \quad (2.12)$$

$$\text{де } F_D(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot \cos \omega t dt; \quad F_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot \sin \omega t dt.$$

Модуль спектральної щільності дорівнює  $F(\omega) = \sqrt{F_D^2(\omega) + F_Y^2(\omega)}$ ,  
аргумент  $\theta(\omega) = \text{arctg} \frac{F_Y(\omega)}{F_D(\omega)}$ .

Спектр неперіодичного сигналу характеризується залежністю модуля й аргументу спектральної щільності від частоти. На відміну від розглянутих раніше дискретних спектрів періодичних коливань, цей спектр є суцільним, оскільки описується безупинними функціями частоти  $F(\omega)$  і  $\theta(\omega)$  (рис. 2.8).

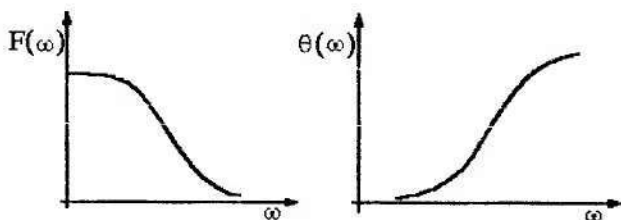


Рисунок 2.8 – Амплітудний і фазовий спектри

Розглянемо спектр одиночного прямокутного сигналу (рис. 2.9).

Аналітичний опис сигналу має такий вигляд:

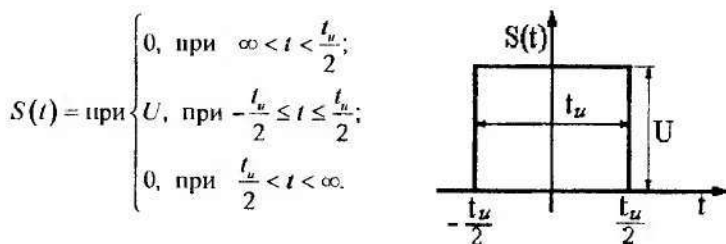


Рисунок 2.9 – Прямокутний імпульс

Визначимо спектральну щільність

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{t_u}{2}}^{\frac{t_u}{2}} U \cdot e^{-j\omega t} dt = -\frac{U}{j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{t_u}{2}}^{\frac{t_u}{2}} =$$

$$= -U \cdot e^{j\omega t} \Big|_{\frac{t_u}{2}}^{\frac{t_u}{2}} = -\frac{U}{j\omega} \left( e^{-j\omega \frac{t_u}{2}} - e^{j\omega \frac{t_u}{2}} \right) = \frac{2U}{\omega} \cdot \sin \omega \frac{t_u}{2}.$$

Перетворимо отриманий вираз

$$F(j\omega) = \frac{2U}{\omega} \cdot \frac{\omega t_u}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\omega t_u}{2}} \cdot \sin \omega \frac{t_u}{2} = U \cdot t_u \cdot \frac{\sin \omega \frac{t_u}{2}}{\omega \cdot \frac{t_u}{2}} \quad (2.13)$$

Цей вираз нагадує амплітудний спектр послідовності прямокутних імпульсів (2.6)

$$U_n = \frac{4}{T} U_0 \cdot \frac{\sin n\Omega \frac{t_u}{2}}{n\Omega} \cdot \frac{t_u}{2} = 2 \frac{t_u}{T} U_0 \cdot \frac{\sin n\Omega \frac{t_u}{2}}{n\Omega \frac{t_u}{2}} \quad (2.14)$$

Очевидно, що характер зміни спектральної щільності одиночного прямокутного імпульсу такий самий, що й огинаючої спектра (або спектральної функції) послідовності прямокутних імпульсів (рис. 2.10).

Проведемо аналіз  $F(\omega)$  прямокутного імпульсу сигналу.

З виразу  $F(\omega) = \frac{2U}{\omega} \sin \omega \frac{t_u}{2}$  випливає, що  $F(\omega) = 0$  при  $\sin \omega \frac{t_u}{2} = 0$ .

Цій умові відповідає частота  $\omega_n = \frac{2\pi n}{t_u}$ .

При  $\omega \rightarrow 0$  справедливо співвідношення  $\sin \frac{\omega t_u}{2} \approx \frac{\omega t_u}{2}$ . Тоді

$$F(0) = \frac{2U}{\omega} \cdot \frac{\omega t_u}{2} = U \cdot t_u \quad (2.15)$$

Отже, характер зміни модуля спектральної щільності істотно залежить від  $t_u$  і має вигляд кривої, поданої на рис. 2.10.

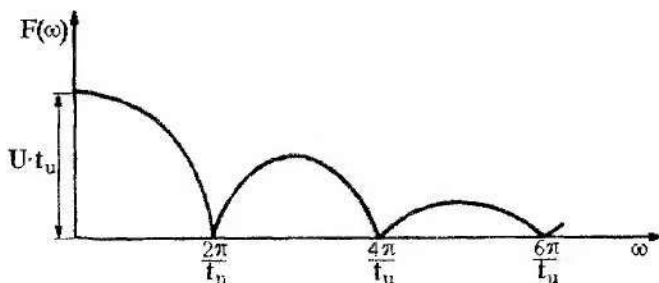


Рисунок 2.10 – Спектральна щільність прямокутного імпульсу

## 2.4 Узагальнений ряд Фур'є

У розглянутому раніше розкладанні періодичного сигналу в ряд Фур'є як функції розкладання (так звані базисні функції) були використані гармонійні функції синуса і косинуса. Ці функції найбільш доступні для розуміння, вони описують процеси, що нерідко зустрічаються в повсякденному житті та сприймаються нашими органами чуттів (коливання маятника, звукові коливання однієї тональності, хвильові коливання на поверхні води, вібрації механічних конструкцій тощо).

Для розкладання сигналів можна використовувати як базисні функції інші елементарні функції, а також ряд спеціальних функцій. Вибір виду функцій для розкладання сигналів складної форми визначається простою фізичною реалізацією, доступністю аналітичних рішень та інтерпретацією отриманих результатів, а також достатньою точністю апроксимацій.

Довільний сигнал  $S(t)$ , заданий на кінцевому інтервалі  $(t_1, t_2)$ , можна розкласти за системою ортогональних функцій  $\eta_k(t)$  у такий спосіб:

$$S(t) = C_0 \cdot \eta_0(t) + C_1 \cdot \eta_1(t) + \dots + C_i \cdot \eta_i(t) + \dots + C_n \cdot \eta_n(t) = \sum_{k=0}^n C_k \cdot \eta_k(t). \quad (2.16)$$

Вираз (2.16) називається узагальненим рядом Фур'є. Тут  $C_k$  – коефіцієнти розкладання, а  $\eta_k(t)$  – базисні функції ряду. Ці функції мають задовольняти умові ортогональності на інтервалі  $(t_1, t_2)$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \eta_i(t) \cdot \eta_k(t) dt = 0 \quad \text{при } i \neq k,$$

де  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Коефіцієнти  $C_k$  в розкладанні (2.16) характеризують вагу функції  $\eta_k(t)$  і визначаються виразом

$$C_k = \frac{1}{P_k} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} S(t) \cdot \eta_k(t) dt. \quad (2.17)$$

Тут  $P_k$  є потужністю базисної функції

$$P_k = \int_{t_1}^{t_2} \eta_k^2(t) dt.$$

Точність відповідності розкладання  $\sum_{k=1}^n C_k \cdot \eta_k(t)$  вихідному сигналу  $S(t)$  визначається розміром середньої квадратичної помилки апроксимації

$$\sigma^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[ S(t) - \sum_{k=0}^n C_k \cdot \eta_k(t) \right]^2 dt. \quad (2.18)$$

З цього виразу випливає, що зі збільшенням  $n$  при апроксимації сигналу  $S(t)$  великою кількістю ортогональних функцій помилка  $\sigma^2$  зменшується. В практичних завданнях важливо так обрати систему базисних функцій  $\{\eta_k(t)\}$ , щоб забезпечити задану точність апроксимації при мінімальній кількості членів ряду (2.16).

## 2.5 Розкладання сигналів за спеціальними функціями

Відомі зараз аналізовані в курсі математики спеціальні функції можуть бути ортогональні на всій нескінченній вісі  $t$ , на інтервалі  $(0, \infty)$  і на кінцевому інтервалі  $(t_1, t_2)$ . Багато спеціальних функцій добре табульовані, що дозволяє здійснювати точні обчислення, а при правильному доборі функції для заданого сигналу можна обмежитися невеликою кількістю членів ряду.

Як спеціальні базисні функції застосовуються функції Лежандра, Чебишева, Ерміта, Лагерра, Уолша. Розглянемо аналітичні та графічні подання цих функцій, а також методику їхнього застосування для апроксимації сигналів за допомогою узагальненого ряду Фур'є.

### 1. Функції Лежандра

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{(n)}}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \quad (2.19)$$

Для функцій Лежандра перших чотирьох порядків ( $n=1,2,3,4$ ) маємо такі значення:

$$P_0(t) = 1; \quad P_1(t) = t; \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1); \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t); \quad P_4 = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3).$$

Графіки функцій Лежандра наведені на рис. 2.11а.

2. Функції Чебишева подаються співвідношенням

$$T_n(t) = \frac{(-2)^n \cdot n!}{(2n)!} \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \left( \sqrt{1-t^2} \right)^{2n-1}. \quad (2.20)$$

Для  $n = 1, 2, 3, 4$  функції мають такі значення:

$$T_0(t) = 1; \quad T_1(t) = t; \quad T_2(t) = 2t^2 - 1; \quad T_3(t) = 4t^3 - 3t; \quad T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1.$$

3. Функції Ерміта

$$H_n(t) = (-1)^n \cdot e^{t^2} \cdot \frac{d^{(n)}}{dt^n} \left( e^{-t^2} \right). \quad (2.21)$$

4. Функції Лагерра

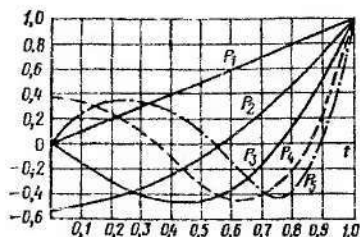
$$L_n(t) = (-1)^n \cdot e^t \cdot \frac{d^{(n)}}{dt^n} \left( t^n \cdot e^{-t} \right). \quad (2.22)$$

Значення функцій Ерміта та Лагерра для різноманітних  $n$  обчислюються аналогічно наведеним вище функціям Лежандра і Чебишева.

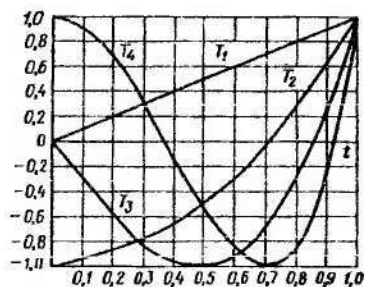
Розглянуті функції є поліномами для кожного значення  $n$ , тому вони називаються поліноміальними.

Системи функцій Лежандра і Чебишева визначені на інтервалі  $(-1; +1)$  та застосовуються для апроксимації процесів і характеристик, визначених на кінцевому інтервалі. Системи функцій Ерміта і Лагерра визначені на нескінченному інтервалі.

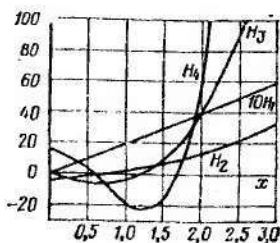
На рис. 2.11 наведено графіки функцій.



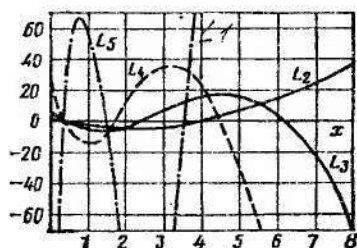
а)



б)



в)



г)

Рисунок 2.11 – Графіки спеціальних функцій: а) функція Лежандра; б) функція Чебишева; в) функція Ерміта; г) функція Лаггера

Розглянемо приклад застосування спеціальних функцій як базисних для розкладання прямокутного різнополярного сигналу  $S(t)$  на інтервалі  $(-1; +1)$  (рис. 2.12).

$$S(t) = \begin{cases} +1 & \text{при } -1 < t < 0, \\ -1 & \text{при } 0 < t < 1. \end{cases}$$

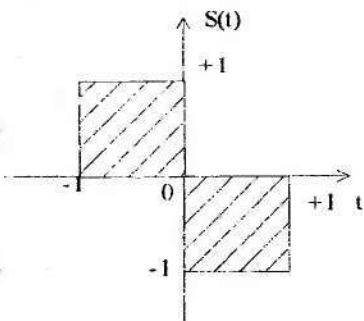


Рисунок 2.12 - Різнопольярний сигнал

Оскільки сигнал  $S(t)$  заданий на кінцевому інтервалі  $(-1; +1)$ , тому доцільно розкласти його за допомогою полінома Лежандра або Чебишева. Скористаємося поліномом Лежандра. Запишемо ряд Фур'є, складений із цих поліномів

$$S(t) = C_0 \cdot P_0(t) + C_1 \cdot P_1(t) + C_2 \cdot P_2(t) + \dots$$

Коефіцієнти узагальненого ряду Фур'є  $C_0, C_1, C_2, \dots$  визначаються з виразу

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} S(t) \cdot P_n(t) dt.$$

Тоді одержимо

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} S(t) \cdot P_0(t) dt = \frac{1}{2} \left[ \int_{-1}^0 (+1) dt + \int_0^1 (-1) dt \right] = 0.$$

$$C_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} S(t) \cdot P_2(t) dt = \frac{5}{2} \left[ \int_{-1}^0 (+1) \cdot \left( \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) dt + \int_0^1 (-1) \cdot \left( \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) dt \right] = 0.$$

Можна показати, що й інші коефіцієнти з парними індексами дорівнюють нулю, тобто

$$C_4 = C_6 = \dots = 0.$$

Далі знаходимо

$$C_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} S(t) \cdot P_1(t) dt = \frac{3}{2} \left[ \int_{-1}^0 (+1) \cdot t dt + \int_0^1 (-1) \cdot t dt \right] = -\frac{3}{2}.$$

$$C_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^{+1} S(t) \cdot P_3(t) dt = \frac{7}{2} \int_{-1}^{+1} S(t) \cdot \left( \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \right) dt = \frac{7}{8}.$$

Аналогічно обчислюються коефіцієнти  $C_5, C_7, \dots$ . З огляду на перші чотири складові ряду Фур'є-Лежандра одержимо

$$S(t) = C_0 \cdot P_0(t) + C_1 \cdot P_1(t) + C_2 \cdot P_2(t) + C_3 \cdot P_3(t) =$$

$$= -\frac{3}{2}t + \frac{7}{8}\left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) = -\frac{45}{16}t + \frac{35}{16}t^3. \quad (2.23)$$

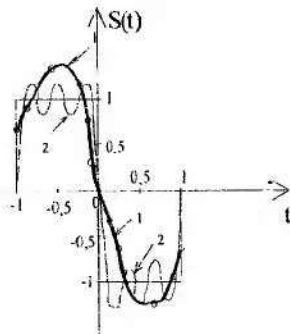
Середня квадратична похибка апроксимації при цьому дорівнює  $\sigma^2 = 0,28$ .

Для порівняння визначимо  $\sigma^2$  під час розкладання заданого сигналу за тригонометричним базисом  $\{\sin n\Omega t\}$  для чотирьох складових ряду Фур'є

$$S(t) = C_1 \cdot \sin \Omega t + C_2 \cdot \sin 2\Omega t + C_3 \cdot \sin 3\Omega t + \dots + C_n \cdot \sin n\Omega t + \dots$$

На рис. 2.13 зображені функція  $S(t)$  й апроксимуючі її криві, побудовані за виразами (2.23, крива 1) і (2.24, крива 2).

Оскільки функція  $S(t)$  задана на інтервалі  $(-1; +1)$ , то період  $T$  базисної функції  $\sin \Omega t$  дорівнює 2, а кутова частота  $\Omega = 2\pi/T = \pi$ . Обмежуючись чотирма членами ряду, одержимо



$$\begin{aligned} S(t) &= C_1 \cdot \sin \pi t + C_2 \cdot \sin 2\pi t + \\ &+ C_3 \cdot \sin 3\pi t + C_4 \cdot \sin 4\pi t = \\ &= -\frac{4}{5} \sin \pi t - \frac{4}{3\pi} \sin 3\pi t. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Середня квадратична похибка апроксимації сигналу тригонометричними функціями дорівнює  $\sigma^2 = 0,0675$ .

Результати порівняння за критерієм середньої квадратичної помилки різноманітних засобів апроксимації чотирма членами ряду Фур'є краще, ніж чотирма членами ряду Фур'є-Легандра.

Рисунок 2.13 – Апроксимація прямокутного сигналу

## 2.6 Розкладання сигналів за функціями Уолша

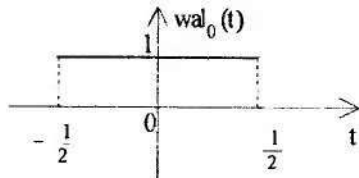
Система функцій Уолша позначається  $\{wal_m(x)\}$ , де  $m$  – ціле число, що визначає номер функції в системі. Графіки функцій Уолша при  $m = 0 - 5$  подані на рис. 2.14.

Функції Уолша мають такі властивості:

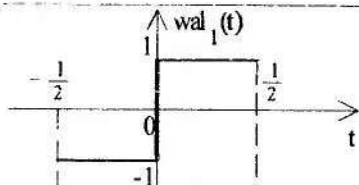
1. Функції Уолша приймають тільки два значення:  $-1$  і  $1$ .
2. Будь-які дві функції Уолша ортогональні

$$\int_{-1/2}^{1/2} wal_m(t) \cdot wal_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n; \\ 1 & \text{при } m = n. \end{cases}$$

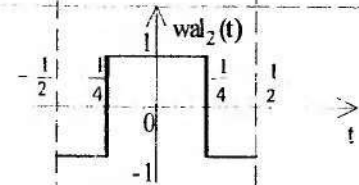
$m=0$ ;  $wal_0(t)=1$



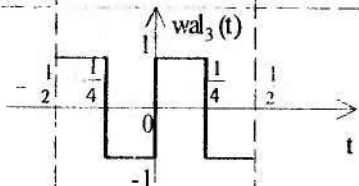
$m=1$ ;  $wal_1(t)$



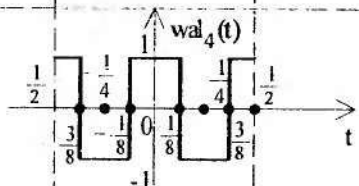
$m=2$ ;  $wal_2(t)$



$m=3$ ;  $wal_3(t)$



$m=4$ ;  $wal_4(t)$



$m=5$ ;  $wal_5(t)$

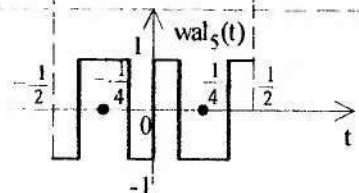


Рисунок 2.14 – Графіки функцій Уолша перших п'яти порядків

3. Функції Уолша є періодичними з періодом, який дорівнює 1.

4. Функції Уолша мають властивість мультиплікативності, тобто добуток будь-яких двох функцій Уолша є також функцією Уолша.

5. Система функцій Уолша складається з системи парних і непарних (відносно інтервалу визначення) функцій, що позначаються відповідно  $cal_k(t)$  і  $sal_k(t)$ , причому

$$cal_k(t) = wal_m(t), \quad k = \frac{m}{2};$$

$$sal_k(t) = wal_m(t), \quad k = \frac{m+1}{2}.$$

Тут  $k$  - порядок парних і непарних функцій, що характеризує кількість змін знака на інтервалі  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ . Наприклад,

$$cal_1(t) = wal_2(t), \quad sal_1(t) = wal_1(t),$$

$$cal_2(t) = wal_4(t), \quad sal_2(t) = wal_3(t),$$

$$cal_3(t) = wal_6(t), \quad sal_3(t) = wal_5(t).$$

Довільну функцію  $S(t)$ , задану на інтервалі  $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ , можна подати узагальненим рядом Фур'є, складеним з функцій Уолша

$$S(t) = a_0 cal(0,t) + a_1 cal(1,t) + b_1 sal(1,t) + a_2 cal(2,t) + b_2 sal(2,t) + a_3 cal(3,t) + b_3 sal(3,t) + \dots + a_n cal(n,t) + b_n sal(n,t). \quad (2.25)$$

Коефіцієнти цього ряду знаходяться за формулами

$$a_0 = \int_{-1/2}^{1/2} S(t) dt; \quad a_k = \int_{-1/2}^{1/2} S(t) \cdot cal(k,t) dt; \quad b_k = \int_{-1/2}^{1/2} S(t) \cdot sal(k,t) dt. \quad (2.26)$$

Розглянемо приклад розкладання сигналу.

Розкласти сигнал трикутної форми (рис. 2.15) за системою функцій Уолша. В інтервалі часу  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  вихідний сигнал описується функцією

$$S(t) = t' \left( \frac{t}{T} + \frac{1}{2} \right).$$

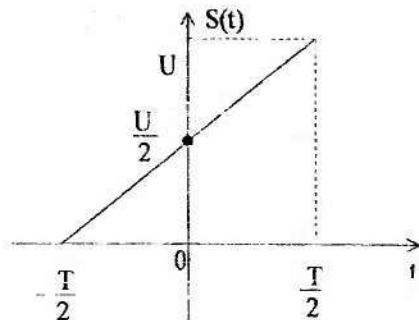


Рисунок 2.15 – Сигнал трикутної форми

Визначимо коефіцієнти узагальненого ряду Фур'є за формулою (2.26)

$$a_0 = \int_{-1/2}^{1/2} S(t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} U \left( \frac{t}{T} + \frac{1}{2} \right) \cdot (-1) dt + \int_0^{1/2} U \left( \frac{t}{T} + \frac{1}{2} \right) \cdot (+1) dt = \frac{U}{4}.$$

Під час апроксимації коливання трикутної форми двома першими членами ряду за системою Уолша отримаємо наближене уявлення у вигляді імпульсу східчастої форми (рис. 2.16 а). Складові його функції наведені на рис. 2.16 б, в.

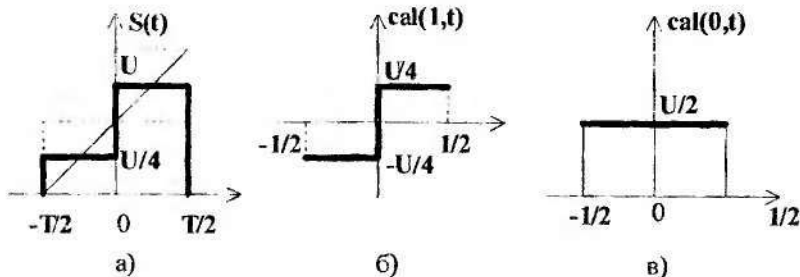


Рисунок 2.16 – Складові апроксимації

## 2.7 Дискретні та цифрові сигнали

Сьогодні найбільше застосування отримали цифрові методи обробки медико-біологічних сигналів. Перетворення аналогового сигналу в цифрову форму здійснюється в аналого-цифровому перетворювачі (АЦП) і складається з

трьох стадій: дискретизації за часом, квантування за рівнем і кодування (рис. 2.17).

Операція дискретизації полягає в тому, що за заданим аналоговим сигналом  $S(t)$  будується дискретний сигнал  $S(nT)$  так, що  $S(nT) = S(t = nT)$ . При цьому будь-який нескінченний сигнал, що займає кінцевий інтервал часу  $T_c$ , може бути поданий із достатньою точністю кінцевою кількістю своїх миттєвих значень, які називають відліками або вибірками.

Дискретизація сигналу за часом – це процедура, що полягає в заміні нескінченної множини відліків, які містять інформацію про значення безупинного сигналу у визначені моменти часу. Метод дискретизації заснований на теоремі відліків Шеннона-Котельникова. Відповідно до цієї теореми нескінченний сигнал  $S(t)$ , верхня частота спектра якого не перевищує розмір  $F_B$ , цілком визначається послідовністю миттєвих значень

$$S(nT), \text{ відлічених у дискретні моменти часу через інтервали } T = \frac{1}{2F_B}.$$

Кількість дискретних значень сигналу визначається його тривалістю  $T_c$  й інтервалом дискретизації  $T$

$$N = T_c / T = 2T_c \cdot F_B. \quad (2.27)$$

За отриманим під час дискретизації дискретним сигналом (рис. 2.17 б) у результаті квантування і кодування будується цифровий сигнал  $S_y(nT)$  (рис. 2.17 в).

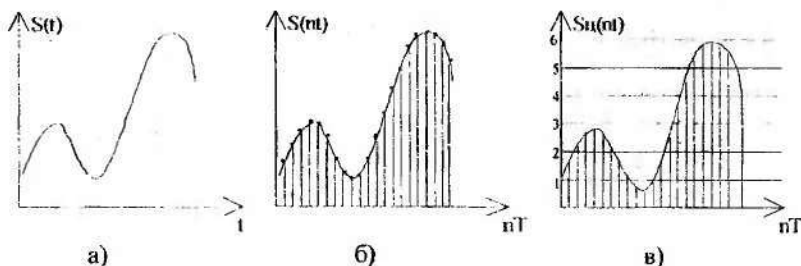


Рисунок 2.17 – Перетворення аналогового сигналу: а) аналоговий сигнал; б) дискретизація; в) квантування

Під час квантування за рівнем дискретний сигнал має приймати визначені, так звані дозволені рівні, внаслідок чого з'являється похибка квантування. Тому  $S_y(nT) \approx S(nT)$ . Отже, перехід від дискретного сигналу до цифрового внаслідок квантування здійснюється неточно. Якщо для подання кожного відліку використовується достатньо велика кількість двійкових розрядів, то похибка квантування виявиться малою і дискретний сигнал може

бути поданий цифровим сигналом із високою точністю. Оскільки кожен із рівнів квантування кодується кодом, який складається з двійкових цифр, то опрацювання відліку цифрового кодованого сигналу зводиться до операцій над безрозмірним двійковим кодом. Кількість рівнів квантування  $K$  і кількість розрядів  $S$  відповідних кодів пов'язані залежністю  $S \geq (\log_2 K)$ .

Під час розв'язання задач опрацювання цифрових сигналів використовуються лінійні дискретні моделі, що дозволяють застосовувати до цифрових моделей методи теорії дискретних сигналів і лінійних дискретних сигналів [4].

### 3 ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Розглянутий раніше спектральний аналіз безперервних сигналів дає можливість визначити частоти, що містять у собі сигнал, який аналізується. Для виконання розрахунків має бути заданий аналітичний опис сигналу  $S(t)$ . Під час аналізу сигналів за допомогою обчислювальних пристроїв необхідно вихідний аналоговий сигнал зобразити у вигляді сукупності дискретних відліків. Визначення спектрального складу при цьому здійснюється за допомогою дискретного перетворення Фур'є (ДПФ). Нижче будуть розглянуті ДПФ для послідовностей різноманітної тривалості, його властивості, особливості застосування часових або спектральних вікон, алгоритми швидкого перетворення Фур'є.

#### 3.1 Перетворення Фур'є безперервного сигналу

Нагадаємо відомості про перетворення Фур'є безперервного сигналу. Спектральна щільність  $F(j\omega)$  і аналітичний вираз сигналу  $f(t)$  пов'язані між собою парою перетворень Фур'є, що записуються в такому вигляді:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt; \quad (3.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.2)$$

Спектральна щільність або спектральна функція  $F(j\omega)$  є комплексною функцією з дійсною й уявною складовими, що визначають модуль і фазу

$$F(j\omega) = F_D(\omega) + jF_M(\omega) = F(\omega) \cdot e^{j\theta(\omega)}.$$

Нерідко обчислюється лише модуль  $F(\omega)$  функції  $F(j\omega)$ , що зображується як амплітудний спектр.

Розглянемо наведений на рис.3.1а сигнал, який є загасаючими коливаннями такого вигляду:

$$f(t) = 3 \cdot e^{-t/T} \cdot \sin 2\pi ft. \quad (3.3)$$

Амплітудний спектр цього сигналу, обчислений відповідно до виразу (3.1), визначається співвідношенням

$$F(\omega) = \frac{6}{\sqrt{\omega^4 - 7,5\omega^2 + 18}}$$

і зображений на рис. 3.1 б.

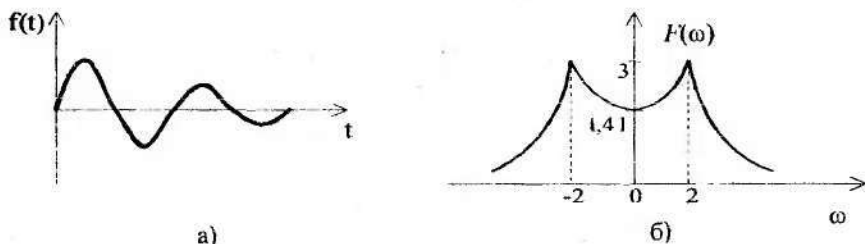


Рисунок 3.1 – Згасаюче коливання і його спектр: а) коливання; б) спектр

### 3.2 ДПФ дискретизованого обмеженого в часі сигналу

Визначимо ДПФ  $F_d(j\omega)$  на базі послідовності вибірок обмеженого в часі сигналу. За основу візьмемо функцію  $f(t)$ , яка зменшується, (рис. 3.1 а). Нехай вона визначена в точках  $t_n = nT_a$ , причому індекс  $n$  пробігає номери відліків від 0 до  $N-1$ . Через  $T_a$  позначимо період дискретизації, через  $T_c$  – час спостереження  $N$  вибірок, кратний від періоду дискретизації, тобто  $T_c = N \cdot T_a$ .

Отримані значення функції  $f(t)$  відомі тільки для дискретних точок часу  $nT_a$ , тобто з безперервної величини  $t$  виникає дискретна  $nT_a$  (рис. 3.2). Для визначення спектральної функції дискретного сигналу, що виконується за допомогою ДПФ, замінимо в (3.1)  $t$  на  $nT_a$ ;  $f(t)$  на  $f(nT_a)$ ;  $e^{-j\omega t}$  на  $e^{-j\omega nT_a}$ . Це дає можливість виконувати обчислення з дискретними величинами. Далі необхідно апроксимувати інтеграл у (3.1) як суму прямокутників із висотою  $f(nT_a)$  і шириною  $T_a$

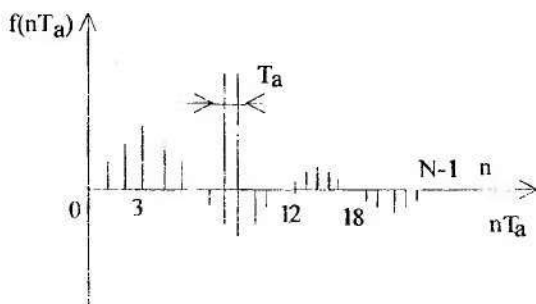


Рисунок 3.2 – Дискретизований сигнал

$$\int f(t)dt \approx T_a \cdot \sum f(nT_a).$$

Помноження на інтервалі дискретизації не входить у визначення ДПФ. З огляду на кругову функцію одержимо алгоритм обчислення ДПФ

$$\begin{aligned} F_d(j\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot e^{-j\omega nT_a} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot \cos \omega nT_a - j \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot \sin \omega nT_a. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Цей вираз не є остаточною формою запису ДПФ, проте його можна порівняти з перетворенням Фур'є для безперервних сигналів. Обидва перетворення мають загальні властивості:

а) якщо часова функція є парною, тобто  $f_n = f_{-n}$ , то спектральна функція  $F_d(\omega)$  також парна і дійсна;

б) якщо часова функція непарна, тобто  $f_n = -f_{-n}$ , то спектральна функція непарна й уявна;

в) функції  $F(j\omega)$  і  $F(-j\omega)$ , і відповідно  $F_d(j\omega)$  і  $F_d(-j\omega)$  є комплексно спряженими.

Крім того, ДПФ має свої особливості:

а) періодична відносно аргументу  $\omega$  з періодом  $\omega_a = 2\pi/T_a$  і періодична відносно аргументу  $f$  з періодом  $f_a = 1/T_a$ ;

б) дорівнює за розміром й одиницею вимірювання перетворенню Фур'є (3.1) тільки після перемноження з інтервалом дискретизації  $T_a$ ;

в) має обчислюватися тільки для дискретних значень частоти

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N \cdot T_a} \cdot k.$$

Експоненціальна функція  $e^{-j\omega nT_a}$  у виразі (3.4) має період  $2\pi$

$$e^{-j\omega nT_a} = e^{-jn(\omega T_a + 2\pi)} = e^{-jnT_a \left( \omega + \frac{2\pi}{T_a} \right)}. \quad (3.5)$$

Відповідно отримуємо

$$F_d(j\omega) = F_d \left[ j \left( \omega + \frac{2\pi}{T_a} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Це означає, що спектр дискретного сигналу є періодичним і повторюється періодом  $2\pi/T_a$ , що дорівнює частоті дискретизації  $\omega_a$ .

Спектр періодичної функції аналогового сигналу має дискретний характер, а спектр дискретного сигналу, визначений за допомогою вибірок, є дискретним і періодичним.

Щоб спектри ДПФ, які повторюються, не перекривалися на вісі частот, необхідно, щоб частота дискретизації  $\omega_a$  відповідала умові  $\omega_a \geq 2\omega_B$ , де  $\omega_B$  – максимальна частота спектра сигналу.

Ця вимога впливає з теореми Котельникова:  $T_a \geq 1/2F_B$ ,  $F_a = 1/T_a$ ;  $F_a > 2F_B$  – частота дискретизації має бути більшою, ніж подвійне значення максимальної частоти спектра.

Залежність ДПФ від частоти дискретизації (або інтервалу дискретизації) зображена на рис.3.3.

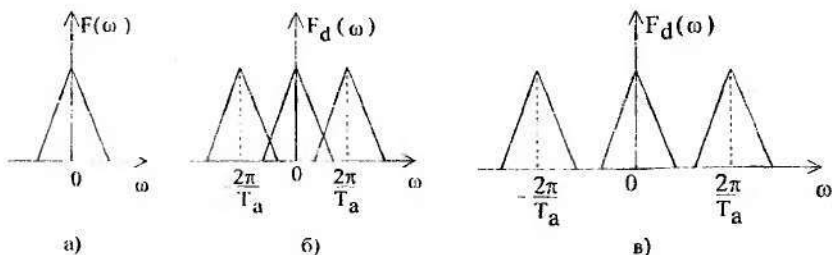


Рисунок 3.3 – Залежність ДПФ від частоти дискретизації: а) звичайне перетворення Фур'є для безперервного сигналу; б) огинаюча ДПФ  $F_d(j\omega)$  для дискретного сигналу з  $T_a = 1,25$  с,  $\omega_a = 2\pi/1,25 = 5$  с $^{-1}$ ; в) огинаюча ДПФ для

дискретного сигналу з  $T_a = 0,8$  с,  $\omega_a = \frac{2\pi}{0,8} = 7,85$  с $^{-1}$

Кожна спектральна лінія складається з однієї дійсної й однієї уявної складових (3.4). Отже, з  $N$  вибірок можна визначити амплітуди і фази для  $N/2$  дискретних частот, які знаходяться в інтервалі від  $f = 0$  до  $f = \frac{1}{2}f_a$ . В області частот від  $f = 0$  до  $f = f_a$  можна побудувати  $N$  спектральних ліній. Частоти спектральних складових (або дискретні частоти) визначаються співвідношенням

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N \cdot T_a} \cdot k, \quad (3.7)$$

де  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ .

Якщо у виразі (3.4) замінити  $\omega$  на  $\omega_k$ , то одержимо узвичасну форму запису ДПФ

$$F_d(j\omega_k) = F_d\left(j \frac{2\pi}{N \cdot T_a} \cdot k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot e^{-j\omega_k \cdot nT_a} \quad (3.8)$$

Дискретні значення частоти розташовані на відстані  $\Delta\omega$  одне від одного

$$\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{N \cdot T_a} \cdot (k+1) - \frac{2\pi}{N \cdot T_a} \cdot k = \frac{2\pi}{N \cdot T_a} \quad (3.9)$$

Звідси випливає, що відстань між спектральними складовими (селективність спектра) обернено пропорційна часу спостереження сигналу  $T_c = NT_a$ .

Для того, щоб амплітуди спектральних коефіцієнтів ДПФ відповідали за розмірністю і величиною звичайному перетворенню Фур'є (спектральній щільності), їх помножують на  $T_a$

$$F(j\omega) \sim T_a \cdot F_d(j\omega_k),$$

або

$$T_a \cdot F_d(j\omega_k) = T_a \cdot \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot e^{-j\omega_k \cdot nT_a} \quad (3.10)$$

Зважаючи на те, що

$$e^{-j\omega_k \cdot nT_a} = \cos(\omega_k \cdot n \cdot T_a) - j \sin(\omega_k \cdot n \cdot T_a),$$

одержимо

$$F_d(j\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot \cos(\omega_k \cdot n \cdot T_a) - j \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot \sin(\omega_k \cdot n \cdot T_a) \quad (3.11)$$

Модуль  $|F_d(j\omega_k)| = F_d(\omega_k)$  обчислюється відповідно до виразу

$$|F_d(j\omega_k)| = \sqrt{\left[ \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot \cos(\omega_k nT_a) \right]^2 + \left[ \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot \sin(\omega_k nT_a) \right]^2} \quad (3.12)$$

Аргумент  $F_d(j\omega_k)$  також обчислюється для дискретних частот

$$\text{Arg}F_d(j\omega_k) = -\arctg \frac{\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot \sin(\omega_k nT_a)}{\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot \cos(\omega_k \cdot n \cdot T_a)}. \quad (3.13)$$

**Приклад 3.1.** Сигнал  $f(t) = 3e^{-t/\tau} \sin 2\pi ft$  тривалістю 10с має в результаті дискретизації 50 вибірок, тобто  $N = 50$ ;  $T_a = 0,2\text{с}$ ;  $f_a = 5\text{ Гц}$ ;  $NT_a = 10\text{с}$ . визначити амплітудний спектр.

Спектральна функція  $F_d(j\omega_k)$  періодична з частотою дискретизації  $\omega_a = 2\pi/T_a = 6,28/0,2 = 31,4\text{ с}^{-1}$ .

**Розв'язання.** Дискретні відліки спектра сигналу можна обчислити для всіх  $N = 50$  дискретних частот  $\omega_k$  за формулою (3.12). Ці частоти знаходяться на відстані  $2\pi/N \cdot T_a = 0,2\pi\text{ с}^{-1}$  одна від одної.

Визначимо значення відліків  $f(nT_a)$  для заданого сигналу  $f(t) = 3e^{-t/\tau} \cdot \sin 2\pi ft$  відповідно до виразу для дискретного сигналу

$$f(nT_a) = 3e^{-nT_a/\tau} \cdot \sin(2\pi f nT_a).$$

Нехай частота сигналу  $f = 1/\pi$ , постійна згасання  $\tau = 2$ , тоді значення першого відліку дискретного сигналу

$$f(1 \cdot T_a) = 3e^{-1 \cdot 0,2/2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{\pi} \cdot 1 \cdot 0,2 = 3e^{-0,1} \cdot \sin 23^\circ = 1,0571.$$

Подібні обчислення проводяться для всіх  $n$ : від  $n = 0$  до  $N = N - 1 = 49$  включно.

Послідовність вибірок  $f(nT_a)$  наведена в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Значення дискретного сигналу

$n$	0	1	2	3	...	47	48	49
$nT_a, \text{с}$	0	0,2	0,4	0,6	...	9,4	9,6	9,8
$f(nT_a)$	0	1,0571	1,7620	2,0714	...	0,0014	0,0085	0,0152

Модулі та фази (аргументи) дискретного спектра необхідно обчислювати відповідно до виразів (3.12) і (3.13).

Визначимо амплітуду ДПФ для частоти  $\omega_k$ ; при  $k = 5$ , тобто

$$\omega_5 = \frac{2\pi}{50 \cdot 0,2} \cdot 5 = \pi;$$

$$F_d(\omega_5 = \pi) = \{0 \cdot \cos \pi \cdot 0 + 1,0571 \cdot \cos(\pi \cdot 1 \cdot 0,2) + 1,762 \cdot \cos(\pi \cdot 2 \cdot 0,2) + \dots + 0,0085 \cdot \cos(\pi \cdot 48 \cdot 0,2) + 0,0152 \cdot \cos(\pi \cdot 49 \cdot 0,2)\}^2 +$$

$$+ \{0 \cdot \sin \pi \cdot 0 + 1,057 / (\pi \cdot 1 \cdot 0,2) + \dots + 0,0152 \cdot \sin(\pi \cdot 49 \cdot 0,2)\}^2 \}^{1/2} = 4,738.$$

У цей спосіб можна обчислити амплітуди всіх інших значень частоти від  $\omega_0$  до  $\omega_{49}$ .

Амплітудний спектр, який обчислюється за формулою (3.12), зображений на рис. 3.4.

Спектр має період, який дорівнює частоті дискретизації  $\omega_a = 31,4 \text{ с}^{-1}$ .

З рис. 3.4 видно, що для заданої частоти дискретизації ( $f_a = 5 \text{ Гц}$ ,  $\omega_a = 31,4 \text{ с}^{-1}$ ) спектри перекриваються; причина – частота дискретизації прийнята малою. Якщо збільшити частоту дискретизації в 2 рази ( $f_a = 10 \text{ Гц}$ ;  $\omega_a = 62,8 \text{ с}^{-1}$ ;  $T_a = 0,1 \text{ с}$ ;  $N = 100$ ;  $NT_a = 10 \text{ с}$ ), то амплітудний спектр буде в два рази рідший, ніж у попередньому випадку, але на кожному відрізьку спектра буде по 100 відліків.

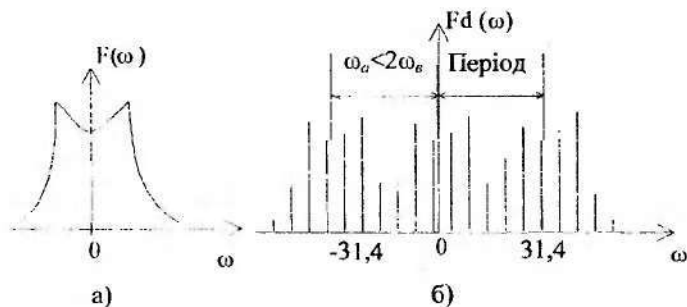


Рисунок 3.4 – Спектр безперервного сигналу і ДПФ: а) спектр безперервного сигналу; б) ДПФ

Цей спектр зображений на рис. 3.5. Бачимо, що частота дискретизації достатньо висока, тому перекриттів спектра немає.

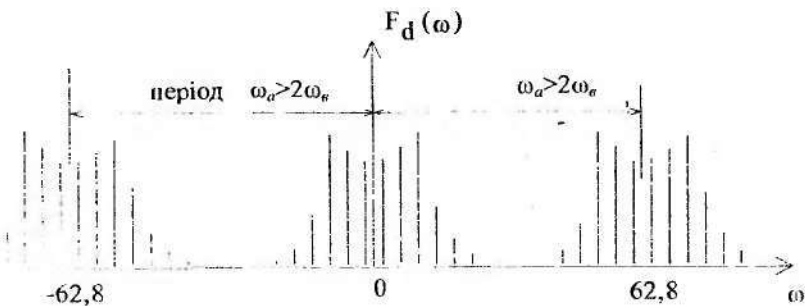


Рисунок 3.5 – ДПФ при збільшенні частоти дискретизації

### 3.3 ДПФ дискретизованого необмеженого в часі сигналу

Спектральний аналіз необмежених у часі сигналів створює за певних умов труднощі обчислювального характеру, оскільки інтеграл  $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$  не збігається. Цих труднощів намагаються уникнути розглядаючи сигнал через часове вікно. Аналітично це виражається в помноженні сигналу на функцію вікна. Сигнал існує в межах вікна і дорівнює нулю за його межами. Отже, необмежений у часі сигнал перетвориться в сигнал, обмежений у часі. Ця операція впливає і на спектр сигналу. Помноження в частотній області відповідає згортанню спектра сигналу зі спектром вікна. Це призводить до розширення або „вибігання” спектра.

#### 3.3.1 Постійний сигнал

Для розв'язання задачі визначимо спектр необмеженого в часі постійного сигналу. Для простоти залежна від часу функція дорівнює 1:  $f(t) = 1$ . На цей сигнал накладається часове вікно, ширина якого дорівнює часу спостереження, а функція  $f(t)$  помножується на функцію вікна  $W(t)$ . Вибірки сигналу беруться в дискретних точках  $nT$ , при цьому  $n$  „пробігає” значення в діапазоні  $-\frac{(N-1)}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{(N-1)}{2}$  (рис. 3.6). Збіжність інтеграла Фур'є досягається за допомогою часового вікна

$$W(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } -\frac{N-1}{2} \cdot T_a \leq nT_a \leq \frac{N-1}{2} \cdot T_a; \\ 0 & \text{за межами вказаного інтервалу.} \end{cases}$$

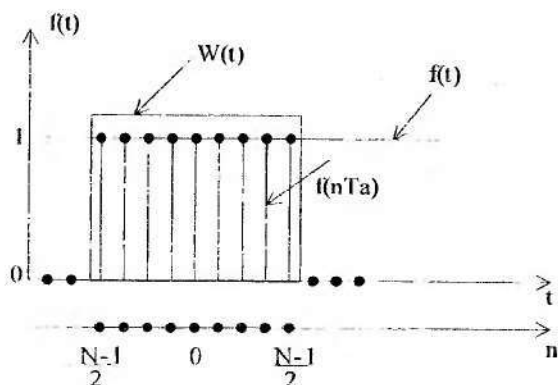


Рисунок 3.6 – Одиничний сигнал у межах вікна

Підставимо дискретну функцію часу з урахуванням вікна  $f(nT_a) \cdot W(nT_a) = 1$  в алгоритм обчислення ДПФ (3.4)

$$F_d(j\omega) = \sum_{-N-1/2}^{N-1/2} f(nT_a) \cdot W(nT_a) \cdot e^{-j\omega nT_a} = \sum_{-N-1/2}^{N-1/2} e^{-j\omega nT_a} \quad (3.14)$$

У правій частині виразу (3.14) маємо суму геометричного ряду з  $N$ -складовими, яку можна вивести у вигляді

$$F_d(j\omega) = \frac{\sin N \cdot \pi \cdot f \cdot T_a}{\sin \pi f T_a} \quad (3.15)$$

Отже, ДПФ одиночного імпульсу в межах вікна (час спостереження  $N \cdot T_a$ ) є функція  $\sin Nx / \sin x$ , де  $x = \omega T_a / 2$ .

Вираз (3.15) дає огинаючу для складових спектра на частотах  $\omega_k$ . Максимум функції (3.15) маємо при  $\omega = 0$ , тобто

$$F_d(\omega = 0) = \frac{\sin N \pi f T_a \approx N \pi f T_a}{\sin \pi f T_a \approx \pi f T_a} = N$$

Функція огинаючої  $F_d(j\omega) = \frac{\sin Nx}{\sin x}$  проходить через нуль, коли  $\sin N \pi f T_a = 0$ , а це можливо за умови

$$N \pi f T_a = \frac{N \omega T_a}{2} = \pm Z \cdot \pi$$

При  $z=1$  має місце перший нуль функції в точці частотної осі  $\omega_1 = \pm \frac{2\pi}{NT_a} \cdot 1$ ; при  $z=2$  функція  $F_d(j\omega)$  має другий нуль у точці  $\omega_2 = \frac{2\pi}{NT_a} \cdot 2 = \frac{4\pi}{NT_a}$ .

Отже, функція  $\frac{\sin Nx}{\sin x}$  є ДПФ, а тому періодична щодо  $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$

$$\sin \frac{N}{2} \cdot \omega \cdot T_a = \sin \frac{N}{2} (\omega T_a + 2\pi)$$

Функція  $\frac{\sin Nx}{\sin x}$  зображена на рис.3.7 і має максимум для кругової частоти  $\omega = 0$ . Цей максимум дорівнює кількості вибірок  $N$

У точках  $\omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{NT_a}$  можуть знаходитися спектральні амплітуди, а це значення частот, при яких функція  $F_d(j\omega)$  проходить через нуль, тобто можливі складові спектра на відстані  $\frac{2\pi}{NT_a}$  одна від одної заглушуються функцією вікна.

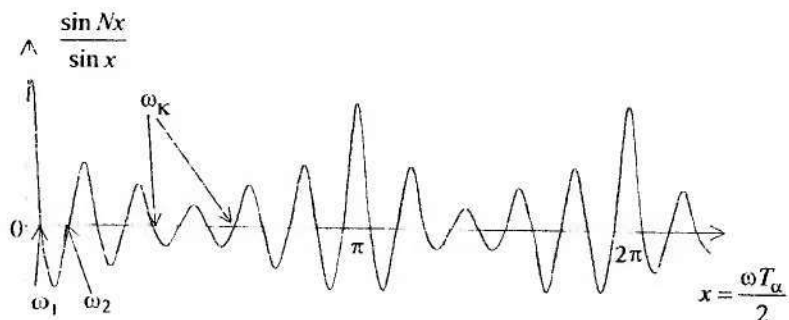


Рисунок 3.7 – Періодична функція  $\frac{\sin Nx}{\sin x}$

### 3.3.2 Періодичний сигнал

Як простий приклад, візьмемо періодичну функцію  $f(t)$  з круговою частотою  $\omega_0$ :  $f(t) = e^{j\omega_0 t}$ .

Ця функція знову помножується на функцію вікна  $W(t)$ . У межах вікна відлікові значення в дискретних точках часу мають величину  $f(nT_a) \cdot W(nT_a)$ .

Застосуємо прямокутне вікно  $W(nT_a) = 1$ . Тоді

$$F_d(j\omega) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} f(nT_a) \cdot W(nT_a) \cdot e^{-j\omega nT_a} = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{-j(\omega - \omega_0)nT_a}$$

або

$$F_d(j\omega) = \frac{\sin N \cdot \pi(f - f_0) \cdot T_a}{\sin \pi(f - f_0) \cdot T_a} \quad (3.16)$$

Це знову функція  $\frac{\sin Nx}{\sin x}$ , але максимум її знаходиться не в точці  $\omega = 0$ , а в точці  $\omega = \omega_0$ , і знову дорівнює  $N$ . Нулі ДПФ знаходяться в точках, де різниця

частот  $\omega - \omega_0$  кратна  $\frac{2\pi}{NT_a}$  і знаменник не дорівнює нулю

$$\omega - \omega_0 = \pm z \cdot \frac{2\pi}{N \cdot T_a}; \quad f - f_0 = \pm z \cdot \frac{1}{N \cdot T_a}. \quad (3.17)$$

Для визначення ДПФ синусоїду запишемо в такому вигляді:

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} \cdot e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} \cdot e^{-j\omega_0 t}. \quad (3.18)$$

ДПФ двох незалежних експоненціальних функцій визначається у вигляді тих самих функцій  $\frac{\sin Nx}{\sin x}$  і для (3.18) матиме вигляд

$$F_d(j\omega) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{\sin N \cdot (\omega - \omega_0) \cdot \frac{T_a}{2}}{\sin(\omega - \omega_0) \cdot \frac{T_a}{2}} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{\sin N \cdot (\omega + \omega_0) \cdot \frac{T_a}{2}}{\sin(\omega + \omega_0) \cdot \frac{T_a}{2}}. \quad (3.19)$$

Вираз (3.19) дає огинаючу спектра. Амплітуди спектральних складових знаходяться на відстані  $\frac{2\pi}{N \cdot T_a}$  одна від одної.

*Приклад 3.2.* Тривалість синусоїдального сигналу не дорівнює цілій кількості періодів.  $NT_a = 50$  мс;  $f_a = 500$  Гц – частота дискретизації;  $f_0 = 50$  Гц – частота сигналу (рис. 3.8).

ДПФ дає амплітуди спектральних складових, що знаходяться на частотах від  $f = 0$  через проміжок  $\frac{1}{NT_a} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-3}} = 20$  Гц.

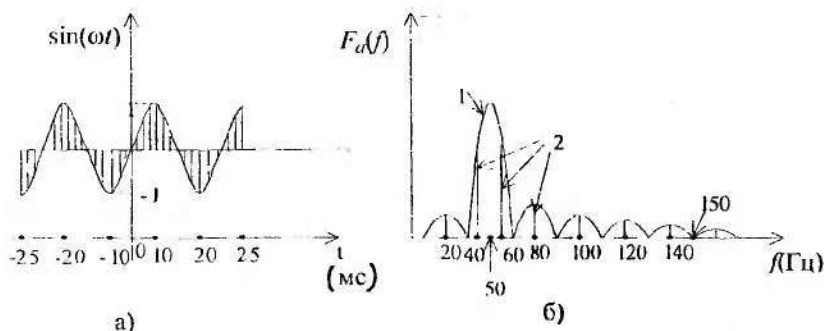
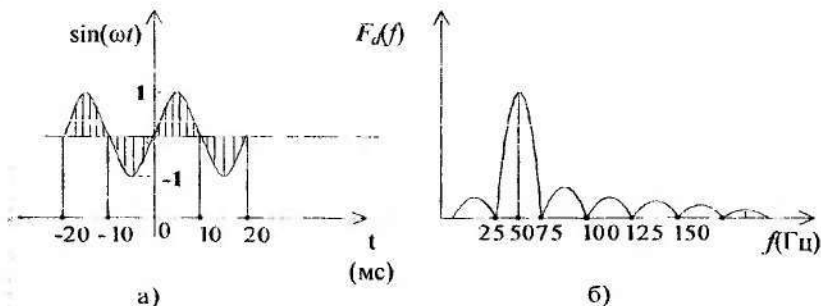


Рисунок 3.8 – Синусоїдальні коливання (а) і їхній спектр; (б) при нецілій кількості періодів.

Нулі огинаючої функції знаходяться на частотах  $50 \pm z \cdot 20$  Гц. З цієї причини має місце широкий спектр, з'являються так звані «фальшиві» складові, щоби не заглушуються функцією вікна.

*Приклад 3.3.* Тривалість сигналу дорівнює цілій кількості періодів (рис. 3.9).  
 $f_0 = 50$  Гц;  $T_a = 2$  мс;  $f_a = 500$  Гц;  $NT_a = 40$  мс.



**Рисунок 3.9** – Синусоїдальні коливання (а) і їхній спектр; (б) при цілій кількості періодів

Спектральні лінії знаходяться на відстані 25 Гц одна від одної

$$\frac{1}{NT_a} = \frac{1}{40 \cdot 10^{-3}} = 25 \text{ Гц.}$$

Нулі огинаючої знаходяться в точках  $50 \pm z \cdot 25$  і гасять усі спектральні лінії. Максимум має місце на частоті 50 Гц.

*Висновок.* Якщо тривалість вікна кратна періоду основного коливання, то «фальшиві» складові гасяться нулями огинаючої ДПФ; спектр має тільки одну лінію на основній частоті  $f_0 = 50$  Гц.

### 3.4 Функції вікон

#### 3.4.1 Особливості застосування вікон

Як було розглянуто, вибір кінцевого інтервалу тривалістю  $N \cdot T_a$  с для заданого сигналу визначає таку особливість спектрального розкладання: крім основних, з'являються «фальшиві» спектральні складові. Це явище називають «розмиванням» спектра. Причиною «розмивання» спектра є наявність розривів на межах інтервалу того сигналу, що спостерігається, і його періодичного продовження. Види розривів показані на рис. 3.10.

Вікна це вагові функції, що використовуються для зменшення «розмивання» спектральних компонентів, обумовлених кінцевістю інтервалу спостереження. Вплив вікна на масив даних як мультиплікативної вагової

функції полягає в зменшенні порядку розриву на межі періодичного продовження. Цього досягають, узгоджуючи на межі найбільш можливу кількість похідних зважених (або оброблених) вікном вхідних даних. Простіше всього забезпечити таке узгодження, зробивши ці похідні рівними або близькими нулю. Отже, поблизу меж інтервалу оброблені вікном дані повільно прямують до нуля так, що періодичне продовження сигналу опиняється безперервним аж до похідних вищих порядків.

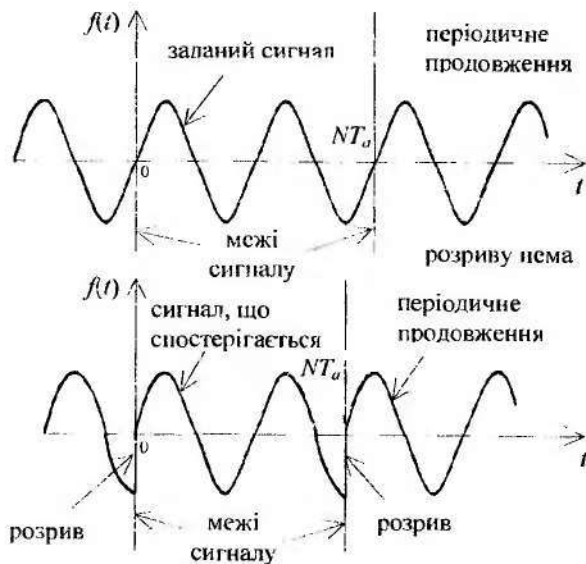


Рисунок 3.10 – Види розривів у сигналах

З цієї причини гострі краї прямокутного вікна для межових типів сигналів небажані. Застосовують інші типи вікон, що дають можливість уникати перепадів амплітуди на початку і в кінці вікна.

### 3.4.2 Вікна й їхні спектри

Розглянемо деякі вікна, що широко застосовуються, їхні дискретно-часові функції  $W(nT_a)$  і спектральні характеристики  $F_d(\omega)$ , отримані за допомогою обчислення модуля ДПФ кожного вікна.

1. Прямокутне вікно:  $W(nT_a) = 1$  для  $|nT_a| \leq \frac{NT_a}{2}$ . Прямокутне вікно на всьому інтервалі спостереження дорівнює одиниці. Таке вікно можна розглядати як виділяючу, або стробійовану послідовність, що впливає на вхідну послідовність для виділення в ній кінцевої частини.

Рівень бічних пелюсток спектральної функції приблизно на 13 дБ нижче піка головної пелюстки. Швидкість зменшення бічних пелюсток складає 6 дБ/октаву.

Прямокутне вікно рекомендується застосовувати для сигналів, що зменшуються у часі, наприклад до таких, як розглянуте раніше згасаюче коливання. Інші типи вікон призводять до деформації форми імпульсу і отже до викривлення його спектра (рис. 3.11).

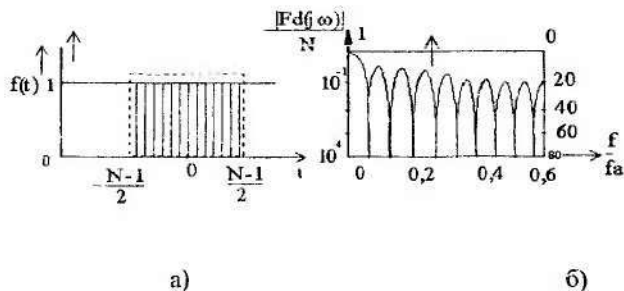


Рисунок 3.11 – Функції прямокутного вікна: а) часова; б) спектральна

2. Трикутне вікно, або вікно Бартлетта:  $W(nT_a) = 1 - 2 \frac{|nT_a|}{NT_a}$  для  $|nT_a| < \frac{NT_a}{2}$  (рис. 3.12).

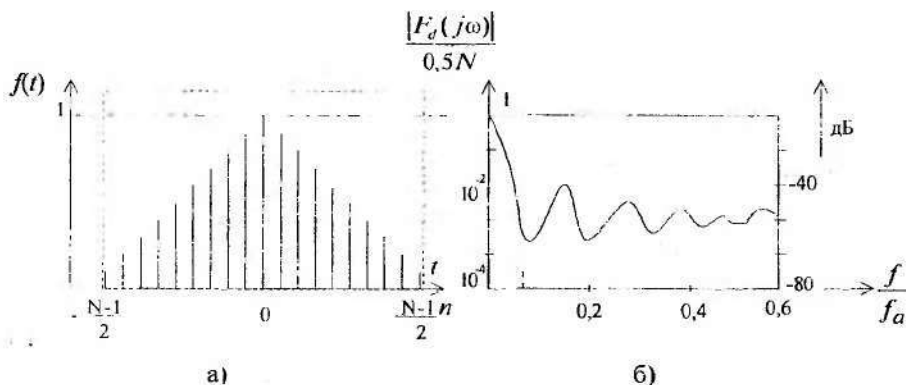


Рисунок 3.12 – Функції вікна Бартлетта: а) часова; б) спектральна

Ширина головної пелюстки (між перетинаннями нуля) цього вікна вдвічі більше, ніж у прямокутного вікна, а рівень перших двох пелюсток теж

приблизно в два рази нижче, ніж у прямокутного вікна. Рівень бічних пелюсток спадає зі швидкістю 12 дБ/октаву.

3. Вікно типу «косинус-квадрат», або вікно Ганна. Іноді це вікно називають вікном Хенінга (рис. 3.13)

$$W(nT_a) = \cos^2\left(\frac{\pi \cdot n \cdot T_a}{NT_a}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\frac{2\pi n T_a}{NT_a}\right) \text{ для } |nT_a| < \frac{NT_a}{2}.$$

Амплітуда ДПФ спадає як  $1/\omega^3$ , або зі швидкістю – 18 дБ/октаву.

ДПФ цього вікна становить суму трьох зсунутих одна відносно одної функцій  $\sin Nx/\sin x$ : одна – з центром на початку координат є перетворенням вікна з амплітудою, що дорівнює 0,5, а пара зсунутих функцій – перетворення відліків, що відповідають періоду косинуса.

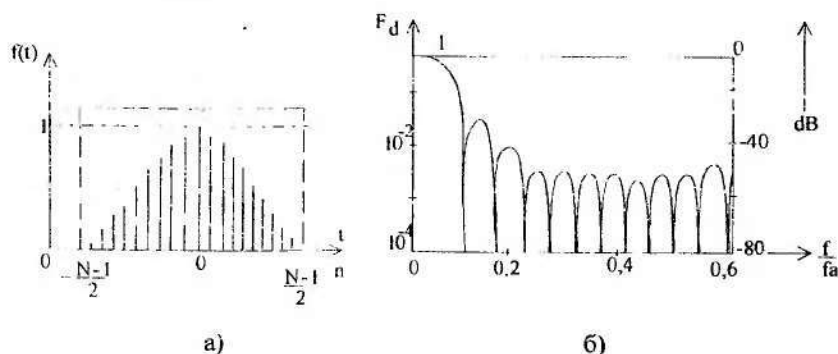


Рисунок 3.13 – Функції вікна Ганна: а) часова; б) спектральна

4. Вікно типу «піднятий косинус» або вікно Хемінга (рис. 3.14)

$$W(nT_a) = 0,54 + 0,46 \cos\frac{2\pi n T_a}{NT_a} \text{ для } |nT_a| < \frac{NT_a}{2}.$$

Коефіцієнти 0,54 і 0,46 були вибрані для того, щоб рівень бічних пелюсток зробити мінімальним. Завдяки сильному зміщенню бічних пелюсток їхній початковий рівень трохи нижче, ніж у раніше розглянутих вікон. Швидкість зменшення рівня бічних пелюсток незначна – 6 дБ/октаву.

Спектральна функція цього вікна, так само як і для вікна Ганна, є сумою трьох функцій  $\sin Nx/\sin x$ , але з іншими параметрами.

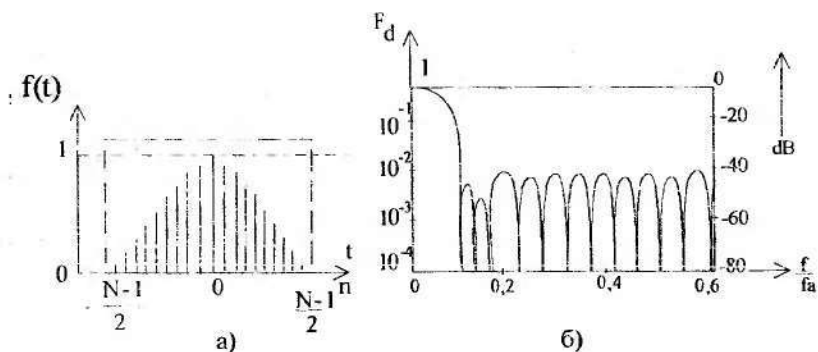


Рисунок 3.14 – Функції вікна Хемінга: а) часова; б) спектральна

5. Вікно Блекмана  $W(nT_a) = 0,42 + 0,5 \cos \frac{2\pi n T_a}{NT_a} + 0,08 \cos \frac{4\pi n \cdot T_a}{NT_a}$  для

$|nT_a| < \frac{NT_a}{2}$  (рис. 3.15).

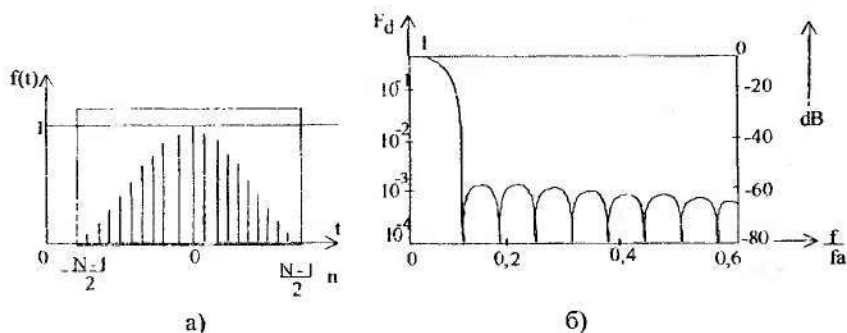


Рисунок 3.15 – Функції вікна Блекмана: а) часова; б) спектральна

Значення коефіцієнтів 0,42; 0,5; 0,08 вибрані такими для того, щоб нулі перетворення вікна потрапляли на частоти максимумів третього і четвертої пелюсток функції  $\sin Nx / \sin x$ .

Рівень бічних пелюсток складає 58 дБ, спадає зі швидкістю 18 дБ/октаву.

### 3.4.3 Критерії для оцінки вікна

ДПФ одиночного імпульсу в межах вікна, тобто з часом спостереження  $NT_a$ , є функція  $\frac{\sin Nx}{\sin x}$ , де  $x = \frac{\omega T_a}{2} = \pi \cdot f \cdot T_a$ . Ця функція має один основний і багато додаткових пелюсток і є огинаючою спектральних ліній. Спектр періодичний із частотою повторення, що дорівнює частоті дискретизації  $f_a = 1/T_a$ . Під час вибору вікна необхідно враховувати такі критерії, як ступінь заглушування «фальшивих» складових, похибка дискретизації і ширина основної пелюстки.

Під час вибору вікна необхідно врахувати точки на рис. 3.16.

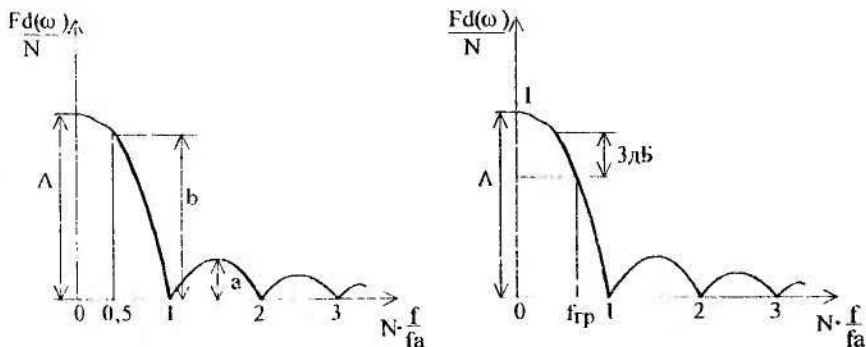


Рисунок 3.16 - До визначення параметрів вікон

Критерії для оцінки вікон визначаються такими параметрами:

1. Відношення амплітуди найбільшої з додаткових пелюсток до амплітуди основної пелюстки  $K_1 = \frac{a}{A}$ .

2. Максимальна похибка дискретизації. Спектральні лінії на даній вибірках функції не обов'язково збігаються з нулями ДПФ вікна. Спектральні лінії вікна знаходяться на відстані  $\Delta f$  одна від одної. Амплітуда основної пелюстки при  $f=0$  більше, ніж амплітуда при частоті  $f=1/2\Delta f = b$ . Відношення  $k_2 = b/A$  задає, наскільки максимально невірно може бути виміряна амплітуда і зветься похибкою (помилкою) дискретизації.

3. Ширина основної пелюстки. Функції вікон, у яких додаткові пелюстки є малими, мають особливо широку основну пелюстку. Це призводить до розсіювання спектральних ліній. Для характеристики основної пелюстки використовується межева частота, при якій амплітуда основної пелюстки, що зменшується на 3 дБ  $f_{гр}$ , є мірою ширини основної пелюстки.

У табл. 3.2 подані основні параметри для розглянутих раніше вікон, які найчастіше вживаються.

Таблиця 3.2 - Основні параметри вікон

Тип вікна	$k_1 = a/A$	$k_2 = b/A$	$f_{ap}$
Прямокутне	- 13дБ = 0,224	0,64	0,45 · Δf
Трикутне	- 27дБ = 0,45	0,81	0,64 · Δf
Косинус-квадрат	- 32дБ = 0,025	0,85	0,72 · Δf
Хемінга	- 43дБ = 0,007	0,82	0,65 · Δf
Блекмана	- 58дБ = 0,001	0,88	0,84 · Δf

### 3.5 Швидке перетворення Фур'є

Обчислення ДПФ безпосередньо за формулою (3.12) потребує великої кількості арифметичних операцій:  $(N-1)^2$  операцій множення й  $N(N-1)$  операцій додавання комплексних чисел. Це вимагає високої швидкодії обчислювальних пристроїв і значного часу опрацювання. З цих причин у окремих випадках стає неможливим опрацювання сигналу в реальному масштабі часу. Наприклад, для визначення ДПФ за формулою

$$|F_d(j\omega_k)| = \sqrt{\left[ \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot \cos \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k \right]^2 + \left[ \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_a) \cdot \sin \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k \right]^2}$$

під час аналізу спектроенцефалограми тривалістю 40с, частотою дискретизації 250 відліків у секунду і шести відведеннях потрібно  $36 \cdot 10^8$  операцій комплексного множення і стільки ж операцій комплексного додавання. Швидке перетворення Фур'є (ШПФ) дозволяє скоротити кількість арифметичних операцій на декілька порядків.

Швидким перетворенням Фур'є (ШПФ) називається набір алгоритмів, які дозволяють різко зменшити кількість операцій, необхідних для обчислення ДПФ.

Алгоритми з основою 2 використовуються при  $N = 2^v$ , де  $v$  – ціле число.

Основна ідея БПФ полягає в перетворенні обчислення вихідного  $N$  – точкового ДПФ в обчисленні декількох  $N_1$  – точкових ДПФ, причому  $N = 2^v$ ,  $N_1 = 2^{v_1}$ ,  $N_1 \ll N$ ,  $v$  – ціле число.

Алгоритми, під час реалізації яких потрібна перестановка відліків вхідної послідовності  $f(nT)$ , мають назву алгоритмів з проріджуванням за часом. Алгоритми, під час реалізації яких потрібна перестановка відліків вихідної послідовності  $F_d(\omega_k)$ , називаються алгоритмами з проріджуванням за

частотою. За ефективністю ці два різновиди алгоритмів еквівалентні та дозволяють зменшити кількість необхідних арифметичних операцій приблизно в  $N/v$  разів у порівнянні з прямим методом обчислення ДПФ. Для заданого сигналу ЕЕГ  $N = 2^{16} = 2^v = 65576$  відліків,  $N/v = 65576/16 = 4100$  разів.

Розглянемо алгоритм із проріджуванням за часом. Введемо позначення:

вхідна послідовність –  $f(nT_a) = x(n)$ ; вихідна послідовність ДПФ –  $F_d(\omega_k) = C(k)$ .

Отже,  $x(n)$  – вхідна послідовність відліків,  $C(k)$  – вихідна послідовність коефіцієнтів ДПФ. Визначимо ДПФ для  $N$ -точкової послідовності відліків  $X(n)$ . Вважасмо, що кількість відліків  $N$  дорівнює цілому степеню числа 2.

Розіб'ємо  $N$ -точкову послідовність  $X(n)$  на дві  $\frac{N}{2}$ -точкові послідовності  $x_1(n)$  і  $x_2(n)$  з парних і непарних членів вихідної послідовності  $X(n)$ .

$N$ -точкові ДПФ послідовності  $X(n)$  запишемо у вигляді

$$C(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (3.20)$$

Для подальших перетворень враховуємо, що перший доданок відповідає парним членам вихідної послідовності, а другий – непарним. Тому вираз (3.20) можна записати у вигляді

$$C(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(2n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=0}^{N-1} x(2n+1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(2n+1)k}. \quad (3.21)$$

Введемо позначення  $e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = W_N$ . Тоді (3.21) запишемо так:

$$C(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n) \cdot W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x(2n+1) \cdot W_N^{(2n+1)k}. \quad (3.22)$$

Перетворимо значення експоненціальних множників у такий спосіб:

$$W_N^2 = \left( e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right)^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}2k} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}k} = W_{N/2}; \quad (3.23)$$

$$W_N^{(2n+1)k} = W_N^k \cdot W_N^{2nk} = W_N^k \cdot W_{N/2}^{nk}. \quad (3.24)$$

Перепишемо вираз (3.22) з урахуванням співвідношень (3.23) і (3.24) у вигляді

$$C(k) = \sum_{n=0}^{N/2} x_1(n) \cdot W_{N/2}^{nk} + W_N^k \cdot \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x_2(n) \cdot W_{N/2}^{nk}, \quad (3.25)$$

або

$$C(k) = C_1(k) + W_N^k \cdot C_2(k), \quad (3.26)$$

де  $C_1(k)$  і  $C_2(k)$  дорівнюють  $\frac{N}{2}$ -точковим ДПФ послідовностей  $x_1(n)$  і  $x_2(n)$ .

Формула (3.26) показує, що  $N$ -точкове ДПФ  $C(k)$  може бути отримано додаванням двох  $\frac{N}{2}$ -точкових ДПФ  $C_1(k)$  і  $C_2(k)$ . Запишемо формулу (3.26) для  $k \geq \frac{N}{2}$

$$C(k) = C_1(k - (N/2)) + W_N^{k-(N/2)} \cdot C_2(k - (N/2)), \quad N/2 \leq k \leq N-1. \quad (3.27)$$

В отриманому виразі перетворимо співмножник

$$W_N^{k-(N/2)} = e^{-j(2\pi/N)k} \cdot e^{-j(2\pi/2)(-N/2)} = W_N^k \cdot e^{j\pi},$$

де  $e^{j\pi} = \cos \pi + j \sin \pi = -1$ ,

тобто

$$W_N^{k-(N/2)} = -W_N^k. \quad (3.28)$$

Отже, вираз (3.27) приймає такий вигляд:

$$C(k) = C_1\left(k - \frac{N}{2}\right) - W_N^k \cdot C_2\left(k - \frac{N}{2}\right). \quad (3.29)$$

Послідовність операції під час виконання восьмиточкового ДПФ із використанням двох чотириточкових перетворень можна відобразити за допомогою спрямованого графа.

При цьому вхідну послідовність  $x(n)$  спочатку розбивають на дві послідовності  $x_1(n)$  і  $x_2(n)$  з парних і непарних членів вихідної послідовності  $x_n$ , для яких розраховують перетворення  $C_1(k)$  і  $C_2(k)$ . Потім відповідно до (3.26) і (3.29) одержують  $C(k)$ .

Спрямований граф схеми обчислень восьмиточкового ДПФ із використанням двох чотириточкових перетворень зображений на рис. 3.17.

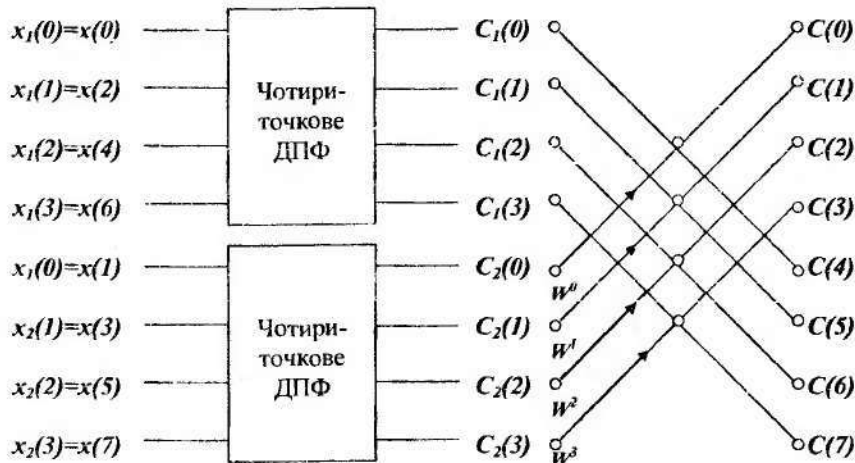


Рисунок 3.17 – Схема обчислень 8-точкового ДПФ із використанням двох 4-точкових ДПФ

Незарисовані кружки в правій частині рисунка позначають операцію додавання-віднімання, причому верхній вихід відповідає сумі, а нижній – різниці. Стрілка  $\xrightarrow{W}$  позначає операцію множення на  $W$ . Вузли (•) позначають регістри, що містять вхідні масиви окремих ДПФ. Правила виконання операцій під час обчислення ДПФ подані на рис. 3.18.

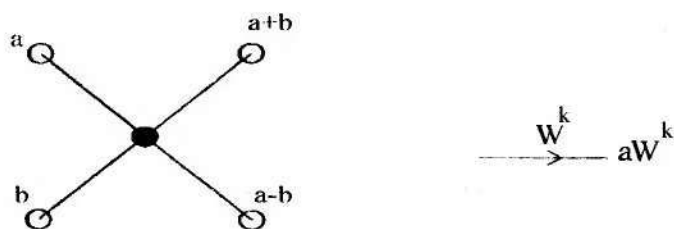


Рисунок 3.18 – Правила виконання операцій

Кожна з послідовностей  $x_1(n)$  і  $x_2(n)$  також може бути розділена навпіл. При цьому  $N$ -точкове ДПФ буде зведено до чотирьох  $\frac{N}{4}$ -точкових ДПФ. З

урахуванням (3.26) і (3.29)  $\frac{N}{2}$ -точкові ДПФ можуть бути записані як комбінації

$\frac{N}{4}$ -точкових ДПФ. Це означає, що вхідна послідовність із 8 елементів  $x(0); x(1); x(2); x(3); x(4); x(5); x(6); x(7)$ , спочатку розділяється на дві послідовності: перша –  $x(0); x(2); x(4); x(6)$ , і друга –  $x(1); x(3); x(5); x(7)$ . Потім кожна з цих послідовностей також розділяється на дві. Одержуємо чотири підмножини: 1-а –  $x(0); x(4)$ ; 2-а –  $x(2); x(6)$ ; 3-я –  $x(1); x(5)$ ; 4-а –  $x(3); x(7)$ .

Відносно кожної підмножини, що складається з двох елементів, застосовується двоточкове ДПФ.

Загальне перетворення, зроблене з чотирма підмножинами, дає таке значення спектральної щільності (ДПФ):

$$F_d(k) = \sum_{n=0}^1 x(4n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}(4n)k} + \sum_{n=0}^1 x(2n+2) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}(4n+2)k} + \\ + \sum_{n=0}^1 x(4n+1) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}(4n+1)k} + \sum_{n=0}^1 x(4n+3) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}(4n+3)k}$$

З урахуванням (3.26) і (3.29)  $\frac{N}{2}$ -точкові ДПФ можуть бути записані як комбінації  $\frac{N}{4}$ -точкових ДПФ

$$C_1(k) = A(k) + W_{N/2}^k \cdot B(k), \text{ або } C_1(k) = A(k) + W_N^{2k} \cdot B(k); \quad (3.30)$$

$$C_2(k) = G(k) + W_N^{2k} \cdot D(k), \text{ або } C_2(k) = G(k) + W_N^{2k} \cdot D(k), \quad (3.31)$$

де  $0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$ ,  $A(k)$  і  $B(k)$  –  $N/4$ -точкові ДПФ відповідно парних і непарних членів  $x_1(n)$ .

На рис. 3.19 наведений приклад обчислення восьмиточкового ДПФ через два чотириточкових ДПФ, що, в свою чергу, обчислюються через чотири двоточкових ДПФ.

На кожному етапі вхідна часова послідовність розділяється на дві оброблювані послідовності меншої довжини доти, доки не залишаться тільки двоточкові послідовності. Кількість подібних етапів перетворення  $v = \log_2 N$ . Для запропонованої раніше електроенцефалограми кількість етапів  $v = 16$ .

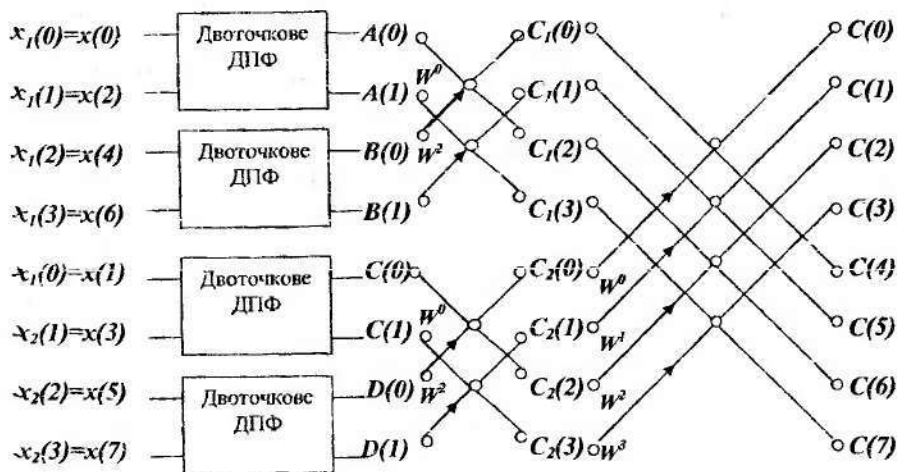


Рисунок 3.19 – Схема обчислення восьмиточкового ДПФ через два чотириточкових і чотири двоточкових

## 4.1 Загальна характеристика

Перед тим, як виконати аналіз медико-біологічних сигналів із метою одержання діагностичної інформації, їх необхідно очистити від перешкод як фізичного, так і фізіологічного походження. Як перешкоди виступають: наведення від мережі живлення, напрута поляризації електродів, сторонні фізіологічні сигнали, внутрішні шуми підсилювачів, електромагнітні поля природного походження. На рис. 4.1 наведені електрокардіосигнали під час дії високочастотних (а) і низькочастотних (б) перешкод.

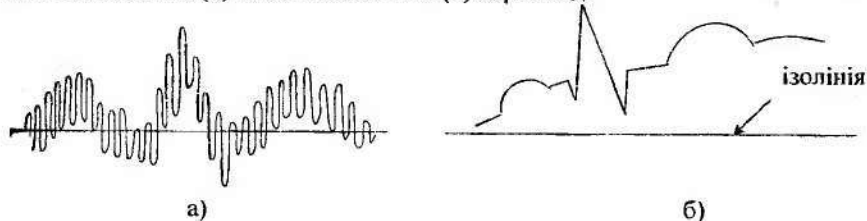


Рисунок 4.1 – Зміни ЕКС за наявності перешкод

Очевидно, що аналізувати такі сигнали без попередньої фільтрації не має сенсу.

Пристроями, які виконують функції усунення небажаних сигналів, є фільтри. Аналогові фільтри опрацьовують сигнали  $x(t)$ , що являють собою безперервну величину. Цифрові фільтри перетворюють відлікові значення сигналу  $x(nT)$  в дискретні моменти часу  $nT$ , де  $T$  – інтервал дискретизації.

Цифрові фільтри (ЦФ) можуть бути виконані або у вигляді цифрової електронної схеми, або у вигляді програми для ЕОМ, яка опрацьовує дискретні вибірки сигналу, виконує над ними математичні дії за визначеним алгоритмом.

У порівнянні з аналоговими фільтрами ЦФ мають декілька переваг:

1. ЦФ можна реалізувати в мікроелектронному виконанні; з появою великих інтегральних схем (ВІС) стало можливим виконати ЦФ у вигляді однієї інтегральної схеми.

2. Якщо для опрацювання сигналів у реальному масштабі часу використовується цифрова ЕОМ, то ЦФ може бути запрограмований на цій машині.

3. ЦФ мають високу завадостійкість, пов'язану з застосуванням цифрових схем.

4. Висока точність ЦФ визначається похибкою заокруглення під час арифметичних операцій в ЕОМ, тоді як точність в аналогових схемах залежить від допусків елементів схеми і перешкод.

5. Зміну характеристик ЦФ можна здійснити шляхом зміни програми або частини її; параметри ЦФ можна змінювати шляхом зміни коефіцієнтів різницевого рівняння.

6. Напряга живлення, коливання температури, застарівання елементів змінюють характеристики аналогових фільтрів, але не впливають на програми, що утримуються в ЕОМ, таким чином характеристики ЦФ залишаються постійними.

Переваги ЦФ особливо помітні в діапазоні низьких та інфранизьких частот, що важливо під час медичних досліджень.

У ЦФ зв'язок між вхідними і вихідними величинами встановлюється за допомогою різницевого рівнянь. Насамперед зазначимо, що розглядатимемо лінійні інваріантні в часі ЦФ. Властивість лінійності означає, якщо послідовності  $x_1(nT)$  і  $x_2(nT)$  перетворюються цифровим фільтром, відповідно, в  $y_1(nT) = \Phi[x_1(nT)]$  і  $y_2(nT) = \Phi[x_2(nT)]$ , а  $C_1$  і  $C_2$  – постійні величини, то діє принцип суперпозиції

$$y(nT) = \Phi[C_1 x_1(nT) + C_2 x_2(nT)] = C_1 \cdot y_1(nT) + C_2 \cdot y_2(nT).$$

Властивість інваріантності, або незмінності в часі означає, якщо  $y(nT) = \Phi[x(nT)]$ , то  $\Phi[x(nT - mT)] = y(nT - mT)$ , тобто під час зсуву вхідної послідовності  $x(nT)$  на  $mT$  інтервалів за часом, вихідна послідовність  $y(nT)$  також зміщується в часі на  $mT$  інтервалів.

Перетворення сигналів у подібних ЦФ математично можна описати за допомогою різницевого рівняння з постійними коефіцієнтами

$$\sum_{m=0}^M b_m \cdot y(nT - mT) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot x(nT - kT). \quad (4.1)$$

З цього рівняння одержуємо алгоритм визначення вихідного сигналу (вважаємо, що  $b_0 = 1$ )

$$y(nT) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot x(nT - kT) - \sum_{m=1}^M b_m \cdot y(nT - mT). \quad (4.2)$$

В окремому випадку

$$y(nT) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot x(nT - kT). \quad (4.3)$$

У рівняннях (4.1) – (4.3)  $a_k$  і  $b_m$  – дійсні, так звані „вагові” коефіцієнти,  $M$  і  $N$  – цілі числа. ЦФ, що реалізують алгоритм (4.2), називаються

рекурсивними. Вихідна змінна  $y(nT)$  в цих фільтрах у даний момент часу залежить не тільки від значень вхідної змінної  $x(nT)$ , але і від значень вихідної змінної  $y(nT - mT)$  в попередні моменти часу.

ЦФ, побудовані відповідно до рівняння (4.3), називаються **нерекурсивними**. Вихідний сигнал у таких фільтрах залежить тільки від значень вхідного сигналу.

*Приклад 4.1.* ЦФ описується різницеvim рівнянням

$$y(nT) = x(nT) + 0,8y[(n-1)T].$$

*Розв'язання.* При відомому вхідному сигналі  $x(nT)$  визначити вихідний сигнал  $y(nT)$ .

Нехай  $x(nT) = 1$  при  $n = 0$  і  $x(nT) = 0$  при  $n \neq 0$ . Тоді при

$$n = 0: y(0) = x(0) + 0,8y(0 - T) = x(0) = 1;$$

$$n = 1: y(1T) = x(1T) + 0,8y(0) = 0 + 0,8 \cdot 1 = 0,8;$$

$$n = 2: y(2T) = x(2T) + 0,8y(1T) = 0 + 0,8 \cdot 0,8 = 0,64;$$

$$n = 3: y(3T) = x(3T) + 0,8y(2T) = 0 + 0,8 \cdot 0,64 = 0,512;$$

.....

$$n = k: y(kT) = x(kT) + 0,8y((k-1)T) = 0,8^k.$$

$$y(nT) = \{1; 0,8; 0,64; 0,512; \dots; 0,8^k; \dots\}.$$

Результати розрахунків наведені на рис. 4.2.

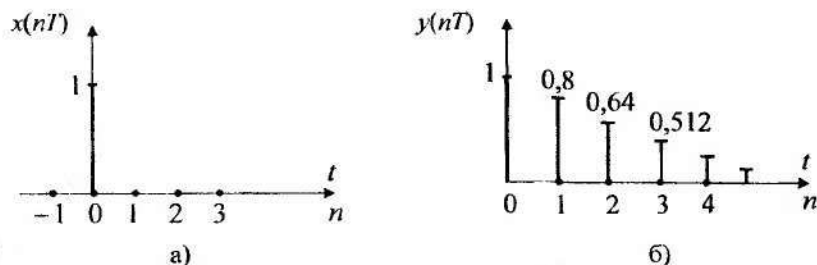


Рисунок 4.2 - Сигнали фільтра: а) вхідний; б) вихідний

З виразів (4.2) і (4.3) випливає, що для побудови фільтрів необхідні функціональні вузли, що виконують три операції: затримку відліків сигналів,

додавання і множення. На рис. 4.3 наведені умовні позначення окремих функціональних вузлів.

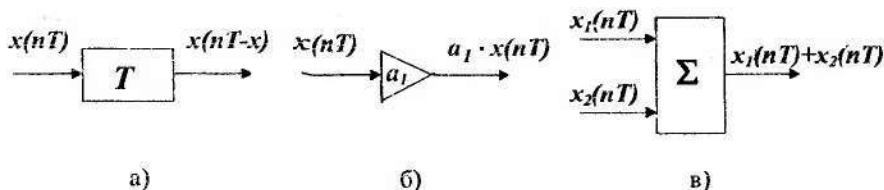


Рисунок 4.3 – Вузли цифрових фільтрів: а) затримка; б) множення; в) підсумовування

Дотримуючись алгоритму (4.2) з урахуванням введених позначень, зобразимо структурну схему рекурсивного ЦФ у вигляді, наведеному на рис. 4.4. Схема нерекурсивного ЦФ побудована відповідно до алгоритму (4.3) і наведена на рис. 4.5.

ЦФ є цифровими пристроями, в яких циркулюють тільки двійкові коди. Під час виконання операції множення цифрового сигналу на число виникає похибка за рахунок заокруглень і зрізання добутоків, і вихідний сигнал відрізняється від точного розв'язку за формулою (4.2). Проте ця похибка контрольована – її можна зменшити шляхом збільшення розрядів для уявлення відліків цифрових сигналів.

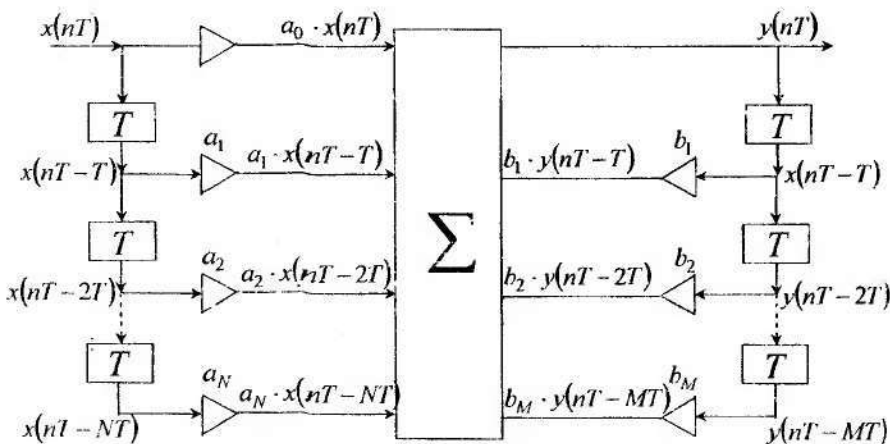


Рисунок 4.4 – Схема рекурсивного фільтра

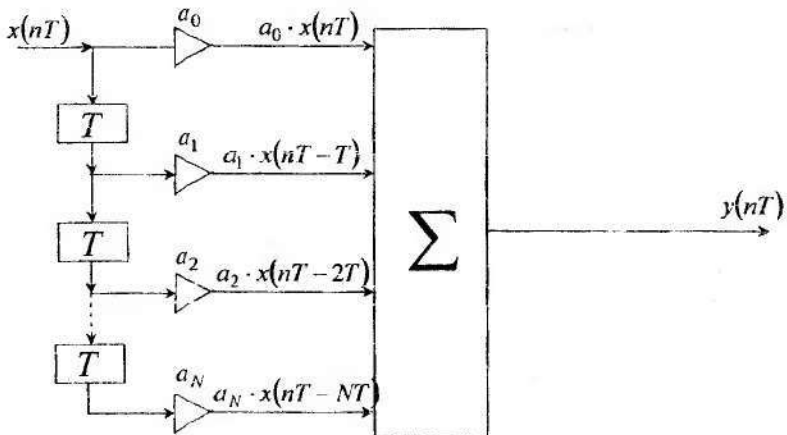


Рисунок 4.5 – Схема нерекурсивного фільтра

## 4.2 Нерекурсивні фільтри

### 4.2.1 Алгоритм

Нерекурсивний цифровий фільтр видає вихідний сигнал  $y(nT)$  відповідно до розглянутого раніше алгоритму цифрового опрацювання (4.3)

$$y(nT) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot x(nT - kT).$$

Надалі вагові коефіцієнти  $a_k$  індексуватимемо симетрично так, щоб сума в (4.3) змінювалася від  $k = -N$  до  $k = N$ . Це дає можливість швидше одержати деякі результати. Отже, алгоритм нерекурсивного ЦФ розглядатимемо у вигляді

$$y(nT) = \sum_{k=-N}^N a_k \cdot x(nT - kT). \quad (4.4)$$

Кількість зсунутих у часі вхідних сигналів  $N$  характеризує степінь або порядок фільтра. При  $N = 3$  відповідно до рівняння (4.4) маємо фільтр третього порядку

$$y(nT) = a_{-3} \cdot x(nT + 3T) + a_{-2} \cdot x(nT + 2T) + a_{-1} \cdot x(nT + T) + a_0 \cdot x(nT) + a_1 \cdot x(nT - T) + a_2 \cdot x(nT - 2T) + a_3 \cdot x(nT - 3T). \quad (4.5)$$

З цього рівняння випливає, що вихідний сигнал можна обчислити, якщо відомі не тільки попередні значення вхідної величини  $x(nT - kT)$ , але і подальші значення  $x(nT + kT)$ , які накопичуються протягом  $N$  інтервалів. Тому обчислення  $y(nT)$  можливо через  $N$  інтервалів після визначення  $n$ -го значення вхідного сигналу. Для цифрової системи це обмеження малозначуще.

Назва „нерекурсивний фільтр” означає, що вихідний сигнал  $y(nT)$  залежить тільки від значень вхідного сигналу  $x(nT)$  на відміну від рекурсивного, в якому вихідний сигнал залежить також від попередніх значень вхідного сигналу. Нерекурсивний фільтр за відсутності зворотного зв'язку не збуджується. Він завжди стабільний.

#### 4.2.2 Передатна функція

В аналогових фільтрах передатна функція визначається як відношення періодичних вихідного і вхідного сигналів. Це має місце й у цифрових системах. Передатну функцію ЦФ можна одержати, якщо подати на його вхід дискретний періодичний сигнал

$$x(nT) = e^{j\omega nT}.$$

З огляду на (4.4), одержимо вихідний сигнал

$$y(nT) = \sum_{k=-N}^N a_k \cdot e^{j\omega(n-k)T}. \quad (4.6)$$

Передатна функція визначається як відношення вихідного сигналу  $y(nT)$  до вхідного  $x(nT)$

$$G_d(j\omega) = \frac{\sum_{k=-N}^N a_k \cdot e^{j\omega(n-k)T}}{e^{j\omega nT}} = \sum_{k=-N}^N a_k \cdot e^{-j\omega kT}. \quad (4.7)$$

З цього виразу очевидно, що передатна функція фільтра являє собою ДПФ вагових коефіцієнтів  $a_k$ . Тому передатна функція, як будь-яке ДПФ, є періодичною функцією з періодом, який дорівнює частоті дискретизації  $\omega_\alpha = 2\pi/T$ .

Зобразимо вираз (4.7) через гармонійні функції при  $N = 2$

$$G_d(j\omega) = a_{-2} \cdot e^{j\omega 2T} + a_{-1} \cdot e^{j\omega 1T} + a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot e^{-j\omega 1T} + a_2 \cdot e^{-j\omega 2T}.$$

Для парної функції  $G(j\omega) = G(-j\omega)$ ,  $a_k = a_{-k}$  і передатна функція буде дійсною

$$\begin{aligned} G_d(j\omega) &= a_0 + a_1(e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}) + a_2(e^{-j\omega 2T} + e^{j\omega 2T}) = \\ &= a_0 + a_1 \cdot 2 \cos \omega T + a_2 \cdot 2 \cos 2\omega T = a_0 + 2 \sum_{k=1}^N a_k \cdot \cos k\omega T. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для непарної функції  $G_d(j\omega) = -G_d(j\omega)$ ,  $a_k = -a_{-k}$  і передатна функція буде уявною

$$G_d(j\omega) = -2j \sum_{k=1}^N a_k \cdot \sin k\omega T. \quad (4.9)$$

Графік абсолютної величини передатної функції для фільтра другого порядку в логарифмічному масштабі зображення наведений на рис. 4.6.

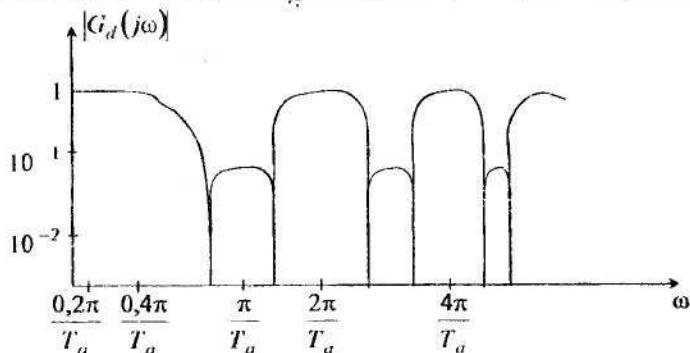


Рисунок 4.6 – Передатна функція

### 4.2.3 Синтез нерекурсивних фільтрів нижніх частот

Під час синтезу цифрового нерекурсивного фільтра основною є задача визначення вагових коефіцієнтів  $a_k$ . Ці коефіцієнти повинні мати такі значення, щоб передатна функція розрахованого фільтра в максимальному ступені збігалася з необхідною і відповідала поставленим умовам проектування. Реальна передатна функція апроксимує бажану функцію з визначеною точністю. Для оцінки точності апроксимації застосовуються різноманітні критерії. В даному випадку скористаємося методом найменших квадратів. Суть цього методу полягає в досягненні мінімуму квадрата різниці між реальним і бажаним результатом. Аналітично це можна визначити співвідношенням

$$\frac{T_d}{2\pi} \int_{-\pi/T_d}^{\pi/T_d} [G_d(j\omega) - G_w(j\omega)]^2 d\omega = MIN,$$

де  $G_d(j\omega)$  – передатна функція розрахованого фільтра;

$G_w(j\omega)$  – бажана передатна функція (для ідеального фільтра).

Покажемо, як можна визначити коефіцієнти фільтра, використовуючи метод найменших квадратів.

Похибка апроксимації має найменше значення, якщо вагові коефіцієнти фільтра, що обчислюється, є коефіцієнтами розкладання в ряд Фур'є передатної функції  $G_d(j\omega)$

$$G_d(j\omega) = \sum_{k=-N}^N a_k \cdot e^{-j\omega kT}.$$

Коефіцієнти  $a_k$  цього ряду розраховуються за формулою

$$a_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} G_d(j\omega) \cdot e^{j\omega kT} d\omega. \quad (4.10)$$

При цьому для ФНЧ інтегрування виконується за першим періодом ДПФ функції  $G_d(j\omega)$  в межах від  $-\pi/T$  до  $\pi/T$  (рис.4.7).

$G_d(j\omega)$

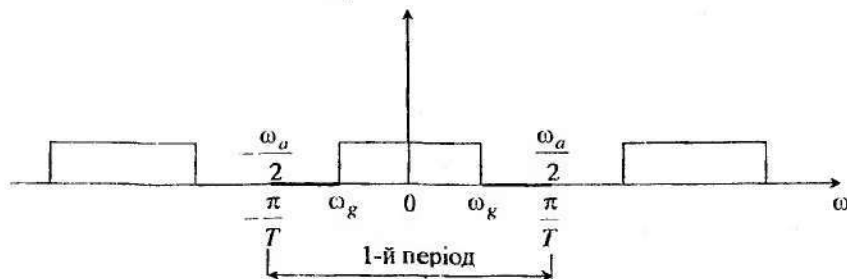


Рисунок 4.7 – Межі інтегрування передатної функції ФНЧ

Занишемо (4.10) як суму двох інтегралів. З огляду на те, що передатна функція  $G_d(j\omega)$  дорівнює нулю при  $|\omega| > \omega_g$ , інтегрування виконуватимемо в межах від 0 до  $\omega_g$ , де  $\omega_g$  – межева частота.

$$a_k = \frac{Ta}{2\pi} \int_0^{\pi/Ta} G_d(j\omega) \cdot e^{j\omega kT} d\omega + \frac{Ta}{2\pi} \int_0^{-\pi/Ta} G_d(-j\omega) \cdot e^{-j\omega kT} d\omega.$$

Якщо передатна функція  $G_d(j\omega)$  є парною функцією, тобто  $G_d(j\omega) = G_d(-j\omega)$ , то з останнього співвідношення отримуємо

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{Ta}{2\pi} \int_0^{\pi/Ta} G_d(j\omega) \cdot (e^{j\omega kT} + e^{-j\omega kT}) d\omega = \\ &= \frac{Ta}{2\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi/Ta} G_d(j\omega) \cdot \cos k\omega T d\omega = a_{-k}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Для непарної передатної функції  $G_d(j\omega) = -G_d(-j\omega)$  значення коефіцієнтів визначаються зі співвідношення

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{Ta}{2} \int_0^{\pi/Ta} G_d(j\omega) \cdot (e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT}) d\omega = \\ &= \frac{Ta}{2} \cdot 2j \cdot \int_0^{\pi/Ta} G_d(j\omega) \cdot \sin k\omega T d\omega = -a_{-k}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Якщо тепер у вирази (4.10) – (4.12) замість  $G_d(j\omega)$  підставити бажану передатну функцію  $G_w(j\omega)$ , то обчислені коефіцієнти  $a_k$  визначають передатну функцію  $G_a(j\omega)$ , яка апроксимує  $G_w(j\omega)$  в середньому квадратичному.

Обчислимо коефіцієнти цифрового фільтра нижніх частот. Бажаним є ідеальний ФНЧ із передатною функцією  $G_w(j\omega) = 1$  при  $|\omega| \leq \omega_g$ .

$G_w(j\omega)$  є парною функцією, тому для визначення коефіцієнтів використовуємо вираз (4.11). Як верхню межу інтегрування достатньо взяти частоту  $\omega_g$  (рис.4.6). Тоді значення коефіцієнтів  $a_k$  нерекурсивного фільтра визначаються так:

$$a_k = a_{-k} = \frac{Ta}{\pi} \int_0^{\omega_g} 1 \cdot \cos k\omega T d\omega = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{\sin k\omega_g T}{kT}. \quad (4.13)$$

Вираз (4.13) помножимо і розділимо на  $\omega_g$ . Одержимо

$$a_k = \frac{\omega_g \cdot T}{\pi} \cdot \frac{\sin k\omega_g T}{k\omega_g T} = \frac{\Omega_g}{\pi} \cdot \frac{\sin k\Omega_g}{k\Omega_g}. \quad (4.14)$$

Тут величина  $\Omega_g = \omega_g \cdot T = 2\pi \cdot \frac{f_g}{f_a}$  є нормованою межевою частотою.

З урахуванням цього рівняння для коефіцієнтів ФНЧ матиме такий вигляд:

$$a_k = a_{-k} = \frac{\Omega_g}{\pi} \cdot \frac{\sin k\Omega_g}{k\Omega_g} \quad (4.15)$$

*Приклад 4.2.* Розрахувати ФНЧ третього порядку з межевою частотою  $f_g = 25 \text{ Гц}$  при частоті дискретизації  $f_a = 100 \text{ Гц}$ .

*Розв'язання.* Нормована межева частота  $\Omega_g = 2\pi \cdot \frac{f_g}{f_a} = \frac{\pi}{2}$ . Обчислимо значення вагових коефіцієнтів

$$k = 0: \quad a_0 = 0,5 \cdot \sin(0) = 0,5;$$

$$k = 1: \quad a_1 = a_{-1} = 0,5 \cdot \frac{\sin 1 \cdot 0,5 \cdot \pi}{1 \cdot 0,5 \cdot \pi} = \frac{1}{\pi};$$

$$k = 2: \quad a_2 = a_{-2} = 0,5 \cdot \frac{\sin 2 \cdot 0,5 \cdot \pi}{2 \cdot 0,5 \cdot \pi} = 0;$$

$$k = 3: \quad a_3 = a_{-3} = 0,5 \cdot \frac{\sin 3 \cdot 0,5 \cdot \pi}{3 \cdot 0,5 \cdot \pi} = -\frac{1}{3\pi}.$$

З урахуванням отриманих коефіцієнтів значення вихідного сигналу визначаються відповідно до рівняння

$$\begin{aligned} y(nT) = & -\frac{1}{3\pi} \cdot x(nT + 3T) + \frac{1}{\pi} \cdot x(nT + T) + 0,5 \cdot x(nT) + \\ & + \frac{1}{\pi} \cdot x(nT - T) - \frac{1}{3\pi} \cdot x(nT - 3T). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Відповідно до виразу (4.8) передатна функція матиме вигляд

$$G_d(j\omega) = 0,5 + \frac{2}{\pi} \cdot \cos \omega T - \frac{2}{3\pi} \cdot \cos 3\omega T. \quad (4.17)$$

На рис. 4.8 наведена передатна функція розрахованого ФНЧ при  $N = 3$ ,  $f_a = 4f_g$ .

З рис. 4.8 очевидно, що в передатній функції є постійні відхилення, які складають приблизно 10% від значення передатної функції ідеального (бажаного) фільтра. Амплітуда відхилення не залежить від кількості коефіцієнтів

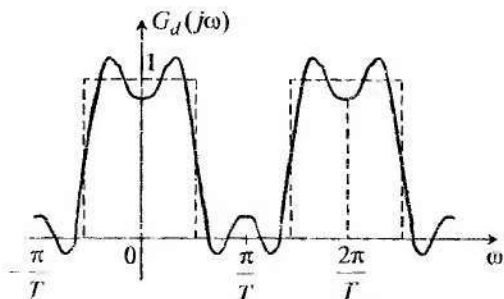


Рисунок 4.8 – Передатна функція ФНЧ

фільтра, тобто від порядку фільтра  $N$ . Під час зростання  $N$  відхилення тільки наближаються до фронту імпульсу (рис. 4.9). Ці відхилення можна зменшити застосуванням вікон. У цьому випадку рівняння (4.4) фільтра має вигляд

$$y(nT) = \sum_{k=-N}^N a_k \cdot W_k \cdot x(nT - kT), \quad (4.18)$$

а передатна функція дорівнює

$$G_d(j\omega) = a_0 \cdot W_0 + 2 \sum_{k=1}^N a_k \cdot W_k \cdot \cos k\omega T. \quad (4.19)$$

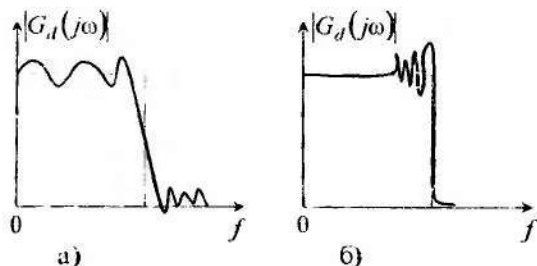


Рисунок 4.9 – Амплітудна характеристика ФНЧ:  
а)  $N = 4$ ; б)  $N = 20$

*Приклад 4.3.* Як функцію, що згладжує, для ФНЧ третього ( $N = 3$ ) порядку застосуємо вікно Ганна

$$W_k = 0,5 \left( 1 + \cos \frac{\pi k}{N} \right). \quad (4.20)$$

Коефіцієнти згладжування матимуть такі значення:

$$k = 0: \quad W_0 = 0,5 \left( 1 + \cos \frac{\pi \cdot 0}{3} \right) = 0,5 \cdot (1 + 1) = 1;$$

$$k = 1: \quad W_1 = W_{-1} = 0,5 \left( 1 + \cos \frac{\pi \cdot 1}{3} \right) = 0,5(1 + 0,5) = 0,75;$$

$$k = 2: \quad W_2 = W_{-2} = 0,5 \left( 1 + \cos \frac{\pi \cdot 2}{3} \right) = 0,5(1 - 0,5) = 0,25;$$

$$k = 3: \quad W_3 = W_{-3} = 0,5 \left( 1 + \cos \frac{\pi \cdot 3}{3} \right) = 0,5(1 - 1) = 0.$$

Рівняння (4.16) фільтра приймає такий вигляд:

$$\begin{aligned} y(nT) &= -\frac{1}{3\pi} \cdot x(nT + 3T) \cdot 0 + \frac{1}{\pi} \cdot x(nT + T) \cdot 0,75 + 0,5 \cdot x(nT) \cdot 1 + \\ &+ \frac{1}{\pi} \cdot x(nT - T) \cdot 0,75 - \frac{1}{3\pi} \cdot x(nT - 3T) \cdot 0 = \\ &= 0,24 \cdot x(nT + T) + 0,5 \cdot x(nT) - 0,24 \cdot x(nT - T) \end{aligned}$$

Передатна функція (4.17) з урахуванням функції вікна (4.20) приймає вигляд

$$\begin{aligned} G_d(j\omega) &= 0,5 \cdot W_0 + \frac{2}{\pi} \cdot W_1 \cdot \cos \omega T - \frac{2}{3\pi} \cdot W_3 \cdot \cos 3\omega T = \\ &= 0,5 + \frac{2}{\pi} \cdot 0,75 \cdot \cos \omega T - \frac{2}{3\pi} \cdot 0 \cdot \cos 3\omega T = 0,5 + 0,48 \cdot \cos \omega T. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Під час застосування функції вікна зменшується пульсація передатної функції в зонах пропускання і згасання, але зменшується також крутизна передатної функції (рис. 4.10).

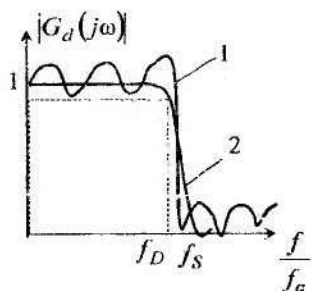
Фільтр буде тим краще, чим менші пульсації в зонах пропускання та запирання і менше перехідна зона (відстань між  $f_s$  і  $f_d$ ).

Необхідно відзначити, що в нерекурсивних фільтрах частота дискретизації повинна набагато перевищувати межу частоту. Прийнятними є коефіцієнти кратності від 4 до 6.

#### 4.2.4 Синтез ФВЧ, смугових і режекторних фільтрів

Розглянемо задачу визначення коефіцієнтів для фільтрів верхніх частот смугових і режекторних. Знаючи ці коефіцієнти, складається алгоритм

обчислення вихідного сигналу, визначаються передатна і частотні характеристики.



- 1 – характеристика фільтра без згладжування;
- 2 – при згладжуванні вікном Ганна

Рисунок 4.10 – Амплітудна характеристика при  $N = 20$

Введемо поняття всечастотного фільтра (ВЧФ). Такий фільтр пропускає, не послаблюючи, всі частоти. Його рівняння  $y(nT) = x(nT)$  має тільки один коефіцієнт  $a_0 = 1$ . Всі інші коефіцієнти  $a_k$  дорівнюють нулю, тобто  $a_k = 0$  при  $k \neq 0$ .

Якщо вилучити зі спектра всечастотного фільтра спектр ФНЧ, то залишиться спектр ФВЧ із тією самою межевою частотою (рис. 4.11).

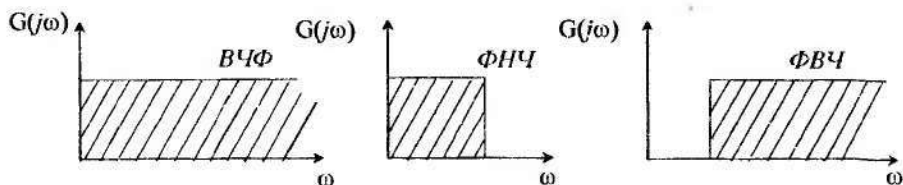


Рисунок 4.11 – Перетворення передатної функції ФНЧ у ФВЧ

Для коефіцієнтів фільтра це означає: коефіцієнти ФВЧ = коефіцієнти всечастотного фільтра – коефіцієнти ФНЧ

$$a_k(\text{ФВЧ}) = a_k(\text{ВЧФ}) - a_k(\text{ФНЧ}). \quad (4.22)$$

Коефіцієнти смугового фільтра (СФ) обчислюються за формулою

$$a_k(\text{СФ}) = a_k(\text{ФНЧ}_0) - a_k(\text{ФНЧ}_k). \quad (4.23)$$

Тут  $\Phi\text{НЧ}_0$  і  $\Phi\text{НЧ}_k$  – два фільтри нижніх частот із межовими частотами  $\omega_0$  і  $\omega_k$ , причому  $\omega_0 > \omega_k$ . Ці частоти є також межовими частотами смугового фільтра (рис. 4.12).

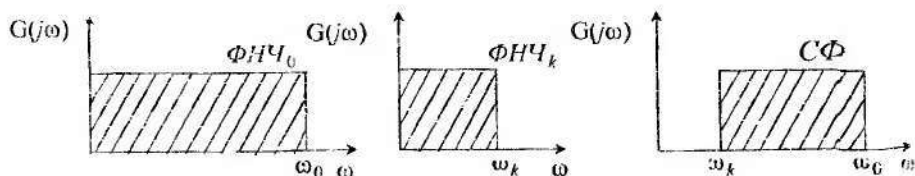


Рисунок 4.12 – Перетворення передатних функцій двох ФНЧ у передатну функцію СФ

Коефіцієнти режекторного фільтра утворюються відніманням із коефіцієнтів всечастотного фільтра коефіцієнтів смугового фільтра (рис. 4.13).

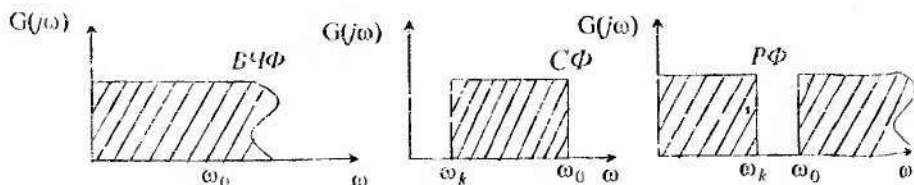


Рисунок 4.13 – Перетворення передатної функції смугового фільтра в передатну функцію режекторного фільтра

$$a_k(P\Phi) = a_k(B\Phi) - a_k(\Pi\Phi);$$

(4.24)

$$a_k(P\Phi) = a_k(B\Phi) - a_k(\Phi\text{НЧ}_0) - a_k(\Phi\text{НЧ}_k).$$

**Приклад 4.4** Визначити коефіцієнти нерекурсивного фільтра ФВЧ третього порядку ( $N=3$ ) з межевою частотою  $f_g = 20$  Гц. Частота дискретизації  $f_d = 100$  Гц.

**Розв'язання.** Нормована межева частота  $\Omega_g = 2\pi \cdot \frac{f_g}{f_d} = 0,4\pi$ . Коефіцієнти

ФНЧ обчислюються за формулою (4.15). Вони наведені в табл. 4.1 разом з отриманими з них коефіцієнтами ФВЧ.

Таблиця 4.1 – Коефіцієнти ФВЧ

$K$	$a_k(BЧФ)$	$a_k(ФНЧ)$	$a_k(ФВЧ)$
0	1	0,4	0,6
1	0	0,3	-0,3
2	0	0,09	-0,09
3	0	-0,06	0,06

Розрахований цифровим фільтром верхніх частот вихідний сигнал формується відповідно до рівняння

$$y(nT) = 0,06 \cdot x(nT + 3T) - 0,09 \cdot x(nT + 2T) - 0,03 \cdot x(nT + T) + 0,6 \cdot x(nT) - 0,03 \cdot x(nT - T) - 0,09 \cdot x(nT - 2T) + 0,06 \cdot x(nT - 3T).$$

*Приклад 4.5.* Визначити коефіцієнти цифрових смугового і режекторного фільтрів із нижньою межевою частотою  $f_k = 5 \text{ кГц}$ , верхньою межевою частотою  $f_a = 10 \text{ кГц}$ , частотою дискретизації  $f_a = 50 \text{ кГц}$ .

*Розв'язання.* Коефіцієнти ФНЧ обчислюються за формулою (4.15). Вони наведені разом із коефіцієнтами смугового і режекторного фільтрів у табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Коефіцієнти смугового і режекторного фільтрів

$K$	$a_k(BЧФ)$	$a_k(ФНЧ_0)$	$a_k(ФНЧ_k)$	$a_k(СФ)$	$a_k(РФ)$
0	1	0,4	0,2	0,2	0,8
1	0	0,3	0,19	0,11	-0,11
2	0	0,09	0,15	-0,06	0,06
3	0	-0,06	0,1	-0,16	0,16

Вихідний сигнал у смуговому фільтрі, що обчислюється, визначається виразом

$$y(nT) = -0,16 \cdot x(nT + 3T) - 0,06 \cdot x(nT + 2T) + 0,11 \cdot x(nT + T) + 0,2 \cdot x(nT) + 0,11 \cdot x(nT - T) - 0,06 \cdot x(nT - 2T) - 0,16 \cdot x(nT - 3T).$$

Алгоритм режекторного фільтра має вигляд

$$y(nT) = 0,16 \cdot x(nT + 3T) + 0,06 \cdot x(nT + 2T) - 0,11 \cdot x(nT + T) + 0,8 \cdot x(nT) - 0,11 \cdot x(nT - T) + 0,06 \cdot x(nT - 2T) + 0,16 \cdot x(nT - 3T).$$

Отже, для формування вихідного сигналу цифрового фільтра необхідно визначити порядок і коефіцієнти фільтра. Розрахунок характеристик дає відповідь на відповідність обчисленого фільтра завданню на проектування.

## 4.3 Рекурсивні фільтри

### 4.3.1 Алгоритм

У рекурсивних фільтрах вихідний сигнал  $y(nT)$  формується з перетворених значень вхідного сигналу  $x(nT)$  з урахуванням відповідних вагових коефіцієнтів значень вхідного сигналу на попередніх тактах  $y(nT - mT)$

$$y(nT) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot x(nT - kT) - \sum_{k=1}^M b_k \cdot y(nT - mT). \quad (4.25)$$

Більше з двох чисел  $M$  або  $N$  визначає порядок фільтра. Під час синтезу рекурсивних фільтрів коефіцієнти  $a_k$  змінюються від  $a_0$  до  $a_N$ , а не від  $a_{-N}$  до  $a_N$ , як це було в нерекурсивних. Наявність зворотного зв'язку за вихідним сигналом  $y(nT - mT)$  може викликати нестабільність.

Розрахунок рекурсивних фільтрів зручно виконувати за допомогою математичного прийому що називається  $Z$ -перетворенням. При цьому визначається  $Z$ -зображення передатної функції, що дає можливість визначити  $Z$ -зображення вихідної послідовності  $Y(Z)$ , а надалі визначити вихідний сигнал  $y(nT)$ .

### 4.3.2 $Z$ -перетворення

Під час аналізу і синтезу дискретних пристроїв і сигналів широко застосовується  $Z$ -перетворення. Воно відіграє стосовно дискретних сигналів таку саму роль, як і інтегральне перетворення Фур'є для аналогових сигналів. Використання  $Z$ -перетворення дозволяє вивчати дискретні послідовності методами математичного аналізу безперервних функцій. Це перетворення дозволяє аналітично описати дискретний сигнал і характеристики дискретних пристроїв. За допомогою  $Z$ -перетворення зручно записувати різноманітні форми виразів для передатних функцій і тим самим одержувати різноманітні форми реалізації цифрових фільтрів.

$Z$ -перетворення для послідовності  $S(nT)$  визначається формулою

$$S(z) = Z\{S(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} S(nT) \cdot Z^{-n}. \quad (4.26)$$

У цьому виразі множник  $Z^{-n}$  означає затримку на  $nT$ , якщо обчислювати від  $t = 0$  (або від  $n = 0$ ).

$$Z\{S(nT - mT)\} = Z\{S(nT)\} \cdot Z^{-m} = S(z) \cdot Z^{-m}. \quad (4.27)$$

Функцію  $S(z)$  називають  $Z$ -уявленням послідовності  $S(nT)$ .

*Приклад 4.6.* Обчислити  $Z$ -перетворення послідовності:

$$S(n=0) = 2; \quad S(1T) = -1; \quad S(2T) = -3; \quad S(3T) = 1,5; \quad S(nT) = 0 \quad \text{при } n \geq 4.$$

*Розв'язання.* Відповідно до (4.26) отримаємо

$$S(z) = 2 - Z^{-1} - 3 \cdot Z^{-2} + 1,5 \cdot Z^{-3}.$$

### 4.3.3 Характеристики

**Передатна (системна) функція** цифрового фільтра визначається як відношення  $Z$ -перетворень вихідної  $y(nT)$  і вхідної  $x(nT)$  послідовностей

$$H(z) = \frac{Z\{y(nT)\}}{Z\{x(nT)\}} = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (4.28)$$

Визначимо передатну функцію рекурсивного фільтра. Для цього застосуємо  $Z$ -перетворення до різницевого рівняння (4.1). Одержимо

$$\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^{-m} \cdot Y(z) = \sum_{i=0}^N a_i \cdot z^i \cdot X(z). \quad (4.29)$$

З цього виразу при  $a_0 = 1$  одержимо передатну функцію рекурсивного фільтра у вигляді

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i \cdot z^i}{1 + \sum_{m=1}^M b_m \cdot z^{-m}}. \quad (4.30)$$

Якщо відома передатна функція, то відомі коефіцієнти фільтра і неважко визначити сигнал  $y(nT)$  на виході фільтра.

Приклад 4.7. Нехай відома передатна функція рекурсивного фільтра

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - 0,4 \cdot z^{-1} + 0,1 \cdot z^{-2}}$$

Тоді вихідний сигнал відповідно до формул (4.29) і (4.30) визначається за таким алгоритмом:

$$y(nT) = x(nT) - 3 \cdot x(nT - T) + 0,4 \cdot y(nT - T) - 0,1 \cdot y(nT - 2T)$$

Частотна характеристика ЦФ визначається шляхом підставлення  $z = e^{j\omega T}$  в передатну функцію (4.30)

$$H(j\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{b_0 + b_1 \cdot e^{-j\omega T} + \dots + b_N \cdot e^{-j\omega NT}}{1 + a_1 \cdot e^{-j\omega T} + \dots + a_M \cdot e^{-j\omega MT}} \quad (4.31)$$

Модуль комплексної частотної характеристики  $A(\omega) = |H(j\omega)|$  називають амплітудно-частотною характеристикою фільтра (АЧХ), що визначає амплітуду вихідного сигналу в сталому режимі при вхідному сигналі  $x(nT) = e^{j\omega nT}$ .

Аргумент комплексної частотної характеристики  $\varphi(\omega) = \arg[H(j\omega)]$  називають фазо-частотною характеристикою (ФЧХ) фільтра, він визначає фазу вихідного сигналу при вхідному сигналі  $x(nT) = e^{j\omega nT}$ .

Приклад 4.8. Нехай  $H(z) = 1/(1 - 0,5z^{-1})$ . Тоді за формулою (4.31) одержуємо  $H(j\omega) = 1/(1 - 0,5 \cdot e^{-j\omega T})$ . З огляду на те, що  $e^{-j\omega T} = \cos(\omega T) + j \sin(\omega T)$ , одержимо вираз для АЧХ і ФЧХ

$$A(\omega) = 1/\sqrt{(1 - 0,5 \cos \omega T)^2 + (0,5 \sin \omega T)^2};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{0,5 \sin \omega T}{1 - 0,5 \cos \omega T}.$$

Слід мати на увазі, що комплексна частотна характеристика  $H(j\omega)$  періодична функція частоти з періодом, який дорівнює частоті дискретизації  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Періодичними функціями є АЧХ і ФЧХ.

За умов прикладу 4.8 при  $T = \frac{1}{8000}$  с на рис. 4.14 побудований графік для двох періодів функції  $A(\omega)$ .

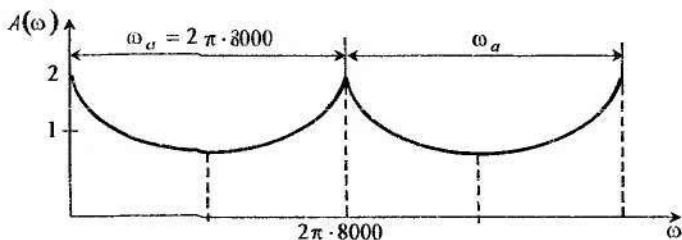


Рисунок 4.14 – АЧХ для двох періодів

Імпульсна характеристика ЦФ  $h(nT)$  являє собою реакцію фільтра на вхідний вплив у вигляді одиничного імпульсу (дельта-функції  $\delta(t)$ )  $\tilde{\delta}(nT) = 1$  при  $n = 0$ ;  $\tilde{\delta}(nT) = 0$  при  $n \neq 0$ . Рекурсивний фільтр є фільтром із нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ), або з нескінченним імпульсним відгуком. Це означає, що під час подачі на вхід одиничного впливу вихідний сигнал теоретично ніколи не зникає; характер зміни вихідного сигналу рекурсивного фільтра при одиничному вхідному впливі розглянуто в прикладі 4.1.

Імпульсна характеристика  $h(nT)$  і передатна функція пов'язані між собою співвідношеннями

$$h(nT) = z^{-1} \{ H(z) \}, \quad H(z) = z \{ h(nT) \}. \quad (4.32)$$

Очевидно, що передатна функція  $H(z)$  являє собою  $Z$ -перетворення імпульсної характеристики ЦФ.

#### 4.3.4 Білінійне перетворення

Для розрахунку рекурсивних цифрових фільтрів (РЦФ) – ФНЧ, ФВЧ, смугових і режекторних – найбільш прийнятним є метод білінійного перетворення. Білінійне перетворення – це конформне (подібне) відображення точок  $p$ -області в точки  $Z$ -області та використовує заміну змінної вигляду

$$P = N \frac{z-1}{z+1}, \quad (4.33)$$

де  $N$  – постійний множник.

Для наведеного перетворення (4.33)  $N = \text{ctg } \pi \cdot \omega_{г.п.}$ .

Використання такої заміни забезпечує однозначне перетворення передатної функції  $K(p)$  аналогового фільтра-прототипу (АФ-прототипу) в передатну функцію  $H(z)$  РЦФ

$$H(z) = K(p) \Big|_{p=N \frac{z-1}{z+1}} \quad (4.34)$$

Кожній точці  $p$ -площини ( $p = \delta + j\omega$ ) наводиться у відповідність певна точка  $Z$ -площини ( $z = \exp((\delta + j\omega)T)$ ). Уявна вісь  $p$ -площини ( $p = j\omega$ ) відображається в одиничне коло  $Z$ -площини ( $z = \exp(j\omega T)$ ), а ліва половина  $p$ -площини ( $\text{Re}(p) < 0$ ) відображається в частину  $Z$ -площини, розташовану всередині одиничного кола ( $|z| < 1$ ) (рис. 4.15).

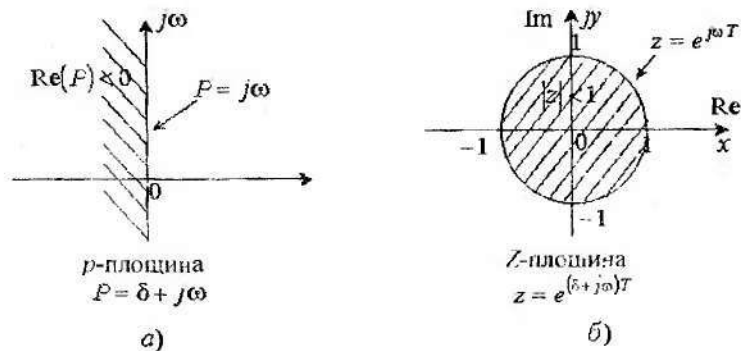


Рисунок 4.15 – Відображення точок  $p$ -площини в точки  $Z$ -площини

Необхідно мати на увазі, що перетворення відповідно до формули (4.33) застосовується для ФНЧ. Для інших видів фільтрів (ФВЧ, СФ, РФ) застосовується своя форма білінійного перетворення

$$\text{ФВЧ:} \quad p = N \frac{z+1}{z-1}; \quad N = \lg(\pi \cdot \omega_{r, n_1}); \quad (4.35)$$

$$\text{ПФ:} \quad p = N \frac{1 - 2\alpha \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}; \quad N = \text{ctg} \pi(\omega_{r, n_1} - \omega_{r, n_2}); \quad (4.36)$$

$$\text{РФ:} \quad p = N \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2\alpha \cdot z^{-1} + z^{-2}}; \quad N = \lg \pi(\omega_{r, n_2} - \omega_{r, n_1}); \quad (4.37)$$

$$\alpha = \frac{\cos \left[ \pi (\omega_{r, n_2} + \omega_{r, n_1}) \right]}{\cos \left[ \pi (\omega_{r, n_2} - \omega_{r, n_1}) \right]}$$

У цих формулах величини  $\omega_{ГД}$  і  $\omega_{ГЗ}$  – не нормовані „дифрові” межові частоти смуги пропускання  $\omega_{ГД} = \frac{f_{ГД}}{f_a}$  і смуги затримування  $\omega_{ГЗ} = \frac{f_{ГЗ}}{f_a}$ , де  $f_a$  – частота дискретизації.

#### 4.3.5 Типи фільтрів

Під час проектування рекурсивних фільтрів із використанням білінійного перетворення обирається аналоговий фільтр – прототип з подібними для поставленої задачі властивостями. До таких властивостей відносяться крутизна АЧХ під час переходу від смуги пропускання до смуги затримування, лінійність ФЧХ, наявність пульсацій у зонах пропускання і запирання, тривалість перехідних процесів, придатність до передачі імпульсів. Жоден із фільтрів не відповідає якнайкраще за всіма перерахованими пунктами одночасно. Розглянемо декілька типів фільтрів, які найчастіше застосовуються.

**ФНЧ Батерворта (тип В).** Характеризується максимально плоскою в смузі пропускання монотонною АЧХ, яка зменшується, крутизна її зростає зі збільшенням порядку фільтра  $N$ . У реакції на стрибок з'являються відхилення, тому ФНЧ Батерворта не може передавати імпульси, не викривляючи їхню форму (рис. 4.16).

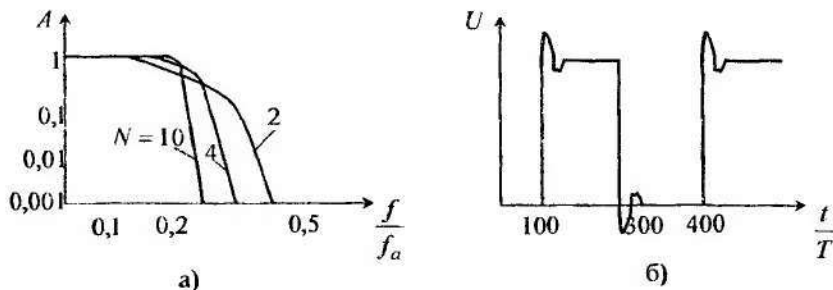


Рисунок 4.16 – ФНЧ Батерворта порядку  $N$  для  $f_a = 5f_g$ : а) АЧХ; б) відновлення імпульсу при  $N = 4$ .

**ФНЧ Беселя.** Зсув фаз окремих складових, пропорційний частоті, має лінійну ФЧХ. Груповий час затримки є константою. Фільтр має найкращу передатну характеристику для прямокутних імпульсів. Амплітудно-частотна характеристика убиває менш круто, ніж у фільтрі Батерворта.

**ФНЧ Чебишева.** АЧХ є рівнохвильовою в смузі пропускання і монотонною в смузі затримування (тип Т) (рис. 4.17 а) або монотонною в смузі пропускання і рівнохвильовою у смузі затримування (тип Т, або інверсній) (рис. 4.17 б). На рисунку  $\Delta A_n$  – нерівномірність АЧХ у смузі пропускання,  $\Delta A_z$  – відхилення від нуля в смузі затримування.

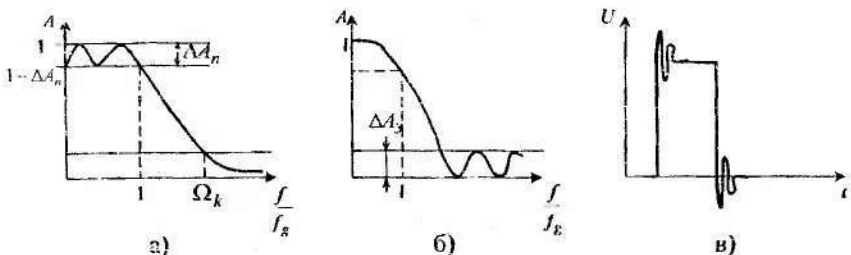


Рисунок 4.17 – Характеристика ФНЧ Чебишева

Перехід із зони запирання в зону пропускання відбувається крутіше в фільтрах Батерворта і Беселя. Реакція на стрибок характеризується сильними відхиленнями (рис. 4.17 в).

**ФНЧ Золотарьова-Кауера.** АЧХ є рівноважною в смузі пропускання й у смузі затримування. Має велику крутизну в перехідній області.

**З'єднання часткових фільтрів.** Фільтри вищих порядків реалізуються послідовним або рівнобіжним з'єднанням цифрових ланок першого або другого порядків. Ланки більш високих порядків не застосовуються.

З'єднання, при якому вихід одного фільтра з'єднаний із входом іншого, називають каскадним або послідовним (рис. 4.18 а). При цьому передатна функція отриманого фільтра  $H_{E.K}(z)$  визначається як добуток передатних функцій окремих фільтрів

$$H_{E.K}(z) = H_1(z) \cdot H_2(z). \quad (4.38)$$

З'єднання, при якому фільтри мають спільні входи, а виходи підключені до входів одного суматора (рис. 4.18 б), називають рівнобіжним, причому

$$H_{E.П}(z) = H_1(z) + H_2(z) \quad (4.39)$$

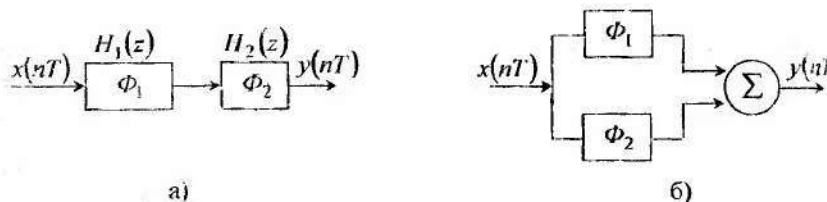


Рисунок 4.18 – З'єднання часткових фільтрів

Коефіцієнти окремих часткових фільтрів слід позначати ще одним індексом  $-i$ , що є номером відповідного часткового фільтра.

Нехай ФНЧ другого порядку описується рівнянням

$$b_0 \cdot y(nT) + b_1 \cdot y(nT - T) + b_2 \cdot y(nT - 2T) = a_0 x(nT) + a_1 \cdot x(nT - T) + a_2 \cdot x(nT - 2T) \quad (4.40)$$

і має передатну функцію

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2}} \quad (4.41)$$

Якщо послідовно включено всього  $P$  часткових фільтрів, передатну функцію загального фільтра одержують як добуток передатних функцій часткових фільтрів

$$H(z) = \prod_{i=1}^P \frac{a_{0i} + a_{1i} \cdot z^{-1} + a_{2i} \cdot z^{-2}}{b_{0i} + b_{1i} \cdot z^{-1} + b_{2i} \cdot z^{-2}} \quad (4.42)$$

Окремі ланки (часткові фільтри), кожна з яких має передатну функцію (4.41), називають **біквдратними блоками**. Біквдратний блок є універсальною ланкою, придатною для побудови будь-яких фільтрів.

#### 4.3.6 Алгоритми розрахунку РЦФ

Розглянемо алгоритми розрахунку рекурсивних цифрових фільтрів, заснованих на виборі аналогового фільтра-прототипу і пов'язаних з ним частотних перетвореннях.

Під час синтезу деякого рекурсивного цифрового фільтра, як правило, беруть за основу відповідний аналоговий фільтр. Для схеми допусків із завдання на проектування визначається передатна функція аналогового фільтра, що відображається потім через білінійне перетворення в  $Z$ -площині. У такий спосіб стає відома передатна функція в  $Z$ -площині та можна одержати коефіцієнти цифрового фільтра.

Розглянемо загальну схему алгоритму визначення передатної функції цифрового ФНЧ (ФВЧ) за довідником. Цей алгоритм наведений у книзі [4]. Алгоритм для смугових (режекторних) фільтрів також наведений у цій книзі.

Вихідними даними є частота дискретизації  $f_a$ , межева частота смуги пропускання  $f_{ГП}$ , межева частота смуги затримування  $f_{ГЗ}$ , верхня межа згасання в смузі пропускання  $\Delta_a$ , гарантоване згасання в смузі затримування  $a_0$ .

Алгоритм визначення передатної функції містить у собі такі етапи:

1. Розрахунок нормованих „цифрових” межових частот

$$\omega_{r,n} = \frac{f_{r,n}}{f_a}, \quad \omega_{r,z} = \frac{f_{r,z}}{f_a}$$

2. Розрахунок параметрів перетворення  $N$  за формулами (4.33) – (4.37).

3. Обчислення межової аналогової частоти  $\Omega_k$  смуги затримування АФ-прототипу.

4. Визначення передатної функції АФ-прототипу за довідником.

5. Визначення передатної функції  $H(z)$  цифрового ФНЧ (ФВЧ) за допомогою білінійного перетворення, формули (4.33) – (4.37).

6. Контрольний розрахунок АЧХ і ФЧХ отриманого цифрового фільтра.

Припустимо, в результаті проведених дій отримана передатна функція, що має такий вигляд:

$$H(z) = \frac{0,39 - 0,78z^{-1} + 0,39z^{-2}}{1,00 - 0,37z^{-1} + 0,20z^{-2}} \quad (4.43)$$

Це означає, що потрібними коефіцієнтами фільтра будуть такі значення.

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,39; & a_1 &= -0,78; & a_2 &= 0,39; \\ b_0 &= 1,00; & b_1 &= -0,37; & b_2 &= 0,20. \end{aligned}$$

Звідси одержимо рівняння фільтра НЧ.

$$y(nT) = 0,39 \cdot x(nT) - 0,78 \cdot x(nT - T) + 0,39 \cdot x(nT - 2T) + 0,37 \cdot y(nT - T) - 0,20 \cdot y(nT - 2T). \quad (4.44)$$

Це рівняння і є кінцевим результатом розрахунку РЦФ.

**Приклад 4.9.** Визначити системну функцію рекурсивного фільтра нижніх частот за такими даними:  $T = 100$  мс;  $0,7 \leq |H(e^{j\omega T})| \leq 1$  при  $0 \leq f \leq f_1$ ;  $f_1 = 1$  кГц;  $|H(e^{j\omega T})| \leq 0,33$  при  $f \geq f_2$ ;  $f_2 = 2$  кГц (рис. 4.19).

**Розв'язання.** Визначаємо межові частоти фільтра-прототипу

$$\Omega_a = N \cdot \text{tg} \frac{\omega T}{2}$$

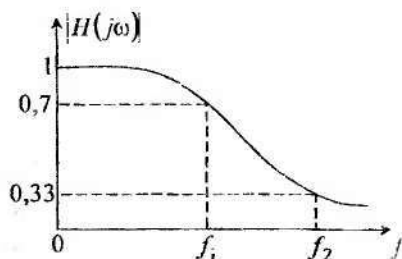


Рисунок 4.19 – АЧХ фільтра

де  $\Omega_a$  – нормована аналогова частота;

$\omega$  – цифрова частота.

Вважаючи  $N=1$  р/с, одержуємо  $\Omega_{a1}=0,3249$  р/с,  $\Omega_{a2}=0,7265$  р/с. За довідником (наприклад, Христіан Е., Ейзман Е. Таблиці і графіки за розрахунком фільтрів 1975 р.) обираємо фільтр Батерворта з такими характеристиками:

$$\text{при } 0 \leq \Omega_a \leq 0,3249 \text{ р/с } 0,7 \leq |K(j\omega_a)| \leq 1;$$

$$\text{при } \Omega_a > 0,7265 \text{ р/с } |K(j\omega_a)| \leq 0,33.$$

Підставляючи  $P = N \cdot \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  у формулу для  $K(p)$ , остаточно одержуємо

$$H(z) = 0,0675 \left[ \frac{(1+2z^{-1}+z^{-2})}{(1-1,141z^{-1}+0,413z^{-2})} \right] = \frac{(0,0675+0,135z^{-1}+0,0675z^{-2})}{(1-1,141z^{-1}+0,413z^{-2})}$$

Алгоритм обчислення вихідного сигналу

$$y(nT) = 0,0675x(nT) + 0,135x(nT-T) + 0,0675x(nT-2T) + 1,141y(nT-T) - 0,413y(nT-2T)$$

Схема рекурсивного фільтра зображена на рис. 4.20.

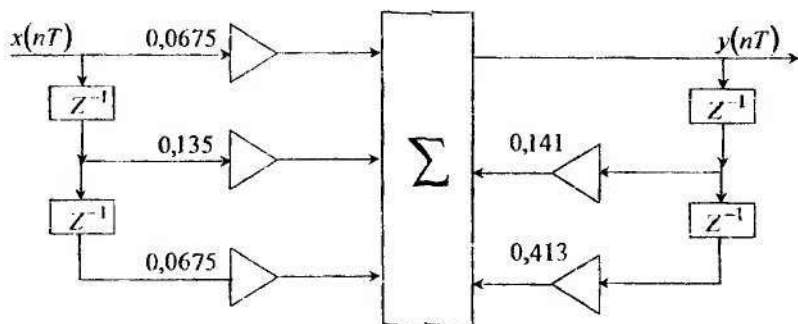


Рисунок 4.20 – Функціональна схема фільтра

Заключним етапом проектування має бути контрольний розрахунок АЧХ, ФЧХ, імпульсної характеристики, групового часу затримки для перевірки відповідності їх поставленим вимогам.

## 5 ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

У біологічних і медичних дослідженнях доводиться мати справу з дуже складними експериментами, в яких багато факторів не піддаються чіткому підрахунку і контролю. Для обробки й інтерпретації результатів таких експериментів потрібно застосовувати методи сучасної математичної статистики, що дозволяє отримати з експериментів всю інформацію й оцінити ступінь надійності отриманих даних.

Статистичні програмні пакети зробили методи аналізу даних доступними і наочними. Всю чорнову роботу з виконання трудомістких розрахунків за складними багатоступінчастими формулами, побудови таблиць і графіків узяв на себе комп'ютер, а людині залишилася творча робота, пов'язана з постановкою задач, вибором методів їхнього розв'язання й інтерпретацією отриманих результатів на різних стадіях розв'язання. В цьому розділі надані основні поняття теорії імовірностей і прикладної статистики, оволодіння якими необхідно для обміркованого застосування методів статистичного аналізу даних. Обговорюються основні характеристики випадкової величини, найбільш розповсюджені статистичні розподіли, основи перевірки статистичних гіпотез і оцінювання параметрів, кореляційний метод аналізу медико-біологічної інформації (МБІ).

Навчальний матеріал наданий у конспективній формі на рівні понять.

### 5.1 Числові оцінки статистичних характеристик

Числові оцінки статистичних характеристик розподілу імовірностей корисні тим, що допомагають скласти наочне уявлення про цей розподіл:

#### 1. Варіаційний ряд

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; \quad x_{i-1} \leq x_i \leq x_{i+1}. \quad (5.1)$$

#### 2. Вибірковий розмах

$$w_x = x_n - x_1. \quad (5.2)$$

#### 3. Вибірковий квазірозмах

$$w_x(i) = x_{n-i+1} - x_i \quad (5.3)$$

4. Математичне очікування або середнє значення за розподілом. Виміряні значення  $x_n$  утворюють вибірку з  $N$  значень, що розглядаються як складові генеральної сукупності. Оцінка математичного очікування генеральної сукупності визначається співвідношенням

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n. \quad (5.4)$$

Математичне сподівання випадкової змінної обчислюється за допомогою імовірності  $P_n$  для дискретних змінних

$$\bar{x} = \sum_{n=0}^N x_n \cdot P_n, \quad (5.5)$$

та функції щільності імовірності  $P(x)$  для безперервних змінних

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x). \quad (5.6)$$

5. Медіана – це таке значення випадкової величини, яке розділяє варіаційний ряд на дві однакові за обсягом групи. Якщо виміряні значення розмістити в напрямку зростання (зменшення), то при непарній кількості значень  $N$  значення, яке знаходиться посередині, називається медіаною; при парній кількості значень медіаною є середнє арифметичне двох значень, що знаходяться посередині.

$$M_e = \begin{cases} \frac{X_{N/2} + X_{N/2+1}}{2}, & \text{якщо } N \text{ парне;} \\ X_{(N+1)/2}, & \text{якщо } N \text{ непарне.} \end{cases} \quad (5.7)$$

6. Мода – таке значення випадкової величини, імовірність появи якої максимальна. Відповідна цьому значенню імовірність називається амплітудою моди  $AM_0$  (рис. 5.1).

$$M_0 = m_x + 3(M_e - m_x). \quad (5.8)$$

7. Дисперсія вибірки є мірою розсіювання випадкової величини біля середнього значення. Дисперсією називається математичне очікування квадрата центрованої випадкової величини

$$D_x = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2. \quad (5.9)$$

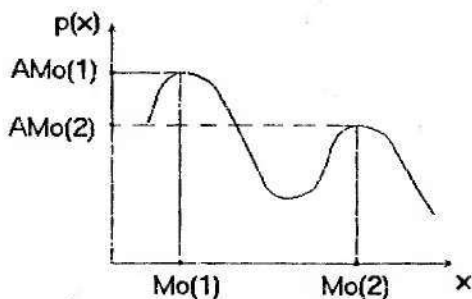


Рисунок 5.1 – Мода й амплітуда моди випадкової величини

Дисперсія розподілу визначається співвідношенням

$$D_x = \sum_{n=0}^N (x_n - \bar{x})^2 \cdot p_n. \quad (5.10)$$

Дані, що обчислюються згідно з (5.9), є оцінками для дисперсії розподілу.

8. Середньоквадратичне відхилення (СКВ) – корінь квадратний з дисперсії, має розмірність, яка співпадає з розмірністю випадкової величини

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (5.11)$$

9. Більш загальними числовими характеристиками, ніж математичне очікування і дисперсія, є моменти випадкової величини. Розрізняють початкові і центральні моменти. Момент порядку  $l$

$$m_x(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - a)^l. \quad (5.12)$$

При  $a = 0$  має місце початковий момент, при  $a = m_x$  – центральний момент. Математичне очікування є початковим моментом першого порядку, а дисперсія – центральний момент другого порядку.

10. Коефіцієнт варіації або коефіцієнт розсіювання – характеризує мінливість випадкової величини. Визначається як відношення СКВ до математичного очікування

$$V_x = \frac{\sigma_x}{m_x}. \quad (5.13)$$

11. Коефіцієнт асиметрії – характеризує несиметричність розподілу випадкової величини, являє собою нормований (безрозмірний) центральний момент третього порядку

$$A_s = \frac{m_x(3)}{\sigma_x^3}, \quad (5.14)$$

де  $m_x(3) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - m_x)^3$  – центральний момент третього порядку.

За допомогою цього коефіцієнта можна характеризувати форму кривої закону розподілу, а також приналежність закону розподілу заданому, наприклад, нормальному. Так, для нормального розподілу (рис. 5.2а)  $A_s = 0$ .

На рис. 5.2б справа від значення математичного очікування лежить більш протяжний відрізок кривої закону розподілу. Коефіцієнт асиметрії в цьому випадку буде позитивним.

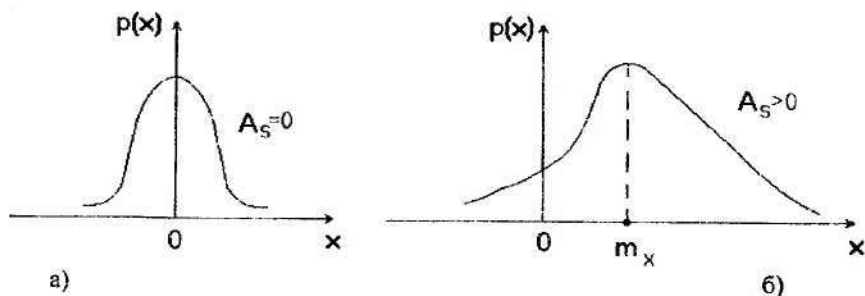


Рисунок 5.2 – Закони розподілу:  
а) нормальний; б) відмінний від нормального

12. Коефіцієнт ексцесу або коефіцієнт гостровершинності – характеризує ступінь виразності “хвостів” розподілу, тобто частоту появи значень, відмінних від математичного очікування. Визначається з виразу

$$E_s = \frac{m_x(4)}{\sigma_x^4} - 3, \quad (5.15)$$

де  $m_x(4) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - m_x)^4$  – центральний момент четвертого порядку.

У такий спосіб характеризується і форма кривої закону розподілу. Для нормального розподілу  $E_s = 3$ .

У практичних задачах показники асиметрії й ексцесу потрібні для визначення близькості розглянутого закону розподілу до закону Гаусса.

### 13. Максимальне відхилення

$$\max \{x_n - m_x, m_x - x_1\}. \quad (5.16)$$

### 14. Стандартне відхилення вибіркового середнього

$$\sigma_x = \left\{ \frac{1}{N(N-1)} \cdot \sum_{n=1}^N (x_n^2 - m_x^2) \right\}^{1/2}. \quad (5.17)$$

### 15. Довірчий інтервал для середнього.

Довірчим інтервалом для параметра  $\theta$  називається інтервал  $(\theta_1, \theta_2)$ , що містить дійсне значення параметра з заданою імовірністю  $p = 1 - \alpha$ , тобто  $p [\theta_1 < \theta < \theta_2] = 1 - \alpha$ . Число  $1 - \alpha$  називається довірчою імовірністю, а значення  $\alpha$  — рівнем значимості. Розглянемо поняття довірчого інтервалу докладніше. Нижня і верхня границі довірчого інтервалу  $\theta_1$  і  $\theta_2$  визначаються за результатами спостережень. Довірчий інтервал охоплює параметр, який оцінюють, з імовірністю  $1 - \alpha$ , або в  $100(1 - \alpha) \%$  випадках. Вибір довірчої імовірності визначається конкретними умовами. Найчастіше використовуються значення  $1 - \alpha$ , що дорівнює 0,90; 0,95; 0,99. Аналітичний вираз для довірчого інтервалу можна записати в такому вигляді:

$$m_x \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdot t_{1-\alpha/2}(N-1), \quad (5.18)$$

де  $m_x$  — математичне очікування;

$\sigma$  — середньоквадратичне відхилення;

$N$  — кількість значень випадкової величини;

$t_{1-\alpha/2}(N-1)$  — квантиль рівня  $(1 - \alpha/2)$  для  $(N-1)$  значень.

Пояснимо значення параметра  $t_{1-\alpha/2}(N-1)$ . Цей параметр називається квантилем і являє собою розв'язання  $t_p$  рівняння  $F(x) = P$ . Наприклад, якщо  $N = 16$ ,  $\alpha = 0.05$ , то  $1 - \alpha/2 = 0,975$ , а значення квантилі  $t_{0,975}(15) = 2,131$ .

Вираз (5.18) для довірчого інтервалу для середнього можна записати інакше

$$[m_x - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdot t_{1-\alpha/2}(N-1)] < m < [m_x + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdot t_{1-\alpha/2}(N-1)]. \quad (5.19)$$

*Приклад 5.1.* Заміри 16 показників дали такі результати: 13,4; 12,8; 11,9; 12,4; 13,5; 13,7; 12,0; 13,8; 10,6; 12,4; 13,5; 11,7; 13,9; 11,5; 12,5; 11,9. Вибірка отримана з нормально розподіленої генеральної сукупності. Знайти довірчий інтервал для середнього і дисперсії при довірчій імовірності  $1-\alpha = 0,95$ .

*Розв'язання.* За вибіркою знайдемо оцінки середнього, дисперсії і середньоквадратичного відхилення

$$m_x = 12,57; \quad D_x = 0,91; \quad \sigma = 0,95.$$

За таблицями для квантилей розподілів визначаємо квантилі розподілу Стюдента  $t_p(k)$  і квантилі розподілу  $\chi_p^2(k)$

$$t_{1-\alpha/2}(N-1) = t_{0,975}(15) = 2,131;$$

$$\chi_{1-\alpha/2}^2(N-1) = \chi_{0,975}^2(15) = 27,49; \quad \chi_{0,025}^2(15) = 6,26.$$

За формулою (5.19) одержимо

$$12,57 - \frac{0,95}{\sqrt{16}} \cdot 2,131 < m < 12,57 + \frac{0,95}{\sqrt{16}} \cdot 2,131, \quad \text{або} \quad 12,06 < m < 13,08.$$

Отриманий результат означає, що при довірчій імовірності 0,95 середнє значення знаходиться в інтервалі [12,06; 13,08].

Довірчий інтервал можна визначити за допомогою розподілу  $\chi^2$ . У цьому випадку визначаються квантилі розподілу  $\chi_p^2(k)$

$$\chi_{1-\alpha/2}^2(N-1) = \chi_{0,975}^2(15) = 27,49; \quad \chi_{0,025}^2(15) = 6,26.$$

Характер подальших обчислень аналогічний до попереднього.

16. Коваріація – характеристика, що визначає ступінь зв'язку двох залежних випадкових величин. Визначається як математичне очікування добутку  $(x - m_x) \cdot (y - m_y)$

$$\text{cov}(x, y) = M[(x - m_x) \cdot (y - m_y)].$$

Ця характеристика також називається коефіцієнтом взаємної кореляції  $R_{xy}$

$$R_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - m_x) \cdot (y_n - m_y) = \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \cdot y_n \right) - m_x \cdot m_y. \quad (5.20)$$

## 17. Кореляція або нормований коефіцієнт взаємної кореляції

$$r_{xy} = \frac{R_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\sum_{n=1}^N (x_n - m_x) \cdot (y_n - m_y)}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (x_n - m_x)^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^N (y_n - m_y)^2}} \quad (5.21)$$

Для множини випадкових величин  $x_1, x_2, \dots, x_N$  коефіцієнти парної взаємної кореляції послуються в матрицю

$$r = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N1} & r_{N2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

18. Ранги. Рангом спостереження називають номер, що одержить спостереження в упорядкованій сукупності – після упорядкування її за визначеним правилом (наприклад, від менших значень до більших). Нехай вибірка складається з чисел 6, 17, 14, 5, 12. Тоді рангом числа 6 буде 2, рангом 17 буде 5 і т.д. Процедура переходу від сукупності спостережень до послідовності їхніх рангів називається рангуванням.

19. Гістограма. Наочний опис даних досягається шляхом групування спостережень у класи. При цьому весь інтервал спостереження, що складається з  $N$  значень  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , розбивається на  $m$  інтервалів, які зветься інтервалами групування. Довжини інтервалів позначимо через  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ , а середини інтервалів угруповання – через  $t_1, \dots, t_m$ . Якщо кількість спостережень у  $j$ -му інтервалі дорівнює  $n_j$ , а загальна кількість спостережень дорівнює  $N$ , то

величина  $h_j = n_j / N$  визначає частоту влучення спостережень у  $j$ -й інтервал групування. Для того щоб уникнути впливу величини інтервалу на  $h_j$ , вводиться величина  $f_j = h_j / \Delta_j$ .

Графічне зображення залежності частоти влучення елементів вибірки від відповідного інтервалу групування називається гістограмою вибірки.

Якщо всі інтервали мають однакову довжину, то розподіл на  $\Delta_j$  не беруть до уваги, а значення  $h_j$  або  $n_j$  використовують як ординати. На рис. 5.1 зображена гістограма вибірки, що характеризує кількість пацієнтів у поліклініці в залежності від температури тіла.

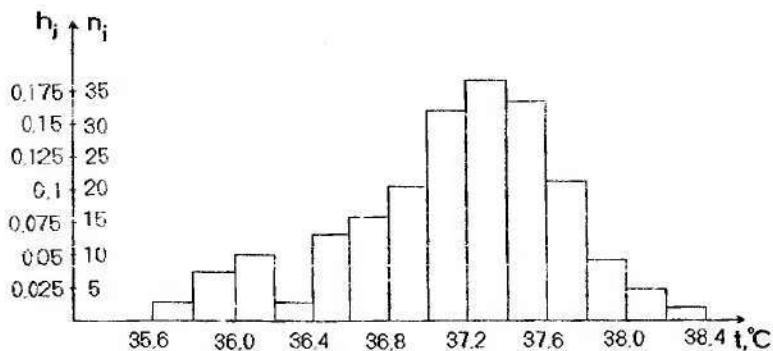


Рисунок 5.3 - Гістограма вибірки

## 5.2 Розподіл імовірностей

Випадкові події утворюють розподіл, що цілком описується функцією щільності розподілу імовірностей  $f(x)$  та інтегральною функцією розподілу  $F(x)$ .

Знання розподілів імовірностей дозволяє зробити статистичні висновки про перевірку гіпотез, оцінку параметрів, припустимі відхилення цих оцінок або імовірності помилок їхнього визначення тощо.

Розподіли, що застосовують на практиці, є дискретними або безперервними. Найбільше застосування в практиці обробки медико-біологічної інформації з дискретних розподілів одержали біноміальний і пуассонівський, з безперервних – показниковий, нормальний і пов'язані з ним розподіли: Ст'юдента,  $\chi^2$ -квадрат і  $F$ -розподіл Фішера. Останні дуже часто використовуються під час побудови довірчих інтервалів і перевірки гіпотез.

### 5.2.1 Біноміальний розподіл

Біноміальний розподіл є імовірнісною моделлю для багатьох явищ. Використовується в тих випадках, коли нас цікавить, скільки разів відбувається деяка подія в серії з визначеної кількості незалежних спостережень, які виконуються в однакових умовах.

Імовірність спостереження події  $A$ , що відбувається  $K$  разів, у послідовності з  $n$  іспитів, визначається виразом

$$P(A = K) = C_n^k \cdot (P(A))^k \cdot (P(\bar{A}))^{n-k}, \quad (5.23)$$

де  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  – кількість сполучень (з  $n$  загальної кількості по  $k$  в кожній групі).

$$P(A=K) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (P(A))^k \cdot (P(\bar{A}))^{n-k} \quad (5.24)$$

При  $n \leq 100$  можна скористатися наближеною формулою

$$P_n(k+1) = \frac{(n-k) \cdot P(A)}{(k+1) \cdot P(\bar{A})} \cdot P_n(k). \quad (5.25)$$

*Приклад 5.3.* Нехай необхідно спланувати роботу кардіологічного відділення на 30 ліжок; імовірність виникнення порушень ритму серця складає 0,05. Потрібно визначити кількість хворих, у яких одночасно виникнуть порушення ритму, з метою встановлення обсягів засобів, необхідних для надання їм допомоги.

Визначимо  $P_{30}(K)$ , тобто імовірність того, що порушення ритму у відділенні виникнуть у  $K$ -хворих, а також  $\bar{P}_{30}(K)$  – кумулятивну або “накопичену” імовірність виникнення ускладнень не більш, ніж у  $K$ -пацієнтів

$$\bar{P}_n(K) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(K).$$

Імовірність того, що ні в кого не виникнуть ускладнення, тобто  $K=0$

$$P_{30}(0) = C_{30}^0 \cdot (0,05)^0 \cdot (0,95)^{30-0} = 0,95^{30} = 0,2146.$$

Імовірність того, що ускладнення виникнуть не більш, ніж у одного пацієнта, визначимо за наближеною формулою

$$P_{30}(1) = \frac{30-0}{0+1} \cdot \frac{0,05}{0,95} \cdot 0,2146 = 0,3389.$$

Кумулятивна імовірність

$$\bar{P}_{30}(1) = 0,2146 + 0,3389 = 0,5535.$$

Результати розрахунків зведемо в табл. 5.1. Побудуємо графіки для  $P_{30}(K)$  і  $\bar{P}_{30}(K)$  (рис. 5.4).

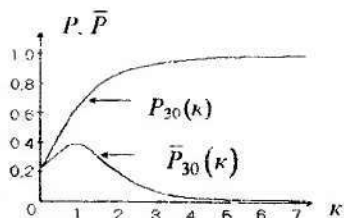


Рисунок 5.4 – Ймовірності виникнення аритмії

Таблиця 5.1 – Значення ймовірностей

Кількість пацієнтів	Ймовірність $P_{30}(K)$	Кумулятивна ймовірність $\bar{P}_{30}(K)$
0	0,2146	0,2146
1	0,3389	0,5535
2	0,2586	0,8122
3	0,1270	0,9392
4	0,0459	0,9844
5	0,0124	0,9967
6	0,0027	0,9994
7	0,0005	0,9999
8	0,0001	0,999998
9	0,00001	0,999999

Ймовірність порушення ритмів не більше, ніж у шести пацієнтів складає 0,9994. Це і є та надійна межа, на яку потрібно розраховувати запас ліків і матеріалів.

### 5.2.2 Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона отримується з біноміального при необмеженому зростанні кількості іспитів  $n$ . При незмінному математичному очікуванні  $m_x$  ймовірність того, що подія  $A$  повториться рівно  $K$  разів, при біноміальному розподілі  $P(K)$  прагне до межі

$$P(K) = \frac{m_x^k}{K!} \cdot e^{-m_x} = \frac{\lambda^k}{K!} \cdot e^{-\lambda} \text{ для } K = 0, 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

Цей вираз і визначає розподіл Пуассона, графік якого зображений на рис. 5.5.

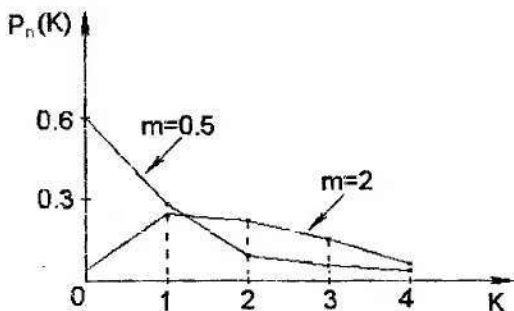


Рисунок 5.5 – Розподіл Пуассона

Математичне очікування і дисперсія випадкової величини, що має розподіл Пуассона з параметром  $\lambda$ , дорівнює:  $m_x = \lambda$ ;  $D_x = \lambda$ .

Щільність розподілу імовірностей

$$P(K) = \frac{m_x^k}{K!} \cdot e^{-m_x} = \frac{\lambda^k}{K!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{для } K = 0, 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

Інтегральна функція розподілу має вигляд

$$F(k) = \sum_{m=0}^k \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}. \quad (5.27)$$

### 5.2.3 Нормальний розподіл

Нормальний розподіл, або розподіл Гауса, відноситься до найбільш розповсюджених і важливих. Величина  $X$  завжди розподіляється нормально, коли на неї впливають різні параметри, приблизно рівні між собою і не залежні один від одного.

Випадкова величина  $X$  має нормальний розподіл імовірностей з параметрами  $m_x$  і  $\sigma$ , якщо її щільність розподілу задається формулою

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (5.28)$$

де  $m = m_x$ ;  $\sigma = \sqrt{D_x}$  -- математичне очікування і середньоквадратичне відхилення.

Інтегральна функція розподілу імовірностей  $F(x)$  визначається з виразу

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} \exp\left[-\frac{(\xi - m)^2}{2\sigma^2}\right] d\xi. \quad (5.29)$$

Графіки і функції нормального розподілу зображені на рис. 5.6. Як видно з рис. 5.6а, функція щільності розподілу імовірностей описується дзвоноподібною кривою з точкою перегину при  $x = m_x$ . Вона симетрична. Кількість вимірів зліва і справа від середнього значення однакова. Середнє значення одночасно є і медіаною розподілу. Середнє значення також є найбільш імовірним значенням – модою.

Нагадаємо, що площа фігури, обмежена графіком функції щільності розподілу, віссю абсцис і відрізками двох вертикальних прямих,  $x = b$ ,  $x = c$  є імовірністю влучення випадкової величини в інтервал  $(b, c)$ . Аналіз свідчить, що нормальна випадкова величина  $N(m, \sigma^2)$  потрапляє в інтервал  $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$  з імовірністю, що дорівнює 0,9933.

Особливу роль відіграє нормальний розподіл з параметрами  $m = 0$  і  $\sigma = 1$ , тобто розподіл  $N(0;1)$ , який називають стандартним нормальним розподілом. Щільність стандартного нормального розподілу визначається формулою

$$f(x) = p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}. \quad (5.30)$$

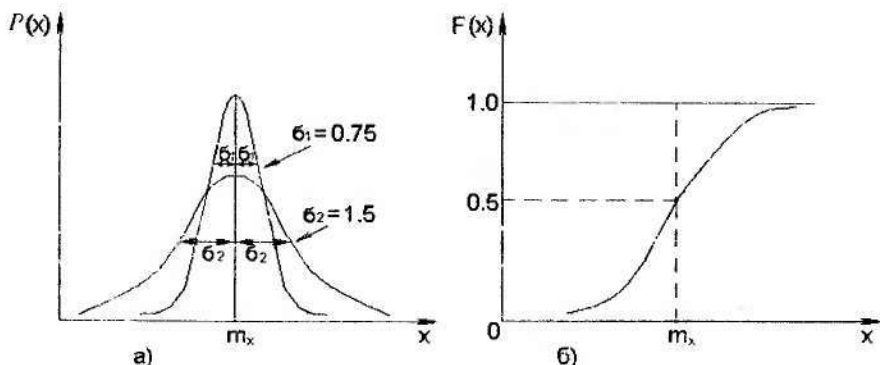


Рисунок 5.6 – Функції нормального розподілу:

- а) функції щільності розподілу імовірності  $P(x)$  з різними значеннями дисперсії;  
 б) інтегральна функція розподілу

Графік такого розподілу зображений на рис. 5.7.

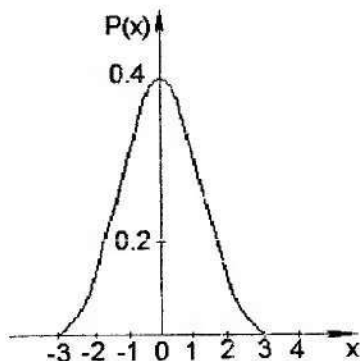


Рисунок 5.7 –  $N(0;1)$  – Стандартний нормальний розподіл

#### 5.2.4 Розподіли, пов'язані з нормальним розподілом

Під час операцій з нормальними випадковими величинами, які доводиться проводити під час аналізу даних, виникає кілька нових видів розподілів. У першу чергу, це розподіл Стьюдента,  $\chi^2$  (хі-квадрат) і  $F$ -розподіли. Ці розподіли відіграють дуже важливу роль у прикладному і теоретичному аналізах. Так, при з'ясуванні точності і ймовірності статистичних оцінок використовуються процентні точки розподілів Стьюдента і хі-квадрат. Розподіл статистик багатьох критеріїв, що використовуються для перевірки різних припущень, наближається за допомогою цих розподілів.

##### Розподіл хі-квадрат

Розподіл хі-квадрат ( $\chi^2$ ) є тестовим або перевірочним розподілом. Він використовується в статистиці для оцінки параметрів або перевірки гіпотез.

Нехай ми маємо незалежні випадкові величини  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , причому кожна з них має стандартний нормальний розподіл. Випадкову величину, обумовлену як суму квадратів, назвали  $\chi^2$  (хі-квадрат)

$$\chi_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (5.31)$$

Ця величина має розподіл  $\chi^2$  з  $N$  ступенями свободи. Функція щільності розподілу імовірності визначається виразом

$$f(x) = \chi_n^2 = \frac{1}{2^{N/2}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot x^{(N/2)-1} \cdot e^{-x/2} \quad (5.32)$$

У цьому виразі  $\Gamma(N/2)$  є гамма-функцією. Для парних  $N$  можна обчислити гамма-функцію  $\Gamma(N/2)=(N/2-1)!$ . Необхідно відзначити, що щільність розподілу (5.31) безпосередньо використовується не дуже часто.

На рис. 5.8 зображені функції щільності розподілу  $\chi^2$ -квадрат з різним числом ступенів свободи  $N$ .

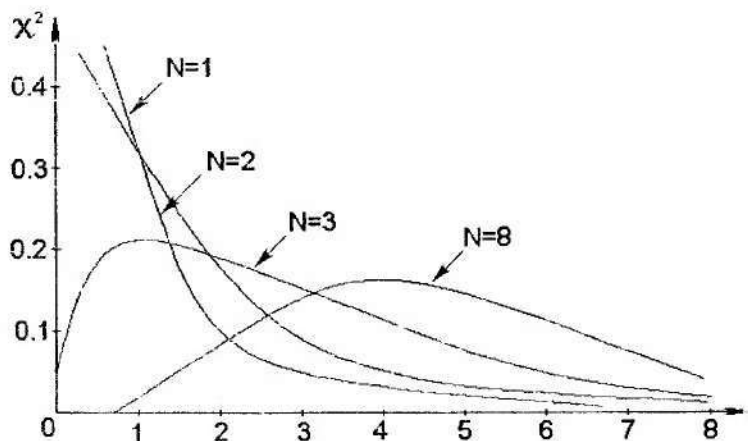


Рисунок 5.8 – Функції щільності розподілу  $\chi^2$  – квадрат з різним числом ступенів свободи  $N$

Математичне очікування і дисперсія випадкової величини  $\chi_n^2$  дорівнюють

$$M(\chi_n^2) = N, \quad D(\chi_n^2) = 2N.$$

Для випадкової величини  $\chi_n^2$  складені різноманітні таблиці, що містять як числові значення  $\chi^2$ , так і значення  $p$ -квантилів випадкових величин  $\chi_n^2$ , при  $n = 1, 2, \dots, N$ . Якщо імовірності виражені у відсотках, то значення  $p$ -квантилів називають процентними точками, а самі таблиці – таблицями процентних точок. Аргумент  $p$ ,  $0 < p < 1$ , при цьому проминає відповідний набір значень.

### Розподіл Стьюдента

Нехай є незалежні випадкові величини  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i$  і кожна з них має стандартний нормальний розподіл. Введемо нову випадкову величину, що визначається за правилом

$$t_n = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}} \quad (5.33)$$

Розподіл цієї величини називають розподілом Стьюдента. Саму величину нерідко називають стьюдентовим відношенням. Число  $n = 1, 2, \dots, N$  називають числом ступенів свободи розподілу Стьюдента. Математичне очікування і дисперсія випадкової величини  $t_n$  дорівнюють

$$M(t_n) = 0, \quad D(t_n) = \frac{N}{N-2}.$$

На рис. 5.9 зображені функції щільності розподілу Стьюдента з різним числом ступенів свободи.

В довідниках наведені таблиці процентних точок (для послідовних  $n = 1, 2, 3, \dots$  до деякого значення). При великих  $n$  досить часто рекомендують використовувати таблиці стандартного нормального розподілу, іноді з деякими виправленнями.

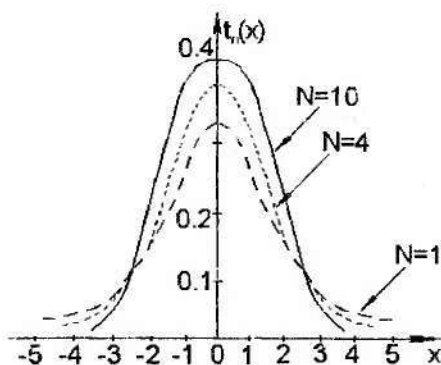


Рисунок 5.9 - Функція щільності розподілу Стьюдента з різним числом ступенів свободи  $N$

### 5.3 Оцінки статичних гіпотез

Статистична гіпотеза – це припущення про розподіл імовірностей, які необхідно перевірити за наявними даними. Розрізняють прості та складні гіпотези

Проста гіпотеза задає розподіл імовірностей в цілому. Складна гіпотеза

вказує не один розподіл, а декілька розподілів, які мають визначені властивості.

У книзі [14] надані відомості прикладного характеру про статистичні гіпотези й їхні моделі, перевірки гіпотез з використанням схеми випробувань Бернуллі, критеріїв знаків, Манна-Уїтні, Уїлкоксона, паралельних спостережень.

Розглянемо окремі задачі оцінки статистичних гіпотез, які найчастіше зустрічаються під час обробки медико-біологічної інформації.

### 5.3.1 Приналежність до типу розподілу

Отримані в результаті експериментальних досліджень дані потребують знання їхніх законів розподілу. Ґрунтуючись на теоретичних або емпіричних припущеннях, обирають тип розподілу. Для перевірки гіпотези встановлюють параметри обраного розподілу. При цьому обчислюються оцінки імовірності  $\bar{p}$ , середнього значення  $\bar{x}$  і дисперсії  $S^2$  для сукупностей, що спостерігаються і які є вибірками з генеральної сукупності. Під час дослідження інших груп є імовірність одержати інші числові оцінки, оскільки з різних вибірок виходять різні оцінки. В цій ситуації бажано знати відповіді на такі запитання: з якою імовірністю оцінка  $\bar{x}$  менше, ніж найбільше значення  $\bar{x}_0$ ; з якою імовірністю оцінка  $\bar{x}$  більше, ніж найменше значення  $\bar{x}_0$ ; чому дорівнює інтервал  $x_0 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_0$ , в який потрапляє значення  $\bar{x}$  з відомою імовірністю?

Інтегральна функція дозволяє обчислити імовірність того, що оцінка буде менше, або дорівнює верхній границі. Довірчий інтервал, в який значення потрапляє з відомою імовірністю, також можна обчислити за допомогою функції розподілу.

Розглянемо задачу приналежності вибірки, що спостерігається, до визначеного типу розподілу з використанням тесту  $\chi^2$ .

Припустимо, що вибірка  $X$ , яка спостерігається, задовольняє визначеному типу розподілу з функціями розподілу  $P(x)$  і  $F(x)$ . Необхідно перевірити, чи відповідають значення, що спостерігаються, тим, які очікувалися б при даному типі розподілу. Якщо різниця велика, гіпотеза, що  $F(x)$  є функцією розподілу вибірки  $X$ , неприйнятна. Якщо стандартне відхилення знаходиться нижче критичного значення, то гіпотеза приймається. Критерій, який встановлює придатність того чи іншого розподілу, дає розподіл  $\chi^2$ , тобто цей розподіл приймається як тест-функція.  $\chi^2$ -тест складається з таких етапів:

- 1) область, яка спостерігається, розділяється на  $K$ -інтервалів різної ширини, причому кількість величин в  $i$ -му інтервалі позначимо  $b_i$ ;
- 2) визначається тип розподілу, що очікується;
- 3) за даними спостережень обчислюються параметри розподілу  $\bar{p}$ ,  $\bar{x}$ ,  $S^2$ ;

4) оцінюються функція щільності розподілу імовірностей  $P(x)$  і інтегральна функція  $F(x)$ , згідно з якими можна буде обчислити імовірність  $w_i$  з якою випадкова величина влучає в  $i$ -й інтервал;

5) імовірність  $w_i$  помножується на загальне число  $G$  даних спостережень. В результаті одержуємо для кожного інтервалу число  $e_i$  теоретично очікуваних значень вибірки:  $e_i = w_i \cdot G$ ;

6) обчислюється відносне відхилення  $A_i$ ,

$$A_i = \frac{(b_i - e_i)^2}{e_i}; \quad (5.34)$$

7) визначається сума відхилень  $S$

$$S = \sum_{i=1}^k A_i; \quad (5.35)$$

8) встановлюється рівень значимості  $\gamma(0,1; 0,05; 0,01)$ ;

9) встановлюється число ступенів свободи  $N$ , що відповідає дійсному розподілу  $\chi^2$

$$N = k - 1 - r,$$

де  $k$  – число класів ознак, що спостерігаються;

$r$  – число параметрів розподілу.

На зразок, для нормального розподілу визначають середнє та дисперсію, і тому  $r=2$ ; для розподілу Пуассона обчислюється оцінка середнього значення, тому  $r=1$ ;

10) розв'язання наступного рівняння дає максимальне значення  $\chi_0^2$

$$w(\chi^2 \leq \chi_0^2) = 1 - \gamma, \quad (5.36)$$

11) сума  $S$  відхилень порівнюється з максимально припустимим аргументом  $\chi_0^2$  розподілу  $\chi^2$ . Гіпотеза приймається при  $S \leq \chi_0^2$ , гіпотеза відхиляється при  $S \geq \chi_0^2$ .

### 5.3.2 Теорема Байєса

Однією з теорем, які широко використовуються у практичних додатках для статистичної перевірки, є теорема Байєса. Вона отримала велике поширення під час діагностики захворювань за сукупністю симптомів у задачі

автоматичного розпізнавання патологічних процесів, оскільки є практично формалізованим варіантом процесу постановки діагнозу лікарем.

Постановка математичної задачі така: є  $n$  несумісних гіпотез, які прогножуються, щодо стану хворого в деякий майбутній момент часу. Затверджується, що хоча б одна з них правильно відображає наявну клінічну ситуацію. Перед проведенням статистичних розрахунків імовірності кожної з наявних гіпотез відомі, так звані, апріорні імовірності  $P(S_j)$ .

Метою розрахунків (або статистичного експерименту) є корекція імовірностей гіпотез у світлі нової, ще неврахованої інформації про хворого.

Основою методу є обчислення імовірностей кожної з прогнозованих гіпотез (діагноз захворювання)  $S_1, S_2, \dots, S_n$  за умови, що стан хворого характеризується симптомами  $E_1, E_2, \dots, E_b, \dots, E_k$ , які утворюють комплекс симптомів  $E$ . Для кожної з гіпотез (або діагнозу) характерний розподіл умовних імовірностей  $P(S_j / E)$  появи симптомокомплексу  $E$ .

Вираз  $P(S_j / E)$  є умовною імовірністю й визначає імовірність появи події (діагнозу) за умови виконання події  $E$  (симптому).

Якщо ці розподіли, а також апріорні імовірності гіпотез  $P(S_j)$  задані, то визначення апостеріорної імовірності гіпотези  $P(S_j / E)$  можна виконати за формулою

$$P(S_j / E) = \frac{P(S_j) \cdot P(E / S_j)}{\sum_{j=1}^n P(S_j) \cdot P(E / S_j)}, \quad (5.37)$$

де  $P(S_j)$  – апріорна імовірність реалізації прогнозу (діагнозу)  $S_j$ ,

$P(E / S_j)$  – імовірність симптомокомплексу  $E$  під час розвитку хвороби відповідно до гіпотези  $S_j$ .

Формула (5.37) – це аналітичний вираз теореми Байєса або методу Байєса. Розглянемо використання теореми Байєса на конкретному прикладі.

Нехай імовірності симптомів для таких захворювань, як тетрада Фалло  $S_1$ , дефект міжпередсерцевої перегородки ( $S_2$ ) і незагоєна артеріальна протока  $S_3$  наведені в табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – Діагностична таблиця

$S_j$	$P(S_j)$	$P(E_1 / S_j)$	$P(E_2 / S_j)$	$P(E_3 / S_j)$	$P(E_4 / S_j)$
$S_1$	0,35	0,9	0	0,05	0,6
$S_2$	0,15	0,15	0,8	0,8	0,8
$S_3$	0,50	1,0	0,95	0,9	0,1

У діагностичній таблиці подані медичні відомості, що містять імовірності появи ознак  $E_i$  для даної групи захворювань. Для спрощення діагностичної таблиці вона складена всього для трьох діагнозів захворювань і містить тільки чотири ознаки: діагноз  $S_1$  – тетрада Фалло;  $S_2$  – дефект міжпередсерцевої перегородки;  $S_3$  – незагоєна артеріальна протока; ознака  $E_1$  – ціаноз,  $E_2$  – посилення легеневого рисунку,  $E_3$  – акцент другого тону в другому міжребер'ї зліва,  $E_4$  – правограма (ЕКГ).

У практиці автоматичної діагностики захворювань теорема Байєса використовується в такому вигляді:

$$P(S_1/E) = \frac{P(S_1) \cdot P(E/S_1)}{P(S_1) \cdot P(E/S_1) + P(S_2) \cdot P(E/S_2) + \dots + P(S_n) \cdot P(E/S_n)}, \quad (5.38)$$

де  $P(S_1/E)$  – умовна імовірність захворювання  $S_1$  за наявності симптомо-комплексу  $E$ ;

$P(S_1)$  – апіорна імовірність захворювання  $S_1$ ;

$P(E/S_1)$  – умовна імовірність симптомокомплексу  $E$  при захворюванні  $S_1$ .

У такий спосіб можна обчислити умовні імовірності  $P(S_2/E)$ , ...,  $P(S_n/E)$ ...

Ознака  $E_p$  буде абсолютно достовірною, якщо при даному захворюванні вона зустрічається в 100% випадків (ціаноз при транспозиції судин, сип при корі, білок у сечі при гострому нефриті тощо). Імовірність такої ознаки приймається рівною 1.

У загальному випадку імовірність ознаки  $E_i$  при захворюванні  $S_j$ ,

$$P(E_i/S_j) = n_{ij} / (n_j - n_{10j}), \quad (5.39)$$

де  $n_{ij}$  – кількість хворих з діагнозом захворювання  $S_j$ , що мають ознаку  $E_i$ ;

$n_j$  – загальна кількість хворих з даним захворюванням;

$n_{10j}$  – кількість хворих з діагнозом  $S_j$ , не обстежених на ознаку  $E_i$ .

Величина  $P(E_i/S_j)$  визначається на основі даних медичної статистики, результатів обробки архівного матеріалу і літературних даних, причому  $P(E_i/S_j)$  тим достовірніша, чим більше  $n$ .

Апостеріорна імовірність діагнозу  $S_j$  за наявності комплексу ознак  $E$  визначається описаною вище формулою Байєса.

Найчастішим методом є припущення про можливість добору для вирішення клінічної задачі достовірного комплексу незалежних вихідних

параметрів – симптомів, ознак. Тоді  $P(E/S_j)$  для задачі, що розв'язується, можна виразити через умовні імовірності окремих значень симптомів при хворобі  $S_j$

$$P(E/S_j) = P(E_1/S_j) \cdot P(E_2/S_j) \cdot P(E_3/S_j) \cdot P(E_4/S_j); \quad (5.40)$$

$$P(E) = \sum_{j=1}^3 P(S_j) \cdot P(E_1/S_j) \cdot P(E_2/S_j) \cdot P(E_3/S_j) \cdot P(E_4/S_j).$$

Припустимо, що за даними статистики при хворобі  $S_1$  ознака  $E_1$  зустрічається в 90%,  $E_2$  не зустрічається (0%),  $E_3$  зустрічається в 5%,  $E_4$  в 60%; при хворобі  $S_2$  ознака  $E_1$  зустрічається в 100%,  $E_2$  – у 95%,  $E_3$  – у 90%,  $E_4$  – у 10% випадках. Також вважаємо, що апіорна імовірність захворювань  $P(S_1) = 0,35$ ;  $P(S_2) = 0,15$ ;  $P(S_3) = 0,50$ .

Обчислимо імовірності діагнозів, коли у хворого проявилися всі 4 ознаки:  $P(S_1/E) = 0$ ;  $P(S_2/E) = 0,75$ ;  $P(S_3/E) = 0,27$ . У математичній діагностиці за методом Байєса передбачається, що у хворого є тільки одне з захворювань. Отже, найбільш можливим є діагноз  $S_2$ .

Розглянемо випадок, коли у хворого відсутня ознака  $E_1$  (ціаноз), але є всі інші ознаки. Імовірність відсутності ознаки  $E_1$

$$P(\bar{E}_1/S_j) = 1 - P(E_1/S_j). \quad (5.41)$$

Розрахунок проводиться саме в такий спосіб, але імовірність  $P(E_1/S_j)$  замінюється на  $1 - P(E_1/S_j)$ . В результаті одержимо  $P(S_1/\bar{E}_1) = 0$ ;  $P(S_2/\bar{E}_1) = 0,63$ ;  $P(S_3/\bar{E}_1) = 0,37$ .

Результати розрахунків занесемо в табл. 5.3.

Таблиця 5.3 – Імовірності діагнозів за наявності всіх ознак і відсутності однієї з них

$S_j$	ОЗНАКИ				
	$E_1 E_2 E_3 E_4$	$\bar{E}_1 E_2 E_3 E_4$	$E_1 \bar{E}_2 E_3 E_4$	$E_1 E_2 \bar{E}_3 E_4$	$E_1 E_2 E_3 \bar{E}_4$
$S_1$	0	0	0,75	0	0
$S_2$	0,73	0,63	0,23	0,86	0,07
$S_3$	0,27	0,37	0,02	0,14	0,93

З табл. 5.3 видно, що найбільш чітку картину в розглянутому прикладі одержуємо в тому випадку, коли у хворого відсутня ознака  $E_4$ , але є всі інші ознаки  $P(S_3) = 0,93$ .

У реальних умовах за наявності 100–200 ознак для 30–80 діагнозів подібні розрахунки проводяться на ЕОМ. В результаті розрахунків подаються на друк імовірності кожного діагнозу. Отримані імовірності порівнюються з деякою межевою величиною  $T_j$ , встановленою в процесі навчання. Якщо  $P(S_j) > T_j$ , то роблять висновок про правильність діагнозу  $S_j$ . У випадку, коли  $P(S_j) < T_j$ , потрібно проведення додаткових досліджень для постановки правильного діагнозу.

#### 5.4 Кореляційний аналіз

Існує кілька підходів до аналізу властивостей випадкових сигналів. Повний опис цих властивостей дає багатовимірні щільності розподілу імовірностей. Однак можливий і спрощений підхід, коли випадкові процеси характеризуються своїми моментними функціями. Аналіз випадкових сигналів, заснований на використанні моментних функцій не вище другого порядку, називається кореляційним аналізом. Кореляційний аналіз дозволяє виявити внутрішні зв'язки між випадковими величинами і процесами, одержати такі характеристики і параметри, що містять додаткову інформацію, і яку не можна одержати іншими способами.

Наочне подання результатів аналізу сигналів дає опис цих сигналів за допомогою спектральної щільності потужності. Між кореляційними і спектральними властивостями випадкових сигналів існує глибокий і тісний зв'язок. Вдасться одержати ряд важливих спектральних характеристик сигналів шляхом перетворення Фур'є кореляційних функцій. Кореляційний аналіз застосовується як для випадкових, так і детермінованих сигналів.

##### 5.4.1 Авто- і взаємкореляційні функції

Однією з найважливіших характеристик сигналів, що дозволяє робити висновки про ступінь сигналу з його змішеною в часі копією, є автокореляційна функція (АКФ).

Для сигналу  $S(t)$ , заданого на інтервалі часу  $[-\infty, \infty]$ , кореляційна функція  $R(\tau)$  визначається виразом

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot S(t - \tau) dt, \quad (5.42)$$

де  $\tau$  – величина тимчасового зміщення сигналу.

АКФ є парною функцією тимчасового зміщення  $\tau$ . Дійсно, замінюючи  $(t - \tau)$  на  $x$ , одержимо

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t - \tau) \cdot S(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \cdot S(\tau + x) dx = R(-\tau).$$

При  $\tau = 0$  сигнал має найбільшу схожість з його зміщеною копією, і функція  $R(\tau)$  досягає максимального значення, яке дорівнює повній енергії сигналу

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = E.$$

Зі збільшенням  $\tau$  функція  $R(\tau)$  у всіх сигналів, крім періодичних, зменшується і під час зміщення на величину, що перевищує тривалість сигналу, перетворюється в нуль.

На рис. 5.10 зображений приклад побудови автокореляційної функції прямокутного імпульсу. АКФ для кожного імпульсу чисельно дорівнює площі під кривою добутку імпульсу і його зміщеної копії.

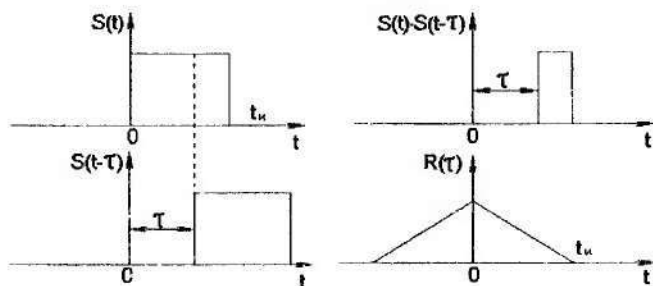


Рисунок 5.10 – Побудова автокореляційної функції

Під час визначення  $R_p(\tau)$  періодичної функції усереднення виконується за її періодом  $T_s$ , тобто

$$R_p(\tau) = \frac{1}{T_s} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cdot S(t - \tau) dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T/2}^{T/2} S(t + \tau) \cdot S(t) dt.$$

АКФ періодичного сигналу сама є періодичною функцією. Наприклад, для гармонійного сигналу  $S(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$  АКФ має такий вигляд:

$$R_p(\tau) = \frac{A^2}{T_s} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(\omega_0 t + \varphi) \cdot \cos[\omega_0(t + \tau) + \varphi] dt = \frac{1}{2} A^2 \cos \omega_0 \tau.$$

Для оцінки ступеня подоби двох сигналів  $S_1(t)$  і  $S_2(t)$  використовується взаємна кореляційна функція (ВКФ), що визначається виразом

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) \cdot S_2(t - \tau) dt. \quad (5.43)$$

АКФ  $R(\tau)$  є окремим випадком ВКФ  $R_{12}(\tau)$ , коли сигнали  $S_1(t)$  і  $S_2(t)$  однакові.

На відміну від  $R(\tau)$  функція  $R_{12}(\tau)$  у загальному випадку не є парною відносно  $\tau$  і може досягати максимуму при кожному  $\tau$ . Значення  $R_{12}(\tau = 0)$  визначає взаємну енергію  $E_{12}$  сигналів  $S_1(t)$  і  $S_2(t)$

$$R_{12}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) \cdot S_2(t) dt = E_{12}.$$

На рис. 5.11 зображено побудову ВКФ для сигналів  $S_1(t)$  і  $S_2(t)$

$$S_1(t) = B \text{ при } 0 \leq t \leq t_u; S_2(t) = at \text{ при } 0 \leq t \leq t_u.$$

Вихідні значення сигналів (при  $\tau = 0$ ) наведені на рис. 5.11а. Під час зміщення прямокутного імпульсу  $S_1(t)$  вліво ( $\tau < 0$ , рис. 5.11б) ВКФ зменшується до нуля спочатку швидко, а потім повільніше (рис. 5.11г) відповідно до виразу

$$R_{12}(\tau) = \int_0^{t_u - \tau} \frac{a \cdot B}{2} (t_u - \tau)^2 dt.$$

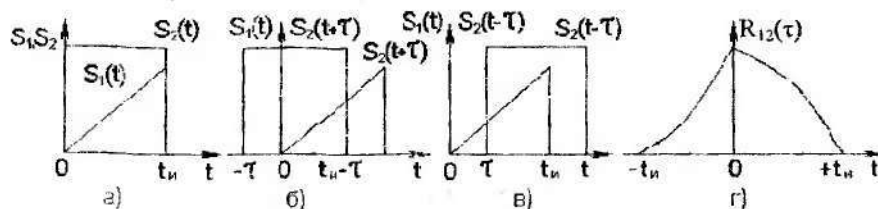


Рисунок 5.11 – Побудова взаємкореляційної функції

У даному прикладі ВКФ досягає максимуму, який дорівнює  $R_{12}(t) = B$ .

#### 5.4.2 Кореляційні функції дискретних сигналів

Весь інтервал часу існування сигналу розділений на ціле число  $M > 1$  позицій. На кожній з таких позицій сигнал може знаходитися в одному з двох фізичних станів (рис. 5.12).

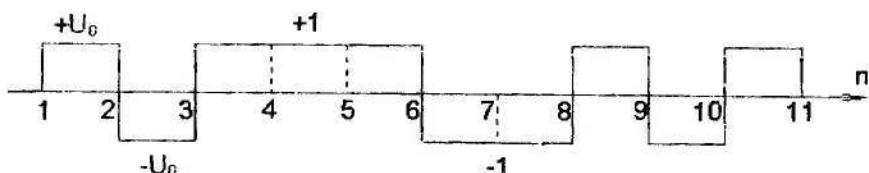


Рисунок 5.12 – Дискретний сигнал

Модель сигналу з дискретною структурою – це послідовність  $\{U_1, U_2, U_3, \dots, U_M\}$ , в якій кожен символ  $U_j$  приймає одне з двох можливих значень  $\pm 1$ . Для зручності доповнюватимемо таку послідовність нулями на всіх позиціях, де сигнали не визначені. При цьому розгорнута форма запису дискретного сигналу  $\{1, 1, -1, 1\}$  матиме вигляд:  $\dots 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \dots$

Найважливіша операція, яка виконується під час обробки дискретних сигналів, полягає в зміщенні такого сигналу на деяку кількість позицій щодо вихідного положення. Нижче наведений сигнал і його копії, зміщені на 1, 2, 3 позиції вбік записування

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \dots
 \end{array}$$

Для обчислення автокореляційної функції дискретного сигналу операцію інтегрування в (5.41) треба замінити підсумовуванням, а замість змінної  $\tau$  використовувати ціле число  $n$ , додатне або від'ємне, що вказує, на скільки позицій копія зміщена щодо вихідного сигналу.

Дискретна функція автокореляції має такий вигляд:

$$\bar{R}_u(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j \cdot U_{j-n} \quad (5.44)$$

Дискретна АКФ парна:  $\bar{R}_u(n) = \bar{R}_u(-n)$ .

При нульовому зміщенні АКФ перетворюється в енергію дискретного сигналу.

Для зразка обчислимо дискретну функцію автокореляції трипозиційного сигналу з однаковими значеннями в кожній позиції:  $U=\{1, 1, 1\}$ . Запишемо цей сигнал разом зі своїми копіями, зміщеними на 1, 2, 3 позиції

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \end{array}$$

Оскільки вже при  $n = 3$  сигнал і копія припиняють накладатися один на один, добутки, які входять у (5.43), стають рівними нулю при  $n \geq 3$ . Обчислюючи суми, одержимо:  $\bar{R}_u(0)=1+1+1=3$ ;  $\bar{R}_u(1)=1+1=2$ ;  $\bar{R}_u(2)=1$ ;  $\bar{R}_u(3)=0$ . Графік дискретної АКФ зображений на рис. 5.13. Бічні пелюстки АКФ лінійно зменшуються зі зростанням номера  $n$ . Отже, бачимо, що АКФ за формулою (5.44) відповідає різноманітним послідовностям з будь-яких дискретних сигналів за умови, що інтервали часу між імпульсами однакові.

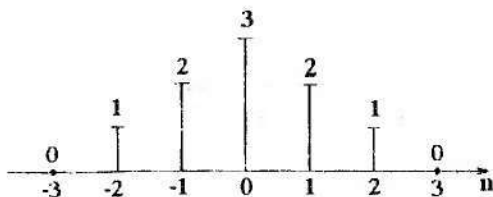


Рисунок 5.13 – АКФ дискретного сигналу

Взаємокореляційна функція двох дискретних сигналів

$$R_{uv}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j \cdot V_{j-n}. \quad (5.45)$$

Продемонструємо спосіб обчислення ВКФ на прикладі двох чотирипозиційних сигналів

$$U=\{1, 1, 1, -1\}, \quad V=\{1, 1, -1, 1\}.$$

Якщо  $n > 0$ , то сигнал  $V$  запізнюється щодо сигналу  $U$ .

Складемо таблицю, що містить сигнал  $U$  і послідовність зміщених копій сигналу  $V$

$U$	0	0	0	0	0	1	1	1	-1	0	0	0	0	0
$V$	0	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0	0	0
$V(n=1)$	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0	0
$V(n=2)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0
$V(n=3)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0
$V(n=4)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0

Обчислюючи за формулою (2.44) значення ВКФ, одержимо

$$R_{UV}(n=0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0;$$

$$R_{UV}(n=1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 3;$$

$$R_{UV}(n=2) = 0; \quad R_{UV}(n=3) = -1; \quad R_{UV}(n=4) = 0.$$

Аналогічно будуємо таблицю, що відбиває зміщення сигналу  $V(t)$  убік випередження:

$U$	0	0	0	0	1	1	1	-1	0	0	0
$V(n=0)$	0	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0
$V(n=1)$	0	0	0	1	1	-1	1	0	0	0	0
$V(n=2)$	0	0	1	1	-1	1	0	0	0	0	0
$V(n=3)$	0	1	1	-1	1	0	0	0	0	0	0

Знаходимо значення ВКФ

$$R_{UV}(0) = 0; \quad R_{UV}(-1) = 1; \quad R_{UV}(-2) = 0, \quad R_{UV}(-3) = 1.$$

Діаграма, що відображає функцію взаємної кореляції цих двох сигналів, зображена на рис. 5.14. Вона має різко несиметричний вигляд: максимум ВКФ досягається під час зміщення сигналу  $V(n)$  на одну позицію в бік запізнювання.

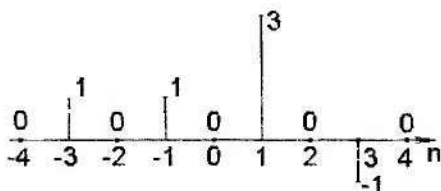


Рисунок 5.14 – ВКФ двох дискретних сигналів

### 5.4.3 Енергетичний спектр

Кореляційні функції залежать від часу. Їх можна відобразити за допомогою перетворення Фур'є в частотну область. При цьому одержимо енергетичний спектр  $W_U(\omega)$  сигналу і взаємний енергетичний спектр двох сигналів  $W_{UV}(\omega)$

$$W_{U}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_U(\tau) \cdot e^{-jw\tau} d\tau; \quad W_{U,V}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{U,V}(\tau) \cdot e^{-jw\tau} d\tau. \quad (5.46)$$

Можлива і зворотна ситуація. За допомогою зворотного перетворення Фур'є можна одержати значення кореляційних функцій

$$R_U(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_U(w) \cdot e^{jw\tau} dw; \quad (5.47)$$

$$R_{U,V}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{U,V}(w) \cdot e^{jw\tau} dw.$$

Енергетичний спектр сигналу  $W_U(w)$  і взаємний енергетичний спектр  $W_{U,V}(w)$  називають також автоспектральною щільністю потужності (АСЩП) і взаємоспектральною щільністю потужності (ВСЩП) відповідно.

Отже, між кореляційними функціями і спектральними щільностями потужності мають місце пряме і зворотне перетворення Фур'є (теорема Вінера-Хінчина)

$$\text{АКФ } R_U(\tau) \leftrightarrow W_U(w) \text{ АСЩП}; \quad (5.48)$$

$$\text{ВКФ } R_{U,V}(\tau) \leftrightarrow W_{U,V}(w) \text{ ВСЩП}.$$

Якщо сигнал  $U(t)$  характеризує деяку фізичну величину з розмірністю, наприклад, для напруги, в вольтах, то перетворення Фур'є для сигналу – амплітудний спектр – матиме розмірність В/Гц, а спектральна щільність потужності –  $B^2 / \text{Гц}$ .

З огляду на те, що  $R(\tau) = R(-\tau)$ , то  $W_U(w) = W_U(-w)$ , тобто енергетичний спектр є парною функцією. Ця обставина дає можливість записати співвідношення для  $R(\tau)$  і  $W_U(w)$  у такому вигляді:

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(w) \cdot \cos w\tau dw; \quad W_U(w) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cdot \cos w\tau d\tau. \quad (5.49)$$

Дуже важливе значення для розрахунків спектрів має рівність Парсеваля: енергетичний спектр (АСЩП) дорівнює квадрату амплітудного спектра  $F(jw)$ , поділеному на інтервал спостереження

$$W_{U}(j\omega) = \frac{|F(j\omega)|^2}{2T}. \quad (5.50)$$

Це дає можливість виконувати розрахунки за такими схемами:

$$\begin{aligned} U(t) \rightarrow F(j\omega) \rightarrow W_U(j\omega) \rightarrow R_U(\tau); \\ U(t) \rightarrow R_U(\tau) \rightarrow W_U(j\omega). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Однією з найважливіших характеристик спектра  $W(\omega)$  є його ефективна (енергетична) ширина. Ефективна ширина спектра випадкового сигналу – це характеристика випадкового процесу, яка чисельно дорівнює основі прямокутника, площа якого дорівнює площі під кривою  $W(\omega)$ , а висота дорівнює  $W_{\max}$  (рис. 5.15)

$$\Delta\omega = \frac{1}{W_{\max}} \cdot \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega = \frac{\sigma_x^2}{W_{\max}}. \quad (5.52)$$

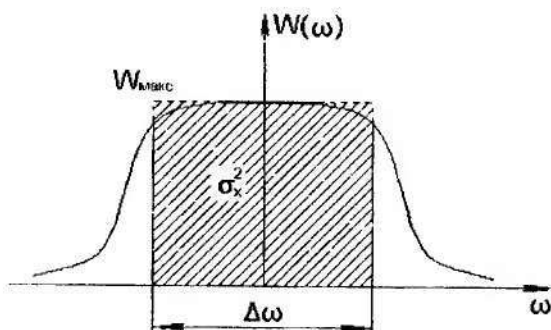


Рисунок 5.15 – Ефективна ширина енергетичного спектра

У цьому виразі  $W_{\max}$  є максимальним значенням спектральної щільності потужності (або енергетичного спектра), а  $\sigma_x^2$  – дисперсія випадкового процесу, причому

$$\sigma_x^2 = \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega. \quad (5.53)$$

що дозволяє розрахувати дисперсію  $\sigma_v^2$  усього за двома параметрами спектра:  $I'_{\text{макс}}$  і  $\Delta\omega$ . Вираз (5.54) описує залежність розкиду значень спектра від його ширини: чим ширше спектр, тим хаотичніше змінюються в часі його реалізації.

Іншою важливою чисельною характеристикою, яка широко використовується для оцінки швидкості зміни реалізацій випадкового процесу, є інтервал кореляції  $\tau_k$ . Інтервал кореляції визначається виразом

$$\tau_k = \frac{1}{R(0)} \cdot \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau. \quad (5.55)$$

Функція кореляції наближається до нуля з тимчасовим зміщенням. Чим швидше зменшується функція  $R(0)$ , тим менше статистичний зв'язок сигналу і його зміщення під час копіювання.

## 6 УЗАГАЛЬНЕНІ АЛГОРИТМИ АВТОМАТИЗОВАНОЇ ОБРОБКИ Й АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРОКАРДІОГРАМ

### 6.1 Основні складові обробки й аналізу електрокардіограм

В автоматизованому аналізі електрокардіограм (ЕКГ) виділяють ряд основних етапів перетворення інформації: знімання початкової інформації, попередня обробка (посилення, фільтрація, аналого-цифрове перетворення), аналіз ЕКГ (розпізнавання комплексів ЕКГ, контурний аналіз ЕКГ, аналіз ритму серця), додаткові види обробки (діагностичні процедури, кодування даних для інформаційно-пошукової служби та ін.).

Центральне місце в цьому ланцюзі перетворень займає контурний аналіз кардіосигналу.

Під *контурним аналізом* розуміють докладний розгляд одного або декількох кардіосигналів щодо форми ЕКГ і її окремих елементів.

Зараз відома велика кількість алгоритмів автоматичного контурного аналізу ЕКГ. Різноманітність алгоритмів визначається:

- специфікою завдань (діагностика серцево-судинних захворювань, моніторині спостереження за станом пацієнта, оцінка стану оператора, профілактичне обстеження та ін.);
- специфікою аналізу ЕКГ, що реєструється в стані спокою або під час навантаження;
- використанням різних систем відведень і методів одержання вторинного опису ЕКГ і його діагностичної інтерпретації;
- способами реалізації алгоритму (програмою для ЕОМ або у вигляді спеціалізованого обчислювального пристрою).

Специфіка завдань, які вирішуються під час аналізу ЕКГ, накладає свій відбиток насамперед на складність можливих алгоритмів обробки.

*При моніторному спостереженні* важлива оперативність одержання інформації, що призводить до широкого використання спрощених методів аналізу, які мають добру швидкодію. Для функціональної діагностики головне – точність і вірогідність результатів, тому тут можливо застосування дуже складних алгоритмів аналізу.

Обсяг інформації, укладеної в формі ЕКС, дуже великий. Для досить точного відновлення ЕКГ за дискретними відліками потрібно 200–500 відліків у секунду в кожному відведенні. У зв'язку з цим для діагностичної інтерпретації ЕКГ в окремих випадках застосовують “стиснутий” її опис, для чого виявляють різні електрокардіографічні ознаки і методи їх визначення.

Методи автоматичного визначення ознак можна розбити на три групи: а) методи вимірювання лікарських ознак; б) методи вимірювання формальних ознак; в) методи адаптивного квантування.

*Набір лікарських ознак* пов'язаний із сучасними уявленнями про електрофізіологію серця і відбиває основні моменти його електричного

збудження, що виявляються на ЕКГ у вигляді зубців Р, Q, R, S і Т. Лікарські ознаки характеризують амплітуду і тривалість кожного зубця, полярність, швидкість зміни, розщеплення, інтервали часу між зубцями.

У зв'язку з цим автоматизоване вимірювання лікарських ознак складається з двох етапів: розпізнавання характерних точок і вимірювання параметрів.

Характерними точками зубців ЕКГ є положення на часовій вісі їхнього початку, кінця й екстремальних значень.

Автоматизоване розпізнавання цих точок засновано на цифровому (чисельному) диференціюванні, часовій селекції, частотній фільтрації й амплітудній дискримінації.

Так, цифрове диференціювання і частотна фільтрація дозволяють визначити положення найбільш високочастотного елемента ЕКГ-комплексу QRS; часова селекція й амплітудна дискримінація – положення зубців Р і Т та ін.

Дрейф ізоліній, мережні наведення, артефакти обумовлюють значну зашумленість ЕКГ. Для підвищення завадостійкості застосовують смугову фільтрацію, усереднення кардіоциклів, детектування, межову логіку, методи теорії імовірностей і теорії випадкових процесів та інші підходи.

*Формальні ознаки ЕКГ* одержують у результаті побудови математичних моделей, які відображають амплітудно-часові й інші властивості самого сигналу, але не процеси його генерування. Для цього використовують розкладання ЕКГ за ортогональними або деякими спеціально підібраними функціями, наприклад, функціями Уолша, Лежандра, Ерміта, Чебишева. Ознаками ЕКГ у цьому випадку є коефіцієнти розкладання.

*Методи адаптивного квантування* призначені для зменшення обсягу початкової інформації під час автоматизованої обробки цифровими методами. Найбільш простий спосіб адаптивного квантування – використання різної частоти дискретизації для подання комплексу QRS, сегмента ST-T і P-Q. Інший спосіб наближеного опису сигналу – застосування кусково-лінійної апроксимації або апроксимації за допомогою сплайн-функцій.

Існує велика різноманітність математичних методів, які використовують під час контурного аналізу ЕКГ і заснованих на них обчислювальних алгоритмах. Розглянемо деякі з них.

## 6.2 Алгоритм виділення елементів електрокардіограм, їх групування й усереднення

Призначення алгоритму – впізнання комплексів (зубців) Р, QRS, Т, визначення їхніх меж, вершин зубців та інших особливих точок, а також вибір «типового» кардіоциклу для визначення параметрів електрокардіосигналу.

Метод ідентифікації комплексів ЕКГ будується за таким принципом:

1. Визначається знаковостійна скалярна функція  $D(t) = \Psi[\bar{W}(t)]$  векторного сигналу  $\bar{W}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ , така, що близька до нуля на

відрізку ізоелектричної лінії ЕКС і значно відхиляється від нуля на відрізках комплексів, і тим більше, чим більше швидкість зміни сигналу. Функція  $D(t)$  є інтегральним перетворенням початкових сигналів, які використовуються з метою зменшення впливу перешкод і для кращого відображення швидкості зміни сигналів.

2. Визначаються QRS-комплекси за допомогою порівняння  $D(t)$  з порогом.

3. На основі аналізу  $D(t)$  визначаються часові межі QRS-комплексів.

4. З виділених QRS-комплексів визначаються зони пошуку зубців Т і Р, після чого на основі аналізу значень  $D(t)$  впізнаються ці зубці та визначаються їхні межі.

5. Визначаються типові Р, QRS, Т-цикли.

Вихідними даними для розпізнавання елементів кардіоциклу є рівномірні відліки однієї групи ЕКС, дискретизовані з частотою 200, 400 або 500 Гц. Можливі варіанти запису ЕКС:

- 1) 12 стандартних відведень (4 групи по 3,7 с),
- 2) 12 стандартних і 6 додаткових відведень (за Франком і Небом);
- 3) довгі записи ЕКС для діагностики порушень ритму і провідності серця і група протягом 40 с).

Додаткові дані, що потребує програма ідентифікації – калібрований мілівольт для всіх каналів, кількість груп відведень, код варіанта запису ЕКГ.

Загальна схема алгоритму виділення, угрупування й усереднення елементів ЕКС наведена на рис. 6.1. Розглянемо її більш детально:

1. Числові дані деяких робочих констант і коефіцієнтів змінюються в залежності від частоти дискретизації (200, 400 або 500 Гц) ЕКС, що аналізуються; цей крок алгоритму наведений для визначення цих констант при конкретній частоті дискретизації.

2. Програма ідентифікації комплексів ЕКС має працювати в двох режимах у залежності від вимог споживача:

- ідентифікація комплексів ЕКС для синдромальної діагностики;
- ідентифікація комплексів ЕКС для діагностики порушень ритму і провідності серця (ПРПС).

3. Указується можливість підключення до даної програми окремих складових для ідентифікації комплексів у довгих записах для діагностики ПРПС.

4. Обчислення функції  $D(t)$ .

5. Виділення QRS зводиться до порівняння  $D$ -функції з порогом і аналізу тих відрізків ЕКС, у яких  $D$ -функція перевищує поріг. Складається список меж QRS-комплексів.

6. Уточнення меж комплексів QRS робиться за допомогою  $D$ -функції для усіх трьох каналів.

7. Під час групування QRS-комплексів (визначенні груп подібних комплексів) необхідно виконати такі операції:

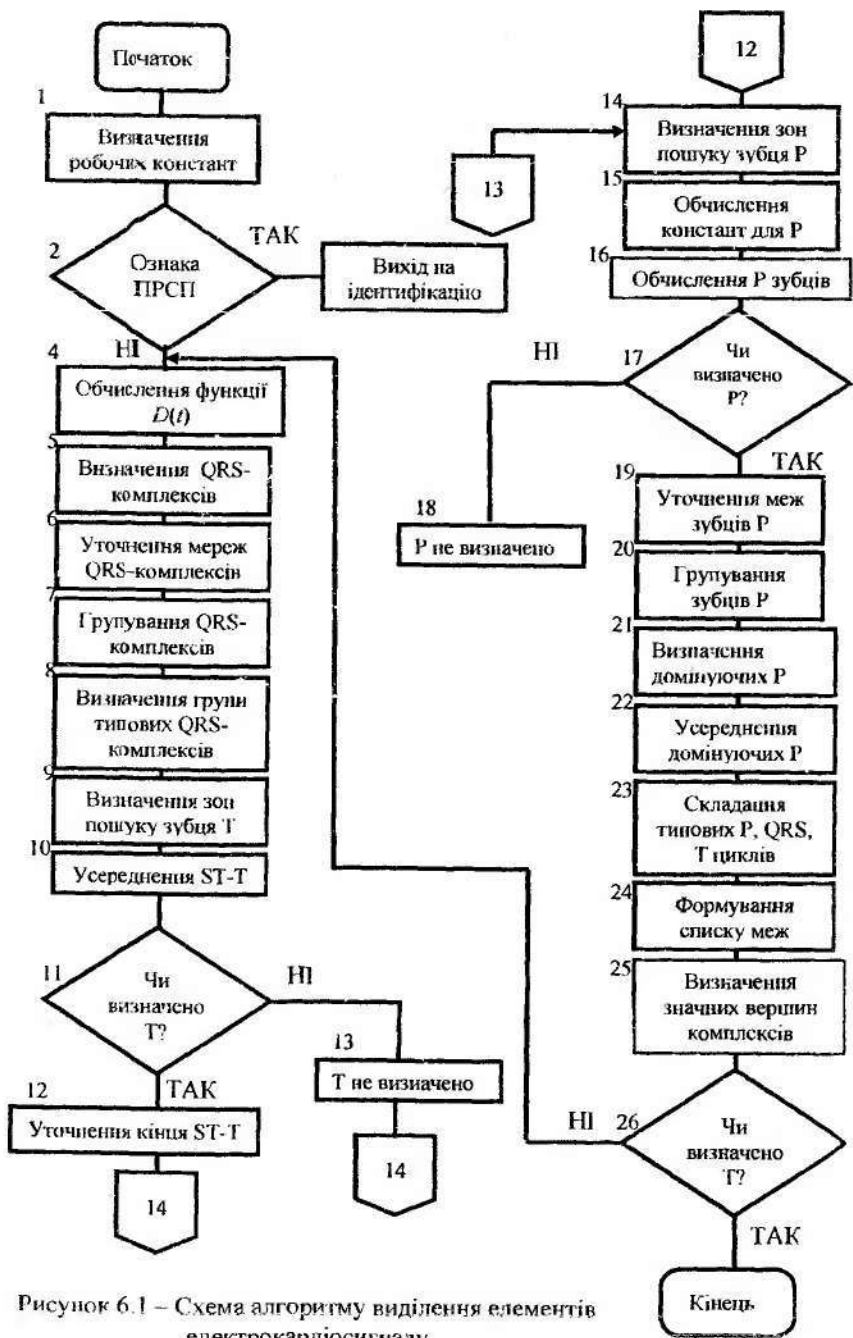


Рисунок 6.1 – Схема алгоритму виділення елементів електрокардіосигналу

а) скласти опис  $m$ -го QRS-комплексу. Для  $m$ -го QRS-комплексу з відрізка тривалістю 20 мс перед початком QRS обчислюються орієнтовані ізоелектричні рівні  $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$  каналів 1, 2, 3. Вектор  $Y_m$  має складові  $\hat{Y}_m = (\bar{Y}_m^{(1)}, \bar{Y}_m^{(2)}, \bar{Y}_m^{(3)})$ .

Тут  $\bar{Y}_m^{(1)}, \bar{Y}_m^{(2)}, \bar{Y}_m^{(3)}$  – вектори опису  $m$ -го QRS-комплексу всіх трьох каналів. Складові цих векторів – це відведення ординат ЕКС рівнів  $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ ;

б) обчислити коефіцієнти кореляції  $\rho_{ij}$  векторів

$$\bar{Y}_i = (\bar{Y}_i^{(1)}, \bar{Y}_i^{(2)}, \bar{Y}_i^{(3)}) \text{ і } \bar{Y}_j = (Y_j^{(1)}, Y_j^{(2)}, \bar{Y}_j^{(3)}): \rho_{ij} = \min_k \rho_{ik}; k=1,2,3,$$

$$\text{де } \rho_{ij} = \frac{\bar{Y}_i^{(k)} \cdot \bar{Y}_j^{(k)}}{\left| \bar{Y}_i^{(k)} \right| \left| \bar{Y}_j^{(k)} \right|}, \left| \bar{Y}_i^{(k)} \right| = \sqrt{\bar{Y}_i^{(k)} \cdot \bar{Y}_i^{(k)}}.$$

Спочатку перший комплекс QRS утворить першу групу. Нехай переглянуто  $m-1$  QRS-комплексів і складено  $G$  груп ( $g=1, 2, 3, \dots, G$ ). Тоді для  $n$ -го QRS-комплексу обчислюється  $\rho_{gn}$  і обирається  $\rho_{gm} = \max \rho_{gm}$ .

Якщо  $\rho_{gm} > \rho_0$ , де  $\rho_0$  – пороговий коефіцієнт кореляції, то  $m$ -й QRS-комплекс включається в групу  $g^*$  (група, з якої була максимальна кореляція).

Якщо  $\rho_{gm} \leq \rho_0$ , то утворюється нова група з номером  $g^* = G+1$ . Після групування зберігаються середні вектори груп  $\bar{V}_g = \frac{1}{n_g} \cdot \sum \bar{V}_g$ , де  $n_g$  – кількість комплексів у групі  $g$  (синхронні QRS-комплекси вважаються як один), а сумарний вектор групи  $\sum \bar{V}_g$  обчислюється щоразу при влученні в цю групу нового комплексу

$$\sum \bar{V}_g^* = \sum \bar{V}_g + \bar{V}_m.$$

8. Група типових QRS-комплексів в основному визначається, спираючись на чисельність груп. Як правило, такою є група з максимальним  $n_g$ . Якщо таких груп декілька (з однаковими  $n_g$ ), то критерієм вибору домінуючої серед них стає середня тривалість QRS-комплексів у групі.

9. Зона пошуку зубця T устаююється за допомогою формули Базета. при цьому, спочатку обчислюється середня тривалість інтервалу R-R- $T_{RR}$ , а далі за формулою Базета визначається тривалість QT:  $T_{QT} = K \cdot \sqrt{T_{RR}}$ .

В алгоритмі обране значення ДО = 0,45, щоб в усіх випадках цілком перекрити весь фрагмент ST-T.

10. За цим кроком виконуються усереднення ST-T, яке впливає за домінуючим QRS. Якщо в межах, що установлені за попереднім пунктом, виявляється початок наступного QRS, такий ST-T пропускається. Для укладання векторів опису ST-T використовуються ізоелектричні рівні  $a^{(1)}$ ,  $a^{(2)}$ ,  $a^{(3)}$ , як і для QRS-комплексів. Ці ST-T накопичуються в сумарний вектор  $\sum \bar{V}_{ST-T}$  і обчислюється усереднений вектор

$$\bar{V}_{ST-T} = \frac{1}{n_{ST-T}} \cdot \sum \bar{V}_{ST-T}$$

Для усереднення вектора TS-S обчислюється нова послідовність D-функції.

11. У зворотний бік від кінця ST-T шукається відрізок, де D-функція перевищує межове значення. Якщо по всій довжині ST-T він не знаходиться, то вважається, що зубець T відсутній.

12. Із точки кінця відрізка, встановленого в пункті 11, проводиться уточнення ST-T за допомогою D-функції і переформується вектор  $\bar{V}_{ST-T}$ .

13. У випадку відсутності зубця T у список меж комплексів заноситься код "T не визначений".

14. Процедура ідентифікації зубця P здійснюється в частинах ЕКС, які передують домінуючим QRS-комплексам до кінця попереднього ST-T.

15. Межові значення D-функції, за допомогою яких здійснюється пошук зубців P, обчислюються з обліком зашумлення в інтервалі пошуків зубців P.

16. Визначаються «можливі» P-зубці за допомогою порога, обчисленого за пунктом 15. Після цього за спеціальним тестом усувається частина складних P-зубців, що можуть бути визначені як P-зубці через шум і артефакти.

17, 18. Якщо після тестування усуваються всі «можливі» зубці P, у список меж комплексів записується код «P не визначений».

19. Уточнення меж «можливих» P-зубців робиться аналогічно QRS-комплексу.

20. Групування зубців P здійснюється, як і для QRS-комплексів, тільки не потрібно наново перераховувати ізоелектричні рівні. Крім того, в одну групу можуть потрапити тільки ті P-зубці, для яких інтервали P-Q розрізняються не більше ніж 30%.

21. Найбільш чисельна група вказує на домінуючий P-зубець, тобто справжній, оскільки в даному алгоритмі вважається, що в кардіоциклі можливий один P-зубець.

22. Результатом ідентифікації P-зубця є усереднений вектор P із домінуючої групи.

23. На основі середніх тривалостей типових P, QRS, ST-T і інтервалів P-Q, R-R, із середніх векторів P, QRS, ST-T формується типовий для даної групи ЕКС кардіоцикл.

24. Формується масив меж комплексів, який має назву «список меж».

25. За визначеним алгоритмом в типовому кардіоциклі виділяються особливі точки комплексів і зубців – вершини, перегини, розщеплення та ін. Цей масив (список вершин) також використовується програмою для вимірювання ознак.

Результатом алгоритму виділення елементів ЕКГ, їх угруповання й усереднення є:

- 1) рівномірні відліки типового кардіоциклу з такою самою частотою дискретизації, як і початкові дані;
- 2) масиви вершин типового кардіоциклу; кількість масивів  $3 \cdot G$ , де  $G$  – кількість груп відведень;
- 3)  $3 \cdot G$  масивів меж P, QRS, ST-T у типових кардіоциклах.

### 6.3 Алгоритм розпізнавання характерних точок електрокардіосигналу

Обробку ЕКС ми розуміємо як знаходження характерних точок, що відповідають фізіологічним змінам серцево-судинної системи (ССС). Є ряд підходів щодо виділення і розпізнавання характерних точок ЕКС за допомогою ЕОМ. В одних випадках характерні точки виділяються в кожному кардіоциклі протягом визначеного інтервалу часу, в інших – аналізується усереднений або зібраний, так званий, представницький кардіоцикл. Але в усіх випадках для окремого кардіоциклу застосовується спеціальний алгоритм аналізу. Нижче розглядається алгоритм, який із невеликою адаптацією придатний для будь-якого кардіоциклу, у якого основна частота спектра знаходиться в області низьких частот, наприклад, реограм, сфінгограм, алекскардіограм. Оскільки робота ССС має циклічний характер, алгоритм аналізу однаковий для кожного циклу, тільки потрібні опорні точки його початку. Ці точки можна знайти з ЕКГ. Для надійної роботи алгоритму потрібні апріорні знання про сигнал: місцезнаходження в кардіоциклі характерних точок і форма сигналу в їхньому okolí.

В розглянутому алгоритмі немає складних обчислень, що робить його ручним для реалізації в мікропроцесорних аналізаторах.

#### 6.3.1 Постановка завдання

Для кардіосигналу  $f(t)$  нам відомі моменти початку кардіоциклу. Початок  $j$ -го кардіоциклу –  $t_j$ . В інтервалі часу  $[t_j, t_{j+1}]$  потрібно знайти  $n$  характерних точок  $f(t_j^k)$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $t_j^k \in [t_j, t_{j+1}]$ .

Під час автоматизованої обробки сигнал  $f(t)$  дискретизується з інтервалом  $\Delta t = const$  між відліками. Одержуємо дискретний сигнал  $x(i)$ , що для  $t = \Delta t \cdot i$  задовольняє  $f(t) = x(i)$ . Це означає, що в точках дискретизації сигнали збігаються. Початку кардіоциклів відповідають відліки  $x(i_j)$ , де  $i_j \in Q$ ,

$Q = \{i_j : (\Delta t \cdot i_j - t_j) < \Delta t / 2\}$ . Потрібно знайти відліки  $x(t_j^k)$ , що відповідають характерним  $f(t_j^k)$ ,  $i_j^k \in x^k$  точкам,

$$\text{де } x^k = \{i_j^k : 1 \leq k \leq n, i_j^k \leq i_{j+1}^k, i_j \in Q, (\Delta t \cdot t_j^k - t_j^k) < \Delta t / 2\}$$

### 6.3.2 Алгоритм визначення характерних точок

Виходитимемо з припущення, що характерні точки – це локальні екстремуми або сигналу  $f(t)$ , або його другої похідної  $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ .

З цього припущення випливає, що потрібно виділяти характерні точки визначених типів (рис. 6.2).

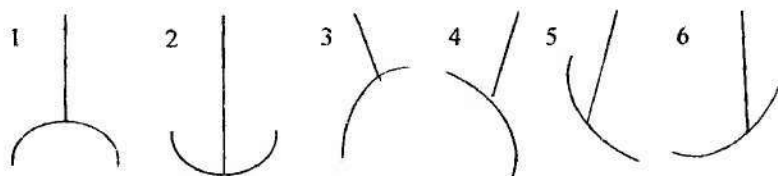


Рисунок 6.2 – Типи характерних точок, що виділяє алгоритм

Для визначення вигину сигналу даних 6 типів можемо скласти таблицю розв'язань (табл. 6.1).

Таблиця 6.1 – Розв'язання для визначення вигинів

тип вигину \ Ознака	$f$ екстремум	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ екстремум	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$\frac{df(t)}{dt}$
1	max	–	–	–
2	min	–	–	–
3	–	min	<0	>0
4	–	min	<0	<0
5	–	max	>0	<0
6	–	max	>0	0

Під час обробки деяких сигналів протягом кардіоциклу потрібно розпізнати точки однакових типів. Крім того, в практиці зустрічаються зазначені на рис. 6.2

вигини сигналу, що не містять характерних точок. Тому розв'язань, які наведені у таблиці, недостатньо для виконання завдання, що поставлене.

Впроваджено додатковий критерій, який спирається на апріорні знання про характерні точки конкретного сигналу. Оскільки характерні точки протягом кардіоциклу з'являються з визначеними закономірностями, можна, спираючись на експериментальні дані, обчислити приблизний момент часу  $t_j^k$  появи характерної точки. В наведеному алгоритмі  $t_j^k$  обчислюється за допомогою регресійного рівняння

$$t_j^k - t_j = \alpha^k (t_j - t_{j+1}) + \beta^k,$$

де  $\alpha^k$  – коефіцієнт регресії;  $\beta^k$  – константа перетинання для  $k$ -ї характерної точки.

Тепер вже можна сформулювати правило для визначення  $k$ -ї характерної точки в  $j$ -му кардіоциклі  $t_j^k$ : це момент часу  $t$ , для якого  $|t - \bar{t}_j^k| = \min_{t \in A^k} |t - t'|$ , де  $A^k$  – сукупність моментів  $t$ , для яких виконані всі умови рядка таблиці розв'язань, що відповідає  $k$ -й характерній точці. Експеримент показав, що кращий результат дає мінімізація не  $|t - t'|$  для  $\forall t \in A^k$ , а вираз

$$\left| t - \bar{t}_j^k \right| + \gamma^k \left| \frac{df}{dt} (t - 2\Delta t) \right| + Z \left| \frac{df}{dt} (t + 2\Delta t) \right|,$$

для  $\forall t \in A^k$ .

У цьому виразі враховується крутість вигину сигналу в околі розглянутого моменту часу.

Тут  $\gamma^k = \gamma(k, f)$ ;  $A^k = A(k, f)$ .

Тепер запишемо ці поняття для дискретизованого сигналу.

Для кожного відліку обчислюємо  $\frac{df(t)}{dt}$  і  $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$  за виразами

$$x^{(1)}(i) = \frac{1}{2\Delta t} (x(i+1) - x(i-1));$$

$$x^{(2)}(i) = \frac{1}{6(\Delta t)^2} (x(i-3) + x(i-2) - x(i-1) - 2x(i) - x(i+1) + x(i+2) + x(i+3)).$$

Аналог таблиці розв'язань поданий у табл. 6.2.

Таблиця 6.2 – Повні розв'язання для визначення точок

Ознака тип вигину	$f$ екстремум	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ екстремум	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$\frac{df(t)}{dt}$
1	2	3	4	5
i	$x(i+1) < x(i)$ $x(i+1) < x(i)$	-	-	-
2	$x(i+1) > x(i)$ $x(i+1) > x(i)$	-	-	-
3	-	$x^{(2)}(i-1) > x^{(2)}(i)$ $x^{(2)}(i+1) > x^{(2)}(i)$	$x^{(2)}(i) < 0$	$x^{(1)}(i) > 0$
4	-	$x^{(2)}(i-1) < x^{(2)}(i)$ $x^{(2)}(i+1) > x^{(2)}(i)$	$x^{(2)}(i) < 0$	$x^{(1)}(i) < 0$
5	-	$x^{(2)}(i-1) < x^{(2)}(i)$ $x^{(2)}(i+1) < x^{(2)}(i)$	$x^{(2)}(i) > 0$	$x^{(1)}(i) < 0$
6	-	$x^{(2)}(i-1) < x^{(2)}(i)$ $x^{(2)}(i+1) < x^{(2)}(i)$	$x^{(2)}(i) > 0$	$x^{(1)}(i) > 0$

Відлік  $x(i)$  буде визнаний  $k$ -ю характерною точкою  $j$ -го кардіоциклу, тобто, якщо він задовольняє всім умовам відповідного рядка таблиці розв'язань і при цьому мінімізує вираз

$$i - \alpha^k (i_j - i_{j-1}) - \frac{\beta^k}{\Delta} + \gamma^k |x^{(1)}(i-2)| = z^k |x^{(1)}(i+2)|,$$

де  $i_j \in Q$ ,  $i_j \leq i \leq i_{j+1}$ .

Коефіцієнти  $\gamma^k$  і  $z^k$  підбираються в залежності від сигналу й особливостей характеристики  $k$ -ї точки.

Описаний алгоритм був реалізований під час обробки апекскардіограми (АКГ). На рис. 6.3 поданий типовий кардіоцикл АКГ з позначеними характерними точками. Досліджено залежність характерних точок від довжини кардіоциклу. Для точок А, Е, Е1, О і F результати регресійного аналізу даних

подані в табл. 6.2. Для точки К точності визначення  $t_j^k$  за допомогою попереднього кардіоциклу недостатньо. В цьому випадку слід вибрати  $t_j^k > t_{j+1}^k$ .

Оброблювані сигнали дискретизувались із частотою 250 Гц:  $\Delta t = 0,004$  с. Амплітуда дискретизованого сигналу була нормована від 0 до 2000.

За наведеними даними форми АКГ на рис. 6.3 в околі характерних точок під час реалізації алгоритму використовувалися константи, подані в табл. 6.3.

Таблиця 6.3 – Значення констант для алгоритму

const X, T	$\alpha^k$	$\frac{\beta^k}{\Delta t}$	$\gamma^k$	$\zeta^k$
A	0	5	0,3	0
E	0,043	16	0	0,2
E1	0,164	50	0,2	0
O	0,209	70	0	0
F	0,207	84	0	0
a	0	400	0	0,1

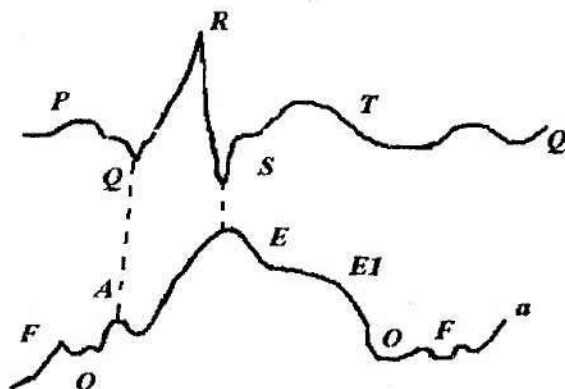


Рисунок 6.3 – Типовий кардіоцикл апекскардіограми з характерними точками

#### 6.4 Алгоритм виділення характерних точок на ЕКГ

Розглядається алгоритм виділення точок, які відповідають початкам, кінцям і вершинам P, Q, R, S, T зубців ЕКГ. Під час встановлення діагнозу лікарем ці точки відшукуються на ЕКГ візуально в процесі розшифровки. Такий метод може бути використаний з метою одержання вхідної інформації для алгоритму діагностики під час роботи в діалоговому режимі на персональному комп'ютері.

Для повної автоматизації процесу діагностики пропонується до розгляду алгоритм пошуку і виділення на ЕКГ необхідних характерних точок.

Алгоритм виділяє на ЕКГ такі точки: знаходження комплексу QRS; початку Q-зубця; вершини R-зубця; вершини і кінця S-зубця; початку, вершини і кінця T-зубця; початку P-зубця. Крім того, алгоритм визначає полярність P-зубців і здійснює згладжування високочастотних шумів, які можуть бути зафіксовані під час запису в ЕКГ.

Вхідною інформацією для роботи алгоритму є послідовні значення ординат ЕКГ, обмірjовані через інтервали часу  $\Delta t = 1/FB = 1/2F_g$ , де  $F_g$  – частота дискретизації;  $FB$  – верхня частота спектра ЕКГ. Вважаємо, що ЕКГ задана в  $N$ -точках у моменти часу  $n\Delta t$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

#### 6.4.1 Опис алгоритму

1. Попереднє згладжування високочастотних шумів ЕКГ досягається цифровою фільтрацією послідовності значень ординат ЕКГ фільтром п'ятого порядку по 11 точках так, що кожна ордината ЕКГ на виході цифрового фільтра підраховується за формулою

$$Y[nT] = -\{36[y(nT-5T) + y(nT+5T)] + 9[y(nT-4T) + y(nT+4T)] + \\ + 44[y(nT-3T) + y(nT+3T)] + 69[y(nT-2T) + y(nT+2T)] + \\ + 84[y(nT-T) + y(nT+T)] + 89y(nT)\} \cdot 1/429.$$

2. Пошук місця знаходження комплексів QRS: як точки  $x$  комплексу QRS ( $xQRS$ ) обираються точки на ЕКГ з великим значенням похідної. Якщо число  $NQRS$  таких точок на ЕКГ менше трьох, то ЕКГ бракується.

3. Пошук вершин зубців R: як точки  $x$ , що відповідають вершинам зубців R, обираються точки максимуму ЕКГ, які знаходяться поблизу точок  $xQRS$ .

4. Пошук початку зубців Q: як точки  $x$ , що відповідають початкам зубців Q, обираються точки, в яких починається підйом ЕКГ під час руху по ЕКГ вправо до точки  $x$ .

5. Пошук кінця зубців S: як точки  $xk$ , що відповідають кінцям зубців S, обираються точки, в яких досягаються або малі зміни похідної ЕКГ під час руху вправо від точки  $xQRS$ , або ці точки є точками перегину ЕКГ під час зростання її від точки QRS. Якщо знайдена точка знаходиться занадто далеко від попередньої їй точки  $x$ , то така точка бракується.

6. Пошук вершин зубців S: як точки  $x$ , що відповідають вершинам зубців S, обираються точки, в яких досягається мінімум ЕКГ в інтервалі  $[xR, xkS]$ .

7. Пошук вершин зубців T: як точки  $xT$ , які відповідають вершинам зубців T, обираються точки ЕКГ, максимально віддалені від  $QQ$ -лінії рівня між точками ЕКГ із координатами  $x$ , усередині яких знаходиться даний T-зубець.

8. Пошук початків зубців T: як точки  $xNT$ , які відповідають початкам зубців T, обираються точки ЕКГ, у яких починається підйом ЕКГ під час руху вправо від

точки  $xkS$  до найближчої точки  $xT$ . Якщо точка  $xNT$  не знайдена, то ЕКГ бракується.

9. Пошук кінців зубців Т: як точки  $xkT$ , які відповідають кінцям зубців Т, обираються точки кінця спаду ЕКГ під час руху вправо від точки  $xT$ .

10. Пошук початків зубців Р: зубці Р за розташуванням і полярністю розбиті на такі групи:

1) позитивні зубці Р, що знаходяться в інтервалі  $[xkT, xQ]$ : як початок таких зубців  $xPP$  обираються точки, в яких починається локальний максимум ЕКГ, що перевищує 0,03 мВ, а ширина цього максимуму знаходиться у межах  $0,06 \div 0,18$ с.

2) негативні зубці Р, які знаходяться в інтервалі  $[xkT, xQ]$ : як початок таких зубців  $xMP$  обираються точки, які знаходяться поблизу точки  $x, Q_y$ , з яких починається локальний мінімум ЕКГ, що перевищує 0,03 мВ; при цьому на інтервалі  $[xkT, xQ]$  не має бути точок  $xPP$ , а ширина локального мінімуму ЕКГ знаходиться у межах 0,06–0,18с.

3) позитивні зубці Р, які знаходяться в інтервалі  $[xQ, xR]$ : як початок таких зубців  $xP1P$  обираються точки зміни знака другої похідної ЕКГ на цьому відрізку, а перепад розміру ЕКГ у точках  $xP1P$  і  $xQ$  більше 0,03 мВ; при цьому перед точкою  $x$  не має бути точки  $xPP$  і  $xMP$ , а ЕКГ на цьому відрізку має знаходитись вище лінії  $QQ$ .

4) негативні зубці Р, які знаходяться в інтервалі  $[xkR, xNT]$ : як початок таких зубців  $xM1P$  обираються точки початку локальних мінімумів, у яких відхилення від лінії, що з'єднає точки ЕКГ з абсцисами  $xNT$  і  $xNT$ , перевищує 0,03 мВ, при цьому поблизу відповідної точки  $xQRS$  відсутні точки  $xPP$ ,  $xP1P$ ,  $xMP$ , а ширина локального мінімуму ЕКГ знаходиться межах  $0,06 \div 0,18$ с.

5) позитивні зубці Р ( $xP2P$ ), які знаходяться в інтервалі  $[xkR, xNT]$ .

Пошук характерних точок проводиться так, що перший з останніх комплексів QRS, із числа виділених на цій ЕКГ, використовуються як опорні та характерні для них точки, крім точок  $xQRS$ , не відшукуються. Крім того, характерні точки  $xPP$ ,  $xP1P$ ,  $xP2P$ ,  $xMP$ ,  $xM1P$  не відшукуються і для іншого комплексу QRS.

## 6.5 Алгоритм вимірювання комплексу параметрів електрокардіо-сигналу

Алгоритм вимірювання комплексу параметрів ЕКС (АВП), призначений для визначення лікарських ознак ЕКС-амплітуд і тривалостей зубців, тривалостей деяких інтервалів, форми ряду зубців та інтервалів у 12 загальноприйнятих відведеннях і в ортогональних відведеннях за Франком.

Вхідними або початковими даними для алгоритму є такі: 1) ЕКС, поданий відліками; 2) часові позначки початку і кінця комплексу; 3) часові позначки екстремумів і деяких особливих точок комплексу; 4) значення каліброваних сигналів; 5) додаткові дані про пацієнта.

Результати роботи АВП відтворені в таблиці лікарських ознак, в яких знаходиться список вимірюваних відведень і додаткові показники.

Загальна схема алгоритму вимірювання параметрів наведена на рис. 6.4.

В алгоритмі передбачена можливість додаткового вступу програми вимірювання ознак для аналізу порушення серцевого ритму. Алгоритм має вимірювати ознаки ЕКС у 12 загальноприйнятих і 6 додаткових відведеннях (УЗР, У7, У8, 3 відведення за Небом). Додатково вимірюються і обчислюються такі показники:

а) ординати зубця Р, що відповідають  $0,025c$ ,  $0,045c$ ,  $0,075c$  від початку їх збудження і співпадають за часом у кожній тріаді відведення;

б) ординати комплексу QRS через кожні  $0,01c$ , що збігаються в кожній тріаді відведень за часом;

в) ординати RT-T від точки з'єднання R(S) із сегментом R(S)-T через кожні  $0,02c$ , що збігаються в кожній тріаді відведень за часом;

г) обчислюються площі QRS, ST, T,  $QRS_{1104,0,04}$ ,  $QRS_{0,04}$  кнВ; Р;

д) обчислюються розміри кутів, які визначають напрямок моментних та інтегральних векторів у фронтальній і горизонтальній площинах.

Далі визначаються лікарські ознаки для кожного відведення в тріаді:

1. Проведення ізоелектричної лінії зводиться до визначення її рівняння.

Для вимірювання зубця Р ізолінія проводиться через початкову точку зубця з кутовим коефіцієнтом  $\mu = 0$ . Якщо зубець відсутній, то ізолінія не проводиться. Рівняння ізолінії зубця Р:  $y_p(t) = b_p$ , де  $b_p$  – значення ординати точки початку зубця Р.

Для вимірювання ознак комплексу QRS, сегмента ST і зубця Т ізолінія проводиться через початкові точки комплексу QRS з обраного кардіоциклу і наступного за ним комплексу QRS. Рівняння QRS ізолінії

$$y_Q(t) = K_Q t + b_Q,$$

де  $K_Q = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$ ,  $b_Q = y_1 - K_Q \cdot t_1$ ,  $t_1$ ,  $y_1$  – часове й амплітудне значення

початку комплексу QRS з обраного кардіоциклу;  $t_1$ ,  $y_1$  – ті самі параметри для наступного комплексу.

2. Аналіз зубця Р.

Складається список координат особливих точок зубця Р (межі зубця в часі або точки перетинання з ізолінією). Потім проводиться уточнення меж зубця, починаючи від точки  $i=1$ . Початок зубця переноситься з точки  $t_i$  в точку  $t_{i+1}$ , якщо  $|y_{i+1}| \leq \alpha_1$ ,  $\alpha_1 = 0,025$  мВ.

3. Аналіз зубця Т.

Ознаки зубця Т вимірюються в залежності від кількості хвиль і кількості вершин у кожній хвилі. Для зубця Т вимірюються такі ознаки: амплітуди Т, Т1; тривалість QT і симетричність зубця. Симетричність зубця Т визначається за значенням кутів Т1, Т2. Для обчислення значень Т1 і Т2 вправо і вліво від вершини Т визначаються 10 точок на зубці Т, узятих з постійним кроком. Методом найменших квадратів через ці групи точок проводяться дві апроксимуючі прямі

$$y = K^{(k)} t + b^{(k)} \quad y = K^{(a)} t + b^{(a)}$$

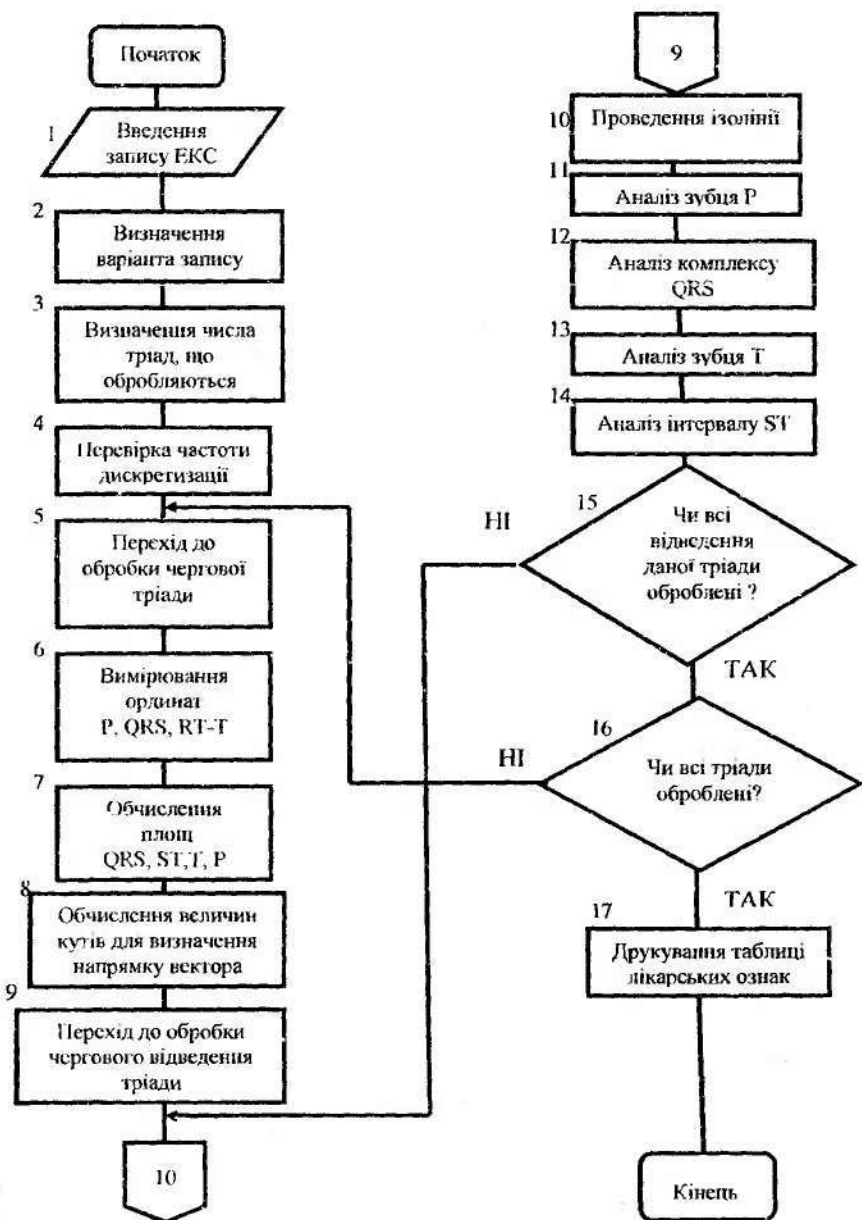


Рисунок 6.4 Схема алгоритму вимірювання комплексу параметрів ЕКГ

За кутовими коефіцієнтами цих прямих визначаються кути:

$$T_1 = 90^\circ - \arctg |K^{(k)}|; \quad T_2 = 90^\circ - \arctg |K^{(a)}|.$$

#### 4. Аналіз сегмента ST.

Аналіз сегмента ST зводиться до вимірювання ознак  $ST_1, ST_2, ST_3, ST_4$ :

$ST_1$  – зміщення точки з'єднання QRS і сегмента ST;

$ST_2, ST_3, ST_4$  – відхилення в точках на відстані 0,04с, 0,08с, 0,12с від точки  $ST_1$ . Амплітуди вимірюються в мілівольтах, тривалості – в секундах, кути – в градусах.

За відсутності у вихідних даних меж зубців P і T ознаки зубців не вимірюються, а за відсутності меж комплексу QRS не проводиться вимірювання ознак даного відведення.

В блоках «Перехід до обробки чергової тріади» і «Перехід до обробки чергового відведення» здійснюється зміна лічильників, а також адрес вихідних даних і результатів.

### 6.6 Алгоритм синдромального аналізу ЕКГ

Цей алгоритм призначений для аналізу й інтерпретації змін одного кардіоциклу ЕКГ і дає можливість одержати практично всі ЕКГ-висновки, що використовують кардіологи в клінічній практиці з детальним описом найбільш можливих клінічних синдромів – інфаркту міокарда, гіпертрофії шлуночків, внутрішлуночкових блокад.

Алгоритми синдромального аналізу ЕКГ складаються з двох частин – медичних параметрів одного кардіоциклу ЕКГ, обмірюваних за дванадцятьма загальноприйнятими відведеннями, і деяких даних про пацієнта – вік, стать, тиск, використання медикаментів, які значно впливають на ЕКГ. У розглянутому алгоритмі застосовується близько 30 параметрів одного кардіоциклу ЕКГ, які враховують амплітуду, тривалість, а також форму деяких елементів ЕКГ.

Процес класифікації ЕКГ розбитий на безліч етапів, результатом кожного з яких є висновок або група висновків.

Було вирішено не проводити аналіз у тих випадках, коли частота серцевого ритму перевищує 150 уд/хв, оскільки при такій частоті автоматично розпізнати ЕКГ важко, і можуть бути допущені грубі помилки під час викладу параметрів ЕКГ. Вирішено не проводити аналіз також у тих випадках, коли розпізнане й обмірюване тільки одне відведення. Алгоритм контурного аналізу не буде пристосований для аналізу гедіатричних ЕКГ, коли вік пацієнта менше 15 років. Не слід продовжувати аналіз у тих випадках, коли переплутані електроди або є інші деструкції.

Подальші відмови продовжувати аналіз передбачені за наявності синдрому передчасного порушення шлуночків, а також повної блокади лівої ніжки Гісова пучка. За наявності згаданих електрокардіографічних синдромів практично неможливо виявити ознаки деяких інших синдромів, наприклад, ішемічні зміни ЕКГ. Схема алгоритму синдромального аналізу наведена на рис. 6.5.

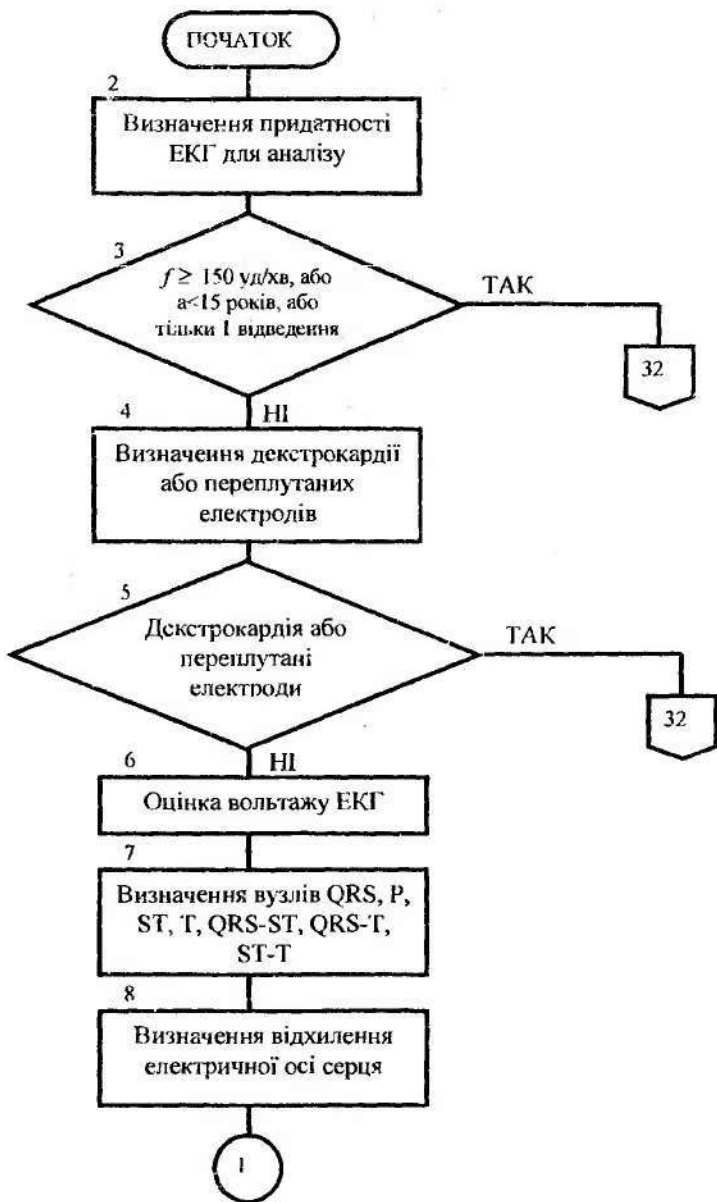
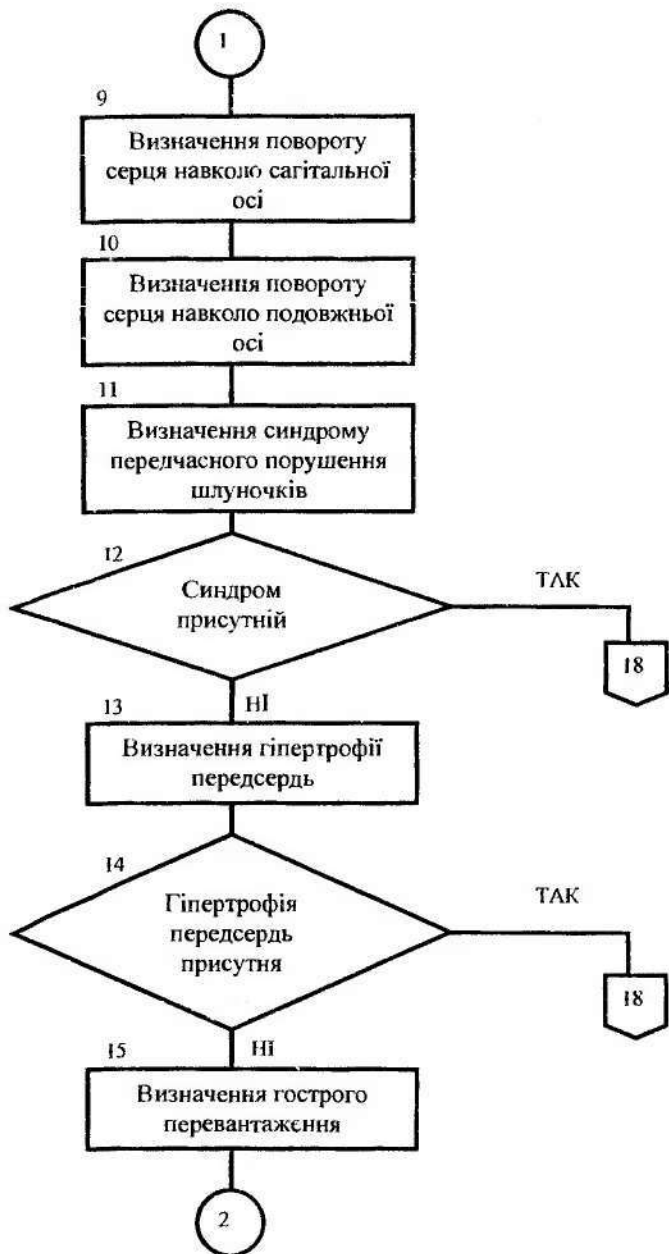


Рисунок 6.5 - Схема алгоритму синдромального аналізу ЕКГ



Продовження рис. 6.5



Продовження рис. 6.5



Продовження рис. 6.5

### 7.1 Механізм виникнення аритмій

Для аритмій характерні такі ознаки:

- 1) зміна частоти серцевих скорочень (ЧСС) вище або нижче нормальної межі коливань (60–90 скорочень у хвилину);
- 2) нерегулярність ритму серця;
- 3) зміна локалізації джерела порушення (водія ритму), тобто будь-який несинусовий ритм;
- 4) порушення провідності електричного імпульсу за різними частинами провідної системи серця.

У практичній електрокардіографії, як правило, зустрічаються сполучення двох, трьох або чотирьох цих ознак.

Всі аритмії є результатом зміни основних функцій серця: автоматизму, збудливості та провідності.

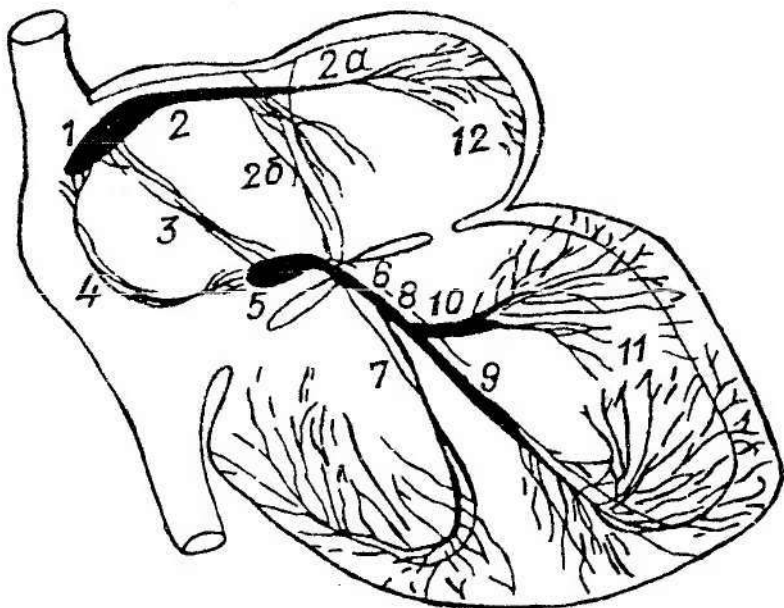
Механізм появи аритмій умовно можна розділити на дві групи.

Перша: порушення ритму, викликані ослабленням автоматизму основного водія ритму – синусового вузла, й у зв'язку з цим посиленням автоматизму і збудженням нижче розташованих частин провідної системи (рис.7.1).

Друга: порушення проведення (проходження) синусового імпульсу, його уповільнення або зупинка на будь-якому відрізку провідної системи серця: від синусового вузла до передсердь, всередині передсердь, від передсердь до шлуночків і всередині шлуночків. У наслідку цього виникають блокади – синоаурикулярна (СА), атріовентрикулярна (АВ), внутрішньошлуночкова.

Крім того, існує порушення ритму, при якому в міокарді функціонують два незалежних водії ритму – парасистолія. Один з осередків автоматизму, як правило, синусовий, а другий – гетеротропний, частіше за все розташований у шлуночках. Гетеротропний осередок імпульсації при парасистолії захищений від проникнення імпульсів основного (синусового) ритму так званою блокадою входу. Цей парасистолічний центр безупинно генерує імпульси, але вони викликають порушення і скорочення міокарда лише тоді, коли знаходяться його поза фазою порушення, викликаного основним джерелом ритму.

Отже, порушення ритму можуть бути пов'язані зі зміною самого синусового вузла або утворень (гетеротропні аритмії), що небажано, а деякі ритмії обумовлені зміною різних частин провідної системи і міокарда.



1. Синусний вузол.
2. Передній міжвузловий шлях з двома розгалуженнями: 2а – пучок до лівого передсердя; 2б – пучок до міжпередсердньої перетинки і атріовентрикулярного вузла.
3. Середній міжвузловий шлях.
4. Задній міжвузловий шлях.
5. Атріовентрикулярний вузол.
6. Гісов пучок.
7. Права ніжка Гісова пучка (праве товарове плече).
8. Ліва ніжка Гісова пучка (ліве товарове плече).
9. Задня вітка лівої ніжки.
10. Передня вітка лівої ніжки.
11. Пуркіневі волокна у шлуночковій мускулатурі.
12. Пуркіневі волокна у передсердній мускулатурі.

Рисунок 7.1 – Схема провідної системи серця

## 7.2 Види аритмій

Практичне значення мають такі порушення ритму серцевих скорочень:

1) порушення автоматизму синусного вузла: синусна тахікардія; синусна брадикардія; синусна аритмія; синдром слабкості синусного вузла;

2) гетеротропні (ектонічні) порушення ритму:

- екстрасистолія: синусна, передсердна, з АВ-посднанням, шлуночкові;
- пароксизмальна тахікардія: синусна, передсердна, з АВ-посднанням, шлуночкова;
- тріпотіння і мерехтіння (фібриляція) передсердь;
- тріпотіння і мерехтіння шлуночків;

3) порушення провідності: синоауртикулярна блокада, внутрішньо-передсердна блокада, атріовентрикулярна блокада, внутрішньошлуночкові блокади (блокади віток Гісова пучка), синдроми передчасного порушення шлуночків, асистолія шлуночків, асистолія передсердь.

## 7.3 Електрокардіографічні ознаки аритмій

### 7.3.1 Синусна тахікардія

Синусна тахікардія – прискорення синусного ритму у дорослих більше 90 скорочень у 1 хвилину (і, як правило, не перевищує 160), а в дітей прискорення ритму на 30 і більше ударів у 1 хвилину проти вікової норми. Характеризується нормальною формою і послідовністю як передсердних (P), так і шлуночкових (QRS) комплексів ЕКГ.

Основні ЕКГ-ознаки синусної тахікардії:

- 1) зубець P у всіх серцевих циклах передує комплексу QR, форма його постійна в кожному відведенні;
- 2) тривалість інтервалу P-R (P-Q) однакова в усіх комплексах і відповідає віковій нормі, частіше – її нижній межі;
- 3) інтервали R-R скорочені за рахунок укорочення діастолічного інтервалу.

### 7.3.2 Синусна брадикардія

Синусна брадикардія – зменшення синусного ритму у дорослих до 40 ударів у хвилину і нижче, а в дітей – уповільнення його на 30 і більше ударів у хвилину проти вікової норми.

Основні ЕКГ-ознаки синусної брадикардії:

- 1) зубець P у всіх серцевих циклах передує комплексу QRS, форма – постійна в кожному відведенні;
- 2) тривалість інтервалу P-R (P-Q) однакова в усіх комплексах і відповідає верхній межі вікової норми;
- 3) інтервали R-R подовжені за рахунок подовження діастолічного інтервалу T-P.

### 7.3.3 Синусна аритмія

Синусна аритмія виявляється в чергуванні періодів прискорення серцевого ритму з періодами його уповільнення.

Основні ЕКГ-ознаки синусної аритмії:

- 1) зубець Р у всіх серцевих циклах передує комплексу QР, форма його постійна в кожному відведенні;
- 2) тривалість інтервалу P-R (P-Q) однакова в усіх комплексах;
- 3) неправильний ритм із різницею між довжиною найдовшого і найкоротшого R-R інтервалу 0,12с і більше.

### 7.3.4 Екстрасистолія

Екстрасистолія – це передчасне скорочення серця під впливом ектопічного імпульсу. На ЕКГ при цьому з'являється передчасний (екстрасистолічний) комплекс із подальшою паузою, яка називається компенсаторною. Тривалість компенсаторної паузи залежить від локалізації ектопічного осередку порушення. Як правило, чим більш віддалений ектопічний осередок від синусного вузла, тим довше продовжується компенсаторна пауза.

В залежності від місця виникнення розрізняють екстрасистоли синусові, передсердні, з АВ-поєднанням (їх об'єднують терміном “суправентрикулярні екстрасистоли”) і шлуночкові. При шлуночкових екстрасистолах компенсаторна пауза, як правило, повна (коли сума екстрасистолічного і пост-екстрасистолічного циклів дорівнює тривалості двох синусних циклів), при передсердних – неповна (сума менше тривалості двох синусних циклів), АВ-екстрасистоли супроводжуються компенсаторною паузою різної тривалості.

Правильне чергування екстрасистол із нормальними комплексами називається алоритмією. Бігемінія – це прояв екстрасистол після кожного нормального порушення, тригемінія – після двох, квадригемінія – після трьох нормальних комплексів (рис. 7.2, а). Коли екстрасистоли з'являються підряд одна за одною – має місце групова екстрасистолія (рис. 7.2, б).

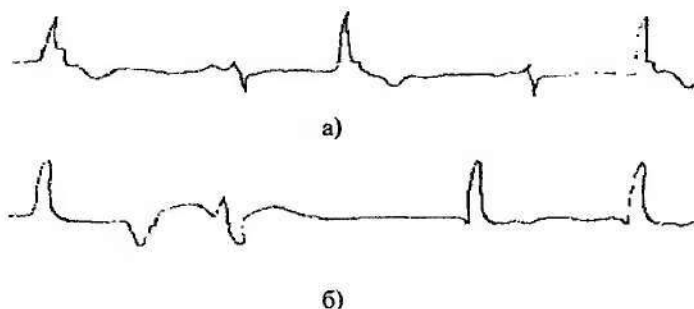


Рисунок 7.2 – Електрокардіограма при екстрасистолії за типом: а) бігемінії; б) при груповій екстрасистолії

*Синусні екстрасистоли* – пов'язані з виникненням ектопічного імпульсу в периферичних клітинах синусного вузла або повторного входу хвилі порушення в СА-вузол.

Основні ЕКГ-ознаки синусної екстрасistolії:

- 1) R-R-інтервал перед екстрасистою коротше нормального;
- 2) R-R-інтервал після екстрасистоли відповідає нормі;
- 3) форма зубця Р в екстрасistolії ідентична синусним зубцям Р, шлуночковий комплекс незмінений.

*Передсердна екстрасистоля* – характеризується передчасною появою зміненого за формою зубця Р з подальшим нормальним QRS-комплексом. Форма зубця Р залежить від локалізації ектопічного осередку порушення в передсердях. Коли він розташований поблизу від синусного вузла, зубець Р позитивний і мало відрізняється за формою від синусного (рис. 7.3, а). Якщо цей осередок, розташований у нижній частині правого передсердя або в лівому передсерді, зубець Р буває негативним. Діастола, що з'являється за екстрасистоєю, подовжена; компенсаторна пауза неповна, інтервал P-Q при цій екстрасistolії, як правило, більше 0,12 с.

Основні ЕКГ-ознаки передсердної екстрасistolії:

- 1) R-R-інтервал перед екстрасистою коротше нормального;
- 2) зубець Р екстрасистоли деформований, нерідко негативний;
- 3) шлуночковий комплекс екстрасистоли, як правило, незмінений;
- 4) компенсаторна пауза неповна.

*Атріовентрикулярна екстрасистоля*. Цей різновид екстрасistol зустрічається досить рідко. Ектопічні імпульси можуть виходити з різних частин АВ-з'єднань і поширюються до передсердь і шлуночків (рис. 7.3, б).

Основні ЕКГ-ознаки екстрасistol з АВ-з'єднаннями:

- 1) R-R-інтервал перед екстрасистою коротше нормального;

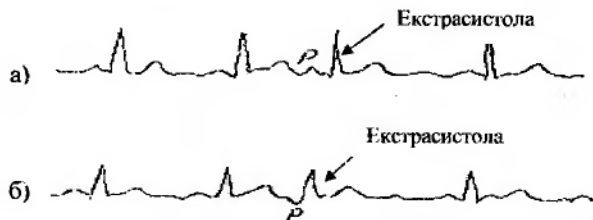


Рисунок 7.3 – Електрокардіограма при екстрасistolії:

а) передсердна екстрасистоля; б) атріовентрикулярна екстрасистоля

2) зубець Р екстрасистоли негативний; він або передує шлуночковому комплексу (в цьому випадку інтервал P-Q скорочений – менше 0,12с), або збігається з шлуночковим комплексом (у цьому випадку його не можна розрізнити), або знаходиться за комплексом QRS:

3) шлуночковий комплекс екстрасистоли нормальної або злегка зміненої форми;

4) компенсаторна пауза має різну тривалість (від неповної до повної).

*Шлуночкова екстрасистоля:* Імпульс порушення виникає в провідній системі шлуночків. Основні ЕКГ-ознаки:

1) R-R-інтервал перед екстрасистолю коротше нормального;

2) комплекс QRS розширений (більше 0,1с), грубо деформований;

3) сегмент S-T і зубець T спрямовані протилежно стосовно головного зубця комплексу QRS;

4) зубець Р в екстрасистолі відсутній;

5) компенсаторна пауза, як правило, повна.

На рис. 7.4 подані ЕКГ із шлуночковою екстрасистолею.

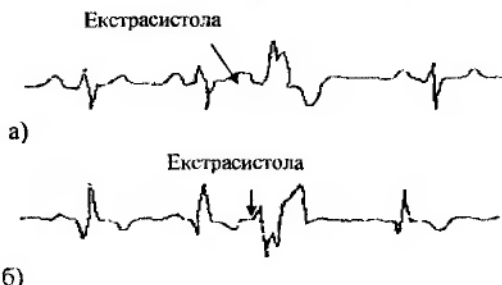


Рисунок 7.4 – Електрокардіограма при шлуночкової екстрасистолії:  
а) з правого шлуночка; б) з лівого шлуночка

### 7.3.5 Пароксизмальна тахікардія

Пароксизмальна тахікардія – це раптові приступи прискорення серцевого ритму понад 140 скорочень у хвилину; у дорослих від 160 до 220 (іноді вище), а у дітей – до 240–260 скорочень у хвилину. Закінчення приступу, так само як і початок – раптове, ритм – правильний. Тривалість приступів від секунд до декількох днів і навіть тижнів.

В залежності від місця виникнення розрізняють синусну, передсердню, АВ і шлуночкову (найбільш небезпечну) форми пароксизмальної тахікардії (рис.7.5).

Синусна пароксизмальна тахікардія за електрокардіографічними ознаками нагадує синусну тахікардію. Розрізнити їх дозволяє велика частота ритму під час синусної пароксизмальної тахікардії (160–220 ударів у хвилину), а також її раптовий початок і закінчення.

При АВ-формі відсутній зубець Р, а QRS-комплекс не змінений. При шлуночкової формі зубці Р помітні, але QRS-комплекси розширені та деформовані.

У розмежуванні форм пароксизмальної тахікардії допомагає локалізація зубців Р: при суправентрикулярній формі вони пов'язані зі шлуночковими

комплексами, а при шлуночкової формі тахікардії такий зв'язок відсутній (оскільки зубці Р-синусного походження, а шлуночковий ритм не залежить від синусного – ідіовентрикулярний).

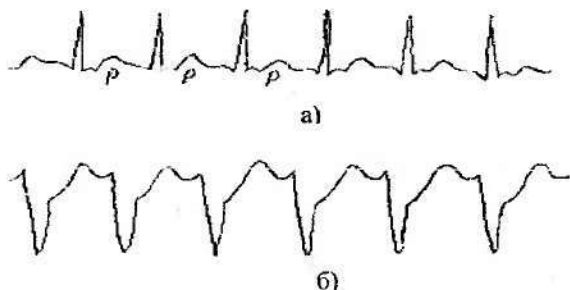


Рисунок 7.5 – Електрокардіограма при пароксизмальній тахікардії:  
а) атріовентрикулярна форма; б) шлуночкова форма

### 7.3.6 *Миготлива аритмія. Тріпотіння і мерехтіння (фібриляція) передсердь*

Ці види аритмій виникають внаслідок органічних поразок серця. Миготлива аритмія погіршує геодинаміку, сприяє утворенню тромбів і в багатьох випадках призводить до серцевої недостатності. Механізми розвитку миготливої аритмії багато в чому подібні з механізмами, що призводять до екстрасистолії, пароксизмальної тахікардії.

*Тріпотіння передсердь* являє собою ритмічну діяльність передсердь із частотою 220–250 скорочень у хвилину (рис. 7.6). У зв'язку з тим, що при цьому настає функціональна АВ-блокада, при якій до шлуночків доходить лише кожний другий, третій або четвертий імпульси, частота скорочення шлуночків виявляється значно менше частоти скорочень передсердь. Частіше всього ступінь АВ-блокади постійна, тому ритм шлуночків виявляється правильним.

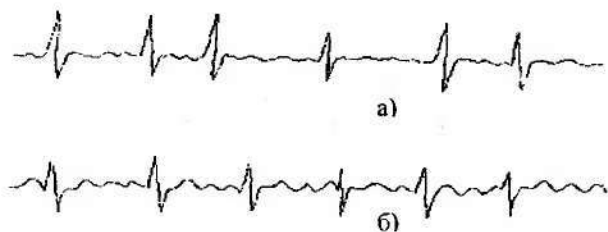


Рисунок 7.6 – Електрокардіограма: а) при мерехтінні передсердь;  
б) тріпотінні передсердь

Основні ЕКГ-ознаки тріпотіння передсердь:

1) хвилі тріпотіння розташовані через рівні інтервали з частотою 220–250 скорочень у хвилину; хвилі тріпотіння нерідко пилкоподібної форми;

2) майже завжди спостерігається атріовентрикулярна блокада, частіше всього 2:1 (на кожний шлуночковий комплекс доводиться два передсердних зубці), рідше 3:1 або 4:1;

3) форма і ширина шлуночкового комплексу нормальна.

*Мерехтіння передсердь* являють собою хаотичні некоординовані порушення і скорочення окремих частин м'язів передсердь з частотою від 380 до 600 скорочень у хвилину, систоли передсердь відсутні. Велика частина імпульсів із передсердь не досягає шлуночків, і лише частина проходить через АВ-вузол і викликає неритмічні, безладні скорочення шлуночків.

Основні ЕКГ-ознаки мерехтіння передсердь:

1) зубці Р відсутні, замість них є хвилі мерехтіння – f-хвилі, найкраще помітні у відведенні VI-2; в залежності від амплітуди розрізняють дрібно- і крупнохвильову фібриляцію;

2) шлуночкові комплекси розташовуються на різних відстанях один від одного, форма їх частіше всього не змінюється.

Виділяють тахісистолічну форму тріпотіння передсердь (із частотою скорочення шлуночків 100–200 скорочень у хвилину), нормосистолічну (60–100 скорочень у хвилину) і брадисистолічну (менше 60 скорочень у хвилину).

### 7.3.7 Тріпотіння і мерехтіння шлуночків

Тріпотіння і мерехтіння (фібриляція) шлуночків є дуже важкими порушеннями ритму, які призводять до припинення ефективної гемодинаміки і настання клінічної смерті. Це одна з найбільш частих безпосередніх причин смерті хворих із важкими захворюваннями серця. Клінічні симптоми цих порушень ритму обумовлені повною або майже повною зупинкою кровообігу, оскільки під час тріпотіння шлуночків ударний викид різко знижується, а під час мерехтіння стає рівним нулю.

*Тріпотіння шлуночків* – це дуже поверхневі, часті та ритмічні скорочення шлуночків із частотою 150–130 скорочень у хвилину, при яких відсутня діастолічна пауза (рис. 7.7).

Основні ЕКГ-ознаки тріпотіння шлуночків:

1) високі та широкі, майже однакової амплітуди, хвилі, в яких не можна розпізнати комплекс QRS, сегмент S-T і зубець T;

2) частота збудження шлуночків 150–300 скорочень у хвилину, інтервали між хвилями тріпотіння однакові, або майже однакові;

3) немає ізоелектричного інтервалу, хвилі тріпотіння переходять одна в одну.

*Мерехтіння шлуночків* характеризується хаотичною асинхронною електричною активністю окремих м'язових волокон шлуночків серця з припиненням їхньої систоли.

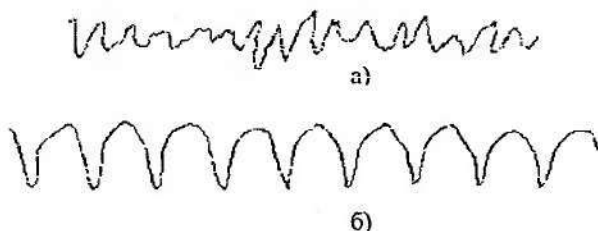


Рисунок 7.7 – Електрокардіограма: а) під час мерехтіння шлуночків; б) під час тріпотіння шлуночків

Основні ЕКГ-ознаки мерехтіння шлуночків:

1) на ЕКГ замість зубців Р і комплексу QRS хвилі мерехтіння шлуночків, хвилі різної висоти і ширини, з погіршенням стану міокарда шлуночків амплітуда фібриляції поступово зменшується;

2) відстань між окремими хвилями мерехтіння різна – частота коливається від 150 до 500 скорочень у хвилину;

3) немає ізоелектричного інтервалу – окремі хвилі переходять одна в одну, створюючи безперервну, хаотичної форми криву.

Тріпотіння шлуночків може досить швидко перейти в мерехтіння, хвилі якого потім зменшаться, і настає асистолія.

### 7.3.8 Порушення провідності

*Синосуртикулярна (СА) блокада* – це порушення провідності імпульсу від синусного вузла до передсердь (рис. 7.1); є патологією, що загрожує життю хворого. Зміни на ЕКГ з'являються, коли деякі імпульси не досягають передсердь, що призводить до випадання частини серцевих циклів (рис. 7.8).

При цьому на ЕКГ виникає два варіанти змін: 1) з'являється пауза, яка дорівнює за часом сумі двох або більше нормальних R-R інтервалів; 2) випаданню одного або декількох серцевих циклів передують поступове скорочення R-R інтервалу.

*Внутрішньопередсердна блокада* – це порушення провідності шляхів, які пов'язують між собою синусний вузол і розташований нижче на міжпередсердно-шлуночкової перегородці атріовентрикулярний вузол.

Порушення внутрішньо-предсердної провідності виявляються на ЕКГ зміною форми, амплітуди і тривалості зубця Р. Найбільш достовірною ознакою є розширення зубця Р (більше 0,12 с).



Рисунок 7.8 – Електрокардіограма при синоауртикулярній блокаді

*Атріовентрикулярна (АВ) блокада* – виникає під час порушення проведення імпульсу збудження з передсердь у шлуночки внаслідок поразки передсердь, АВ-вузла, Гісова пучка і його ніжок. Мають місце три ступеня цієї блокади.

При АВ-блокаді I ступеня відбувається уповільнене просування імпульсу з передсердь у шлуночки, що виявляється на ЕКГ подовженням інтервалу Р-Q більше 0,20с. При значному подовженні Р-Q зубець Р з'являється відразу за зубцем Т і може навіть накладатися на нього (рис. 7.9, а).

При АВ-блокаді III ступеню (повної) імпульси з передсердь до шлуночків не проводяться. На ЕКГ спостерігається повна незалежність між передсердними (Р) і шлуночковими (QRS) комплексами, частота зубців Р вища, ніж шлуночкових комплексів (рис. 7.9б). Відстань між зубцями Р однакова, між комплексами QRS – також. Повна АВ-блокада може сполучитися з мерехтінням або тріпотінням передсердь, вираженою брадикардією, асистолією. Особливо небезпечно при АВ-блокаді поява приступів пароксизмальної шлуночкової тахікардії або фібриляції шлуночків.

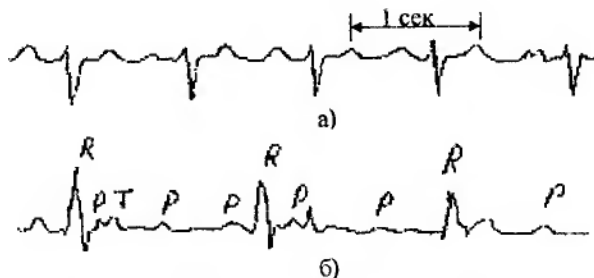


Рисунок 7.9 – Електрокардіограма при АВ-блокаді: а) I ступеня; б) III ступеня (повна)

*Синдром передчасного порушення шлуночків (синдром Вольфа-Паркінсона-Уайта WPW). Передчасне порушення окремих частин міокарда обумовлено наявністю додаткових шляхів проведення імпульсів порушення, по яких вони досягають відповідних частин раніше, ніж по основних шляхах проведення. Синдром WPW реєструється на ЕКГ у 0,15–0,20 % населення. ЕКГ при WPW наведений на рис. 7.10. Основні ЕКГ-ознаки синдрому WPW: 1) інтервал P-Q укорочений (менше 0,12с); 2) початкова частина комплексу QRS деформована (дельта-хвиля); 3) комплекс QRS розширений (більше 0,11с). Зміни шлуночкового комплексу при синдромі WPW утруднюють розпізнавання на ЕКГ проявів інфаркту міокарда, блокад ніжок Гісова пучка і гіпертрофії шлуночків серця.*



Рисунок 7.10 – Електрокардіограма при синдромі WPW

*Блокада правої ніжки Гісова пучка – одне з порушень внутрішньо-шлуночкової провідності, яка нерідко зустрічається.*

*Вона спостерігається як при власних хворобах міокарда, так і при захворюваннях, які викликають перевантаження і гіпертрофію правого шлуночка, що буває при мітральному стенозі, гострому та хронічному легеневому серці, деяких уроджених пороках серця. Повна блокада правої ніжки майже завжди є патологічною ознакою, а неповна – нерідко зустрічається у практично здорових людей.*

*Основні ЕКГ-ознаки повної блокади правої ніжки Гісова пучка (рис. 7.11а):*

- 1) комплекс QRS розширений (до 0,12с і більше), час внутрішнього відхилення у відведеннях  $V_1$ – $V_2$  збільшений до 0,06с і більше;*
- 2) комплекс QRS у відведеннях  $V_1$ – $V_2$  розширений, у вигляді літери “М”;*
- 3) реєструється широкий (тривалістю більш 0,04с), глибокий і часто зазубрений зубець S у відведеннях  $V_5$ – $V_6$ , I, aVL, іноді й у відведенні II;*
- 4) у відведеннях  $V_1$ – $V_2$  сегмент S-T зміщений до низу, зубець T – негативний і спрямований протилежно відносно основного в цих відведеннях зубця R.*

*Блокада лівої ніжки Гісова пучка – причинами її практично завжди є значні поразки міокарда шлуночків.*

*Основні ЕКГ-ознаки (рис. 7.11б):*

- 1) комплекс QRS розширений (більше 0,12с);*
- 2) широкий, часто розщеплений зубець R у відведеннях  $V_5$ – $V_6$  зі збільшеним часом внутрішнього відхилення до 0,06с і більше;*

3) відсутність зубця Q у відведеннях I,  $V_5$ - $V_6$ ;

4) зміщення до низу сегмента S-T і негативний асиметричний зубець T у відведеннях  $V_5$ - $V_6$ .

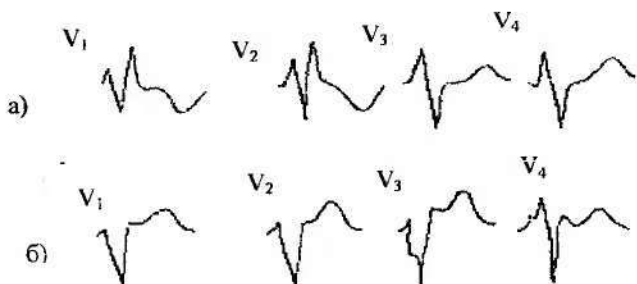


Рисунок 7.11 – ЕКГ при блокаді Гісова пучка: а) правої ніжки; б) лівої ніжки

*Асистолія шлуночків* – припинення електричної і механічної активності шлуночків, припинення вигнання крові в мале коло кровообігу (правий шлуночок) і у велике коло кровообігу (лівий шлуночок), має місце зупинка серця – стан клінічної смерті, на ЕКГ – пряма лінія без характерних зубців.

Проведений аналіз електричної активності серця під час порушень ритму серцевої діяльності дозволяє правильно підійти до побудови обчислювального алгоритму для систем автоматизованої обробки й аналізу електрокардіо-сигналів. В одних випадках досить провести аналіз ритму серцевих співвідношень, в інших – крім аналізу тимчасових характеристик ритму необхідно проводити кількісний аналіз форми окремих зубців і комплексів ЕКС. У залежності від призначення аналізатора цей алгоритм по-різному має враховувати сукупність електрокардіографічних ознак для розпізнавання захворювання, встановлення діагнозу та вибору правильного режиму поведінки і лікування хворого.

## 8 АЛГОРИТМИ ОПЕРАТИВНОЇ ОБРОБКИ ЕЛЕКТРОКАРДІОСИГНАЛІВ

### 8.1 Етапи обробки електрокардіосигналу

Головна мета алгоритмів обробки електрокардіосигналів (ЕКС) у даній задачі – це надійне виявлення QRS-комплексів і оперативне розпізнавання порушень ритму серцевих скорочень. Узагальнена схема алгоритму наведена на рис. 8.1. Електрокардіосигнал надходить на вхід алгоритму у вигляді послідовності двійкових відліків, отриманих під час аналого-цифрового перетворення з частотою 500 відліків у секунду. У випадку аналізу ЕКС хворих із електрокардіостимуляторами в моменти появи стимулюючих імпульсів на вході алгоритму формується спеціальна ознака. В результаті обробки сигналу одержуємо діагностичні висновки про наявність порушень ритму серця, сигнали тривоги у випадку особливих небезпечних порушень.

Обробка ЕКС починається з цифрової фільтрації мережного наведення й аналізу сигналу на зашумленість. Якщо сигнал визнаний вільним від шумів, то виконується процедура його адаптивного стиснення, що дозволяє в 10–20 разів скоротити надмірність вихідного подання сигналу, а також одержати його у вигляді, що спрощує подальший аналіз. Стиснутий опис сигналу використовується для виявлення QRS-комплексів і розпізнавання їхніх характерних точок (крайніх точок Q, R, S-зубців). Для кожного знайденого QRS-комплексу будується його спрощена модель, яка описує комплекс у вигляді конфігурації від двох до чотирьох похилих ліній; кожна з них характеризується амплітудою і тривалістю. Відстань між вершинами R-зубців сусідніх QRS-комплексів приймається за розмір RR-інтервалу. Отримана модель використовується для обчислення 4 ознак форми QRS-комплексу (амплітуди, тривалості, зміщення щодо ізолінії, площі зубців). Після цього розпізнаються і виключаються з подальшої обробки T-зубці, які через велику амплітуду могли бути помилково прийняті за QRS-комплекси. Далі сигнал аналізується на наявність небезпечних для життя аритмій (фібриляція шлуночків, пароксизмальна тахікардія, асистолія, сильна брадикардія). Хід подальшої обробки залежить від режиму роботи аналізатора. Якщо аналізатор включений у режимі аналізу ЕКС із стимуляцією, то виконується лише аналіз ефективності стимуляції. Виявлення як небезпечних аритмій, так і небезпечних порушень стимуляції призводить до негайного формування сигналів тривоги. Якщо режим аналізу стимуляції відключений, то здійснюється пошук інших, менш небезпечних порушень ритму серця. В першу чергу відбувається класифікація форми QRS-комплексів, у процесі якої всі виявлені комплекси групуються за класами з ознаки подібності їхньої форми. Кожному сформованому класу присвоюється ідентифікатор, який називають «маркою», що характеризує форму QRS-комплексів даного класу як «нормальну», «патологічну» або «невизначену».

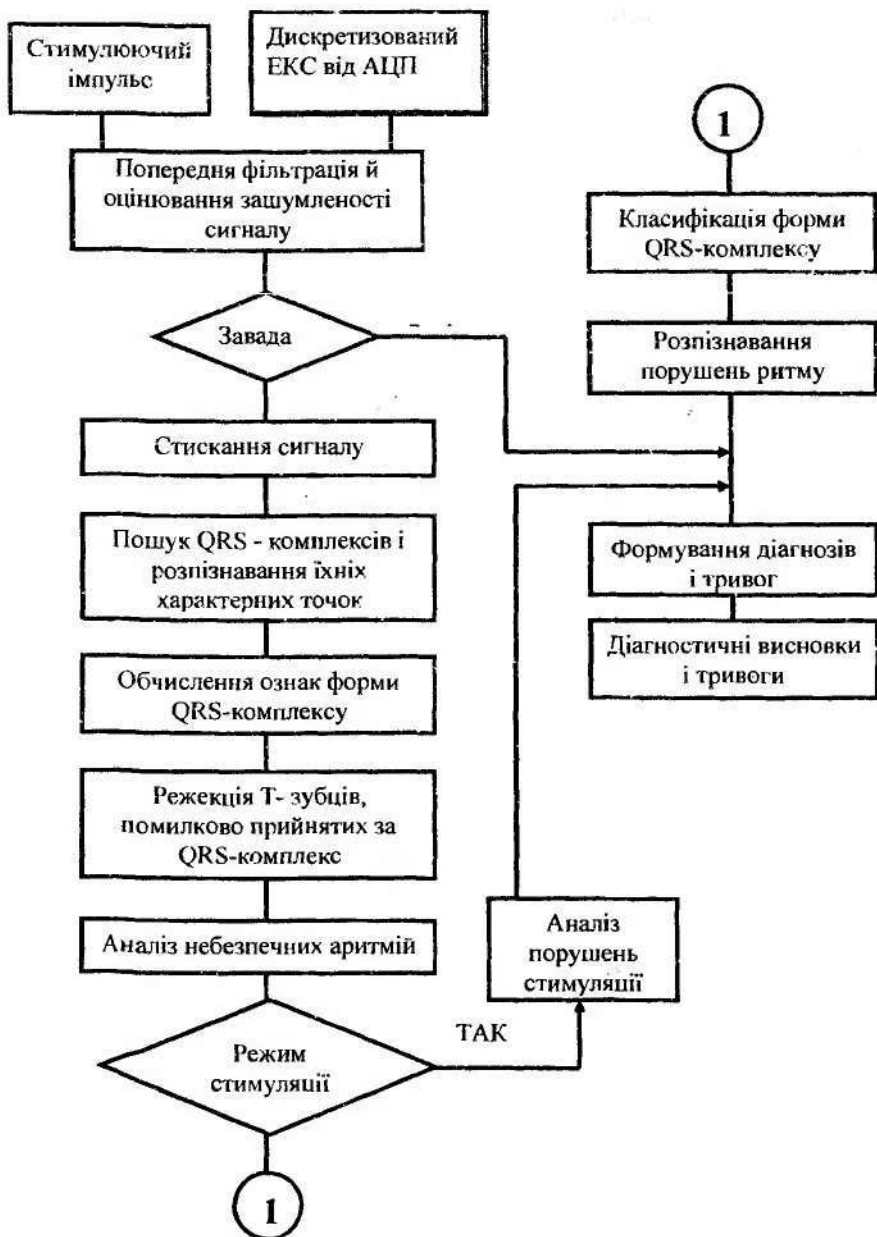


Рисунок 8.1 – Узагальнена схема алгоритму обробки ЕКС

Ця інформація в поєднанні зі співвідношеннями суміжних R-R інтервалів є основою для розпізнавання окремих порушень ритму – первинних аритмій, таких як екстрасистолія, бігемінія, тригемінія, випадання шлуночків.

На рис. 8.2 для фрагмента сигналу, що містить один кардіоцикл, показані стадії перетворення сигналу в алгоритмі.

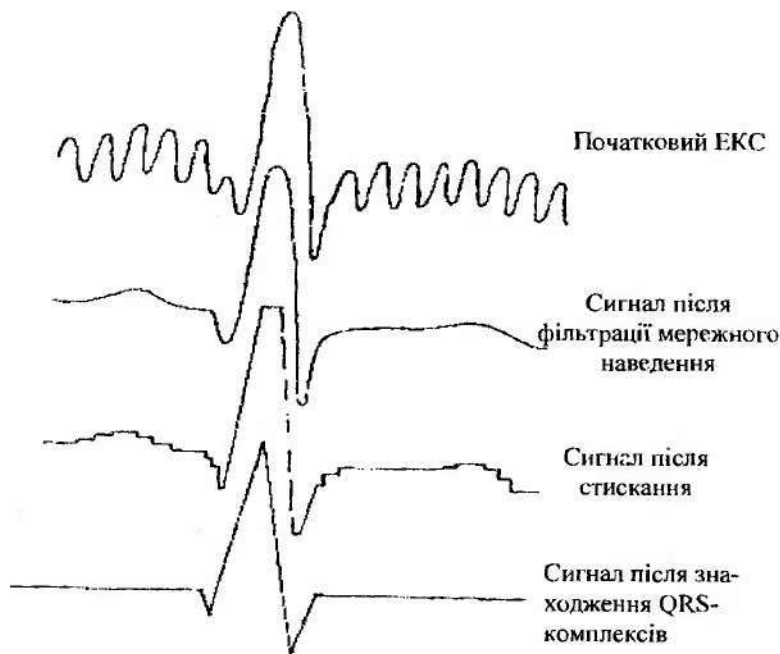


Рисунок 8.2 – Перетворення електрокардіосигналу при послідовних стадіях обробки

## 8.2 Попередня обробка електрокардіосигналу

Методи аналізу ЕКС припускають відсутність у сигналі перешкод, порівняних за своєю інтенсивністю з корисним сигналом. Тому аналізу ритму має передувати етап заглушення завад. У тих випадках, коли рівень завад настільки великий, що їхнє заглушення стає неефективним, зашумлені частини мають вилучатися з обробки. Отже, боротьба з завадами зводиться, з одного боку, до фільтрації тих завад, що можуть бути заглушені, а з іншого боку – до розпізнавання частин, де подальша обробка неможлива через шуми. В останньому випадку час, вилучений з аналізу, враховується, й алгоритмом формується повідомлення про завади, і далі ознака, що використовується на

подальших стадіях обробки для установлення початковий стан тих процедур аналізу, для яких досить важлива безперервність сигналу (наприклад, алгоритму розпізнавання екстрасистол).

### 8.2.1 Попередня фільтрація і розпізнавання перешкод

Сигнал надходить на вхід алгоритму обробки у вигляді послідовності цілих позитивних восьмирозрядних двійкових кодів, з формованих АЦП із частотою 500 відліків у секунду. Значення цих відліків визначаються динамічним діапазоном АЦП і можуть знаходитися в межах від 0 до 255 дискретів. Передбачається, що корисний сигнал за нормальних умов знімання, посилення й аналого-цифрового перетворення розташовується приблизно в середині динамічного діапазону АЦП, а амплітуди хвиль ЕКС (зокрема QRS-комплекс) не перевищують 1/4–1/5 усього діапазону (тобто, 60–50 дискретів). Однак, у випадку появи в сигналі високоамплітудних викидів або значного відходу ізолінії, можливий вихід його за межі динамічного діапазону АЦП, що робить аналіз неможливим. Тому обробка ЕКС починається з перевірки на порушення динамічного діапазону АЦП. Сигнал вважається завадою, якщо значення його відліків виявляються рівними одній з меж діапазону (0 або 255) більше, ніж задане число разів підряд. Якщо немає порушень діапазону АЦП, то виконується цифрова фільтрація мережного наведення промислової частоти 50 Гц.

*Адаптивна фільтрація під час аналізу ЕКС.* Принцип дії застосовуваного адаптивного цифрового фільтра заснований на тому, що параметри синусоїдальної мережної завади (її амплітуда і фаза), як правило, змінюються в часі порівняно повільно, і фільтр, підстроюючись під цю заваду, віднімає її з вхідного сигналу. Позначимо послідовність відліків на вході та виході фільтра відповідно

$$X(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_n),$$

$$Y(y_1, y_2, y_3, \dots, y_i, \dots, y_n),$$

і послідовність сигналу, що компенсує, який розраховується фільтром

$$A(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n).$$

Будь-яка  $i$ -точка вхідної послідовності може бути отримана зі співвідношення

$$Y_i = x_i - a_i. \quad (8.1)$$

Відомо тригонометричне рівняння

$$\sin(\theta + \delta) = 2 \sin \theta \cos \delta - \sin(\theta - \delta), \quad (8.2)$$

де  $\theta$  і  $\delta$  – деякі довільні кути.

Домножимо його на деяку константу  $A$

$$A \sin(\theta + \delta) = 2 \cos \delta \cdot (A \sin \theta - A \sin(\theta - \delta)). \quad (8.3)$$

Тепер вважатимемо:

$\theta$  – поточне значення аргументу синусоїдальної функції в точці відліку  $a_i$ ;

$\delta$  – кутова відстань між сусідніми відліками;

$\theta + \delta$  – поточне значення аргументу функції в точці  $(i + 1)$ ;

$\theta - \delta$  – поточне значення аргументу в точці  $(i - 1)$ ;

$A$  – амплітуда цієї синусоїди.

Тоді формулу (8.3) можна записати у такому вигляді:

$$a_{i+1} = 2 \cos \delta a_i - a_{i-1}, \quad (8.4)$$

де  $a_{i-1}, a_i, a_{i+1}$  – послідовні відліки синусоїди, що відстоять друг від друга на кут  $\delta$ .

Із формули (8.4) випливає, що по двох відомих сусідніх відліках синусоїди завжди можна передбачити значення відліку, що з'являється за ними. Це покладено в основу алгоритму адаптивної фільтрації.

Нехай для моменту часу, що відповідає  $i$ -му відліку вхідного сигналу  $X_i$ , відомі значення попереднього  $X_{i-1}$  відліку, а також величини  $a_{i-1}$  і  $a_i$ , які дорівнюють ординатам відповідних точок синусоїдальної завади. Тоді поточні та попередні йому відліки вихідного сигналу можуть бути знайдені за формулами

$$y_i = x_i - a_i; \quad (8.5)$$

$$y_{i-1} = x_{i-1} - a_{i-1} \quad (8.6)$$

Розглянемо вираз

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = (x_i - a_i) - (x_{i-1} - a_{i-1}). \quad (8.7)$$

Виявляється, що чим точніше визначені відліки сигналу, який компенсує,  $a_i$  та  $a_{i-1}$ , тим ближче ця різниця до нуля для кожного значення  $i$ , де  $i$  – номер відліку АЦП. Тому підстроювання фільтра під заваду полягає в тому, що на кожному кроці фільтрації (для кожного наступного значення  $i$ ) оцінюється знак виразу (8.7). В залежності від того, позитивний чи негативний знак значення,  $a_i$  відповідно нарощується або зменшується на фіксовану константу (названу DA) так, щоб скорегувати  $\Delta y_i$  вбік нуля. Отримане в результаті значення  $a_i$  використовується для обчислення вихідного відліку за формулою (8.1). Далі за формулою (8.4) обчислюється передбачуване значення  $i+1$ -го відліку сигналу, що компенсує, після чого вся процедура повторюється для наступного вихідного відліку.

Описаний алгоритм, незважаючи на простоту, досить добре підстроюється під синусоїдальне наведення і дає непогану якість фільтрації.

Швидкість збіжності, усталеність і точність настроювання алгоритму визначаються, в основному, вибором розміру DA. Недоліком фільтра є те, що на початковій частині фрагмента сигналу, що фільтрується, поки фільтр остаточно не підстроївся, завада компенсується не повністю. Схема алгоритму адаптивної цифрової фільтрації мережного наведення наведена на рис. 8.3.

Позначення, прийняті на рисунку:

XI, YI – значення поточних відліків вхідного і вихідного сигналів;

XIM1 – змінна  $x_{i-1}$ , що зберігає для кожного поточного і попередній відлік вхідного сигналу;

AI, AIM1, AIP1 – змінні, що на кожному кроці фільтрації відповідають поточному, попередньому і передбачуваному наступному значенню сигналу, що компенсує,  $(a_i, a_{i+1}, a_{i-1})$ ;

DY – різниця між передбачуваними поточними і попередніми значеннями вихідного сигналу  $(\Delta y_i = y - y_{i-1})$ ;

DA – збільшення сигналу, що компенсує;

COS – константа, що відповідає косинусу кутової відстані між відліками.

До початку фільтрації ні про заваду, ні про сигнал нічого не відомо. Тому перед першим кроком алгоритму приймається AI = 0; AIM1 = 0; XIM1 = 0, що відповідає припущенню про відсутність завади при нульовому початковому значенні сигналу. Константи DA і COS обираються в залежності від частоти дискретизації і розрядності АЦП. У даному випадку використовуються такі значення: DA = 1; COS =  $\cos 36^\circ = 0,809$ . Якщо абсолютне значення сигналу, що компенсує, розрахованого фільтром, досягає розміру 1/4 діапазону АЦП (64 дискрети), то рівень наведення вважається неприпустимо високим, а фільтрація і подальший аналіз відповідного фрагмента електрокардіосигналу – неможливим.

Після фільтрації сигнал аналізується на наявність високочастотних шумів. Критерієм зашумленості є середнє значення модуля другої різниці відліків. Усереднення виконується за останніми 32 відліками. Щоб виключити необхідність збереження цих відліків, обчислюється не саме поточне середнє, а його наближена оцінка. Якщо вихідна послідовність позначається  $Y\{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n\}$ , то перша і друга різниці для  $i$ -го відліку становлять:

$$D_i = D1_i = y_i - y_{i+1}; \quad D_{i-1} = D1_{i-1} = y_{i-1} - y_i;$$

$$D2_i = D_i - D_{i-1}.$$

Оцінки поточної суми і поточних середнього модулів другої різниці обчислюються за формулами

$$SD2_i = SD2_{i-1} - DS2_{i-1} + D2_i; \quad DS2_i = \frac{SD2_i}{32}.$$

Для визначеності приймаються такі початкові умови:

$$y_0 = y_1; \quad D_0 = 0; \quad D2_0 = 0; \quad SD2_0 = 0; \quad DS2_0 = 0.$$

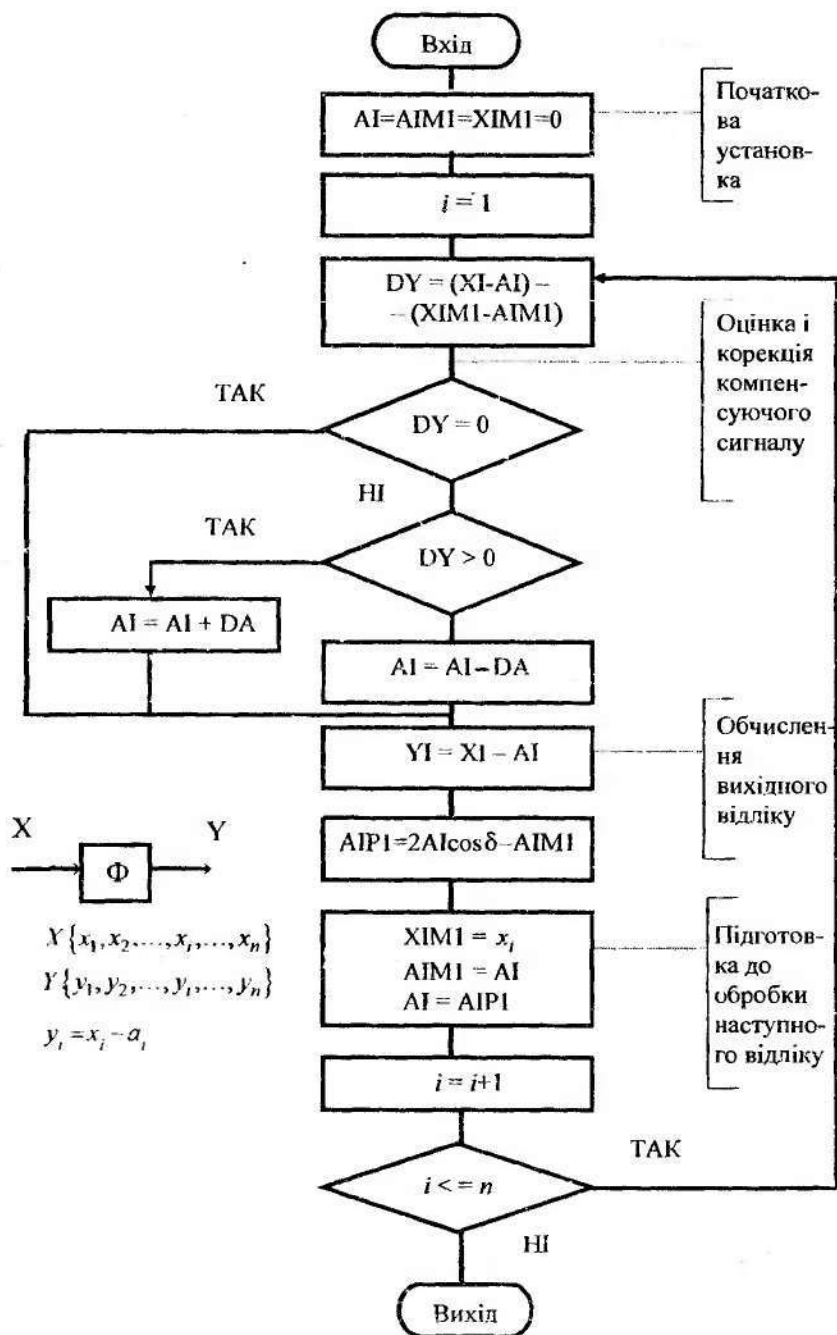


Рисунок 8.3 – Схема алгоритму адаптивної цифрової фільтрації мережного наведення

Наявність шумів констатується в таких випадках:

1) якщо хоча б для одного  $i$   $DS2_i > DNS$ ;

2) якщо не менше, ніж  $TNS1$  значень  $SD2_i$  підряд перевищують розмір  $DNS1$ .

Тут  $DNS$ ,  $TNS1$ ,  $DNS1$  – експериментально підібрані межові значення, причому  $DNS > DNS1$ .

Отже, на цій стадії обробки ЕКС можуть бути розпізнані три види завод: вихід за межі діапазону АЦП, високий рівень мережного наведення і високочастотні завади великої інтенсивності.

### 8.2.2 Алгоритм стиснення електрокардіосигналу

Стиснення ЕКС переслідує два основні завдання: зниження щільності інформації, що описує сигнал, і подання сигналу у вигляді, більш зручному для його подальшого аналізу. Під час використання для побудови системи обробки кардіологічної інформації сучасних IBM-сумісних персональних комп'ютерів практично не виникає проблем, пов'язаних з обмеженою швидкістю машин або обмеженням обсягів оперативної і довгострокової пам'яті. В цих випадках проблема стиснення збереженої інформації втрачає свою актуальність. Однак під час побудови портативних переносних моніторних пристроїв аналізу ЕКС зазначені проблеми залишаються актуальними. Алгоритм реалізує двопараметричну апроксимацію за інтервалом апроксимації і ступенем апроксимуючого полінома (0-го і 1-го порядку).

В результаті роботи алгоритму послідовність вхідних відліків сигналу, які рівностоять, трансформується в послідовність горизонтальних і похилих відрізків прямої – ліній і схилів. Кожна лінія описується тривалістю її ординатою, а кожен схил – тривалістю і розмахом, причому знак розмаху відповідає знаку похідної сигналу на даному відрізку.

На першому етапі алгоритму виконується апроксимація нульового порядку. Відрізки сигналу, в межах яких різниця між максимальним  $y_{\max j}$  і мінімальним  $y_{\min j}$  значеннями відліків  $\Delta y_j$  не перевищує параметра скорочення надмірності за амплітудою  $AP$  (апертури), замінюються відрізками горизонтальних ліній

$$\Delta y_i = y_{\max j} - y_{\min j} \leq AP;$$

$$y_{\max j} = \max_i \{y_{ij}\}; y_{\min j} = \min_i \{y_{ij}\},$$

де  $y_{ij}$  – значення  $i$ -го відліку, що включається до складу  $j$ -ї лінії, а  $i=1, K$ , де  $K$  – номер останнього відліку  $j$ -ї лінії.

Ордината і тривалість лінії розраховуються за формулами

$$V_{ej} = \frac{y_{\max j} + y_{\min j}}{2}; t_{ej} = Kt_0, \quad (8.8)$$

де  $t_0$  – період дискретизації;  $t_0 = 1/F_0$ ,  $F_0$  – частота дискретизації.

Далі виконують апроксимацію першого порядку. При цьому послідовні лінії, які не є екстремумами (для яких справедливо співвідношення  $t_{ej} \leq J$ , де  $J$  – часовий параметр алгоритму), замінюються схилами, розмах і тривалість яких визначаються за формулами

$$V_s = V_{ej_n+1} - V_{ej_n-1}, t_s = \sum_{n=j_1}^{n=j_m} t_{en}, \quad (8.9)$$

де  $j_1$  і  $j_m$  номери першої й останньої лінії апроксимації, що включаються до складу даного схилу.

З виразу (8.9) випливає, що розмах схилу обчислюється як різниця ординат сусідніх з ним ліній. Це означає, що формування схилу неможливо завершити раніше, ніж буде закінчене формування наступної за ним лінії. Тому, щоб виключити затримку в обробці сигналу, неприпустимо під час його аналізу в реальному масштабі часу, на тривалості як ліній, так і схилів накладені обмеження:  $t_e < TLM$ ;  $t_s < TSM$ , де  $TLM$  і  $TSM$  – константи, що вибираються в залежності від припустимої затримки. В даному випадку використовується значення  $TLM = TSM = 126\text{мс}$ , у випадку перевищення якого формування відповідного фрагмента стиснутого сигналу припиняється, а його частина, що залишилася, включається до складу наступного фрагмента.

На виході алгоритму кожний елемент стиснутого опису QRS-комплексу поданий трьома розмірами:

- амплітудним параметром (ордината лінії або розмах схилу);
- тривалістю;
- ознакою “схил/лінія”, що використовуються як знак тривалості (для лінії він дорівнює нулю, для спадних схилів “-1”, для висхідних схилів “+1”).

Послідовні етапи перетворення сигналу в процесі стиснення наведені на рис. 8.4.

## 8.3 Алгоритм виявлення QRS-комплексів і розпізнавання їхніх характерних точок

### 8.3.1 Загальна характеристика алгоритму

Аналіз ритму серця заснований на зіставленні форм QRS-комплексів і тимчасових інтервалів між ними. В залежності від того, як надійно будуть розпізнаватися QRS-комплекси і їхні характерні точки, залежить якість системи в цілому.

Електрокардіосигнал має характерну структуру, що дозволяє лікарям візуально по ЕКГ розпізнавати багато серцевих патологій. Ці структурні особливості закладені в основу алгоритму автоматизованого виявлення QRS-комплексу і визначення його характерних точок. Уперше цей алгоритм описаний в [10] і був використаний у багатьох кардіоаналізаторах.

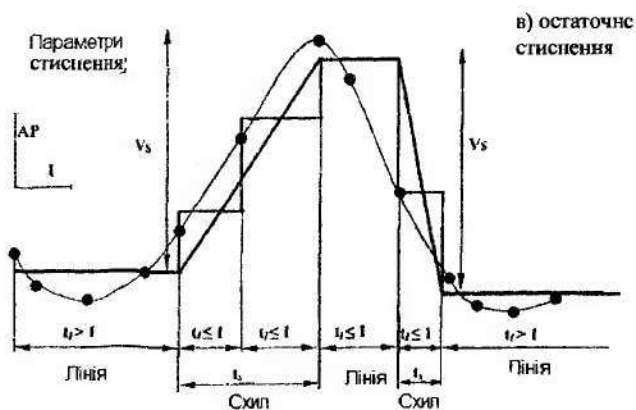
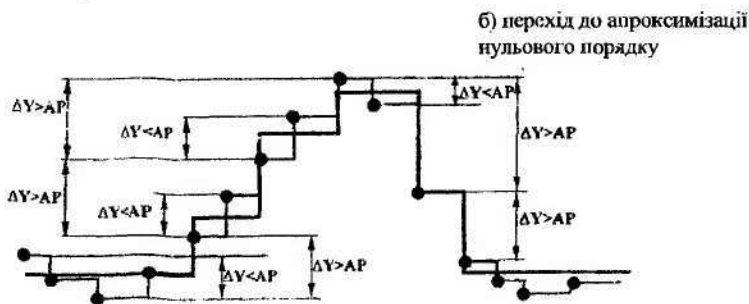
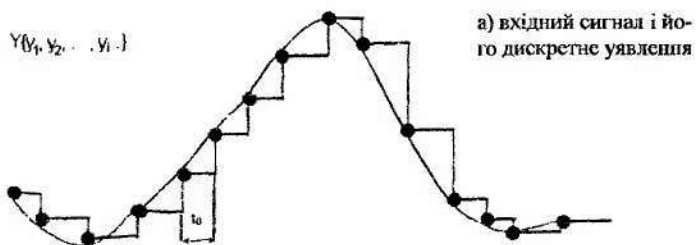


Рисунок 8.4 – Етапи стиснення сигналу

Вхідною інформацією для алгоритму є послідовність елементів стиснутого опису сигналу ліній і схилів. Схили мають два параметри: розмах  $U$ , що обчислюється як різниця ординат сусідніх із схилом ліній, і тривалість  $T$ . Основне завдання алгоритму полягає в тому, щоб, аналізуючи цю послідовність, локалізувати QRS-комплекси і визначити крайні точки їхніх зубців – характерні точки. На вході алгоритму для кожного знайденого QRS-комплексу будується його упорядкована модель – компактний опис. Ця модель описує кожний QRS-комплекс у вигляді структури, що містить від двох до чотирьох похилих ліній, кожна з яких поєднує дві сусідні характерні точки комплексу (рис. 8.5): Q – початок Q-зубця, R 1 – початок R-зубця, R 2 – вершина R-зубця, R 3 – кінець R-зубця, S – кінець S-зубця.

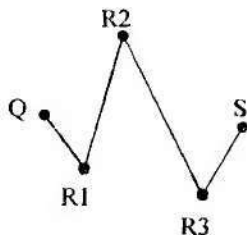


Рисунок 8.5 – Структура QRS-комплексу

Проміжок часу між вершинами R-зубців сусідніх комплексів приймається за R-R інтервал  $T_{RR}$  (TRR).

Параметри алгоритму стиснення підбираються так, що на відрізках, які містять QRS-комплекси, обов'язково мають бути сформовані схили. Ця умова є відправною точкою для роботи алгоритму пошуку QRS-комплексів. Усі схили, що містяться в стиснутому описі, умовно підрозділяються на три категорії:

- “великі” (BC), для яких  $t_s > TBC$ ,  $U_s > ABS$ ;
- “малі” (MC), для яких  $t_s \leq TMC$ ,  $U_s \leq AMC$ ;
- “середні” (CC), що не підходять під визначення BC і MC.

Тут:  $t_s$  і  $U_s$  – тривалість і розмах схилів;  $TB$ ,  $TMS$ ,  $ABS$ ,  $AMS$  – експериментально підібрані межові значення;  $TB > TMS$ ;  $ABS > AMS$ .

Нижче наведений опис алгоритму пошуку QRS-комплексу, а на рис. 8.7 – його структурна схема.

### 8.3.2 Опис алгоритму

1. Початок.
2. Звернутися до чергового відрізка ЕКС.
3. Якщо цей відрізок не є схилом, то перейти до пункту 2.
4. Якщо даний схил не є BC, то перейти до пункту 2

5. Позначити даний БС як БС\*. Зафіксувати точку R1. (Початок прямого пошуку (рис. 8.6 а)).
6. Звернутися до наступного відрізка.
7. Обчислити  $T_{QRS}$ .
8. Якщо  $T_{QRS} > 200$  мс, то перейти до пункту 14.
9. Якщо цей відрізок не є схилом, то перейти до пункту 13.
10. Якщо даний схил є МС, то перейти до пункту 6.
11. Якщо даний схил має той самий знак, що і БС\*, то перейти до пункту 6.
12. Перейти до пункту 22. (Закінчення прямого пошуку).
13. Якщо  $\tau \leq 80$  мс, то перейти до пункту 6.
14. Зафіксувати точку R3. (Початок оберненого пошуку (рис 8.6 б)).
15. Звернутися до попереднього відрізка ЕКС.
16. Обчислити  $T_{QRS}$ .
17. Якщо  $T_{QRS} > 200$  мс, то перейти до пункту 2. (R – зубець не знайдений).
18. Якщо цей відрізок не є схилом, то перейти до пункту 21.
19. Якщо даний схил є МС, то перейти до пункту 15.
20. Якщо даний схил має той самий знак, що і БС\*, то перейти до пункту 15; інакше – перейти до пункту 22. (Закінчення зворотного пошуку).
21. Якщо  $\tau \leq 80$  мс, то перейти до пункту 15; інакше – перейти до пункту 2. (R – зубець не знайдений).
22. Виконати процедуру добудування схилів R-зубця.
23. Виконати процедуру корекції вершин R-зубця, фіксацію точок R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, R<sub>3</sub> і обчислення  $T_{RR}$ .
24. Звернутися до відрізка перед R<sub>1</sub>. (Початок пошуку Q-зубця).
25. Якщо для даного відрізка МС, то перейти до пункту 42.
26. Звернутися до попереднього відрізка.
27. Якщо знак даного схилу збігається зі знаком БС\*, то перейти до пункту 34.
28. Звернутися до попереднього відрізка.
29. Якщо для даного відрізка  $\tau \leq 30$  мс, то перейти до пункту 43.
30. Звернутися до попереднього відрізка.
31. Якщо знак даного схилу збігається зі знаком БС\*, то перейти до пункту 42.
32. Звернутися до попереднього відрізка.
33. Якщо  $\tau \leq 30$  мс, то перейти до пункту 43, інакше – перейти до пункту 42.
34. Здійснити перенесення точки R<sub>1</sub>.
35. Звернутися до попереднього відрізка.
36. Якщо  $\tau \leq 30$  мс, то перейти до пункту 42.
37. Звернутися до попереднього відрізка.
38. Знак даного схилу збігається зі знаком БС\*, то перейти до пункту 40.
39. Здійснити перенесення точки R<sub>1</sub>; перейти до пункту 42.
40. Звернутися до попереднього відрізка. МС, або СС, або БС.

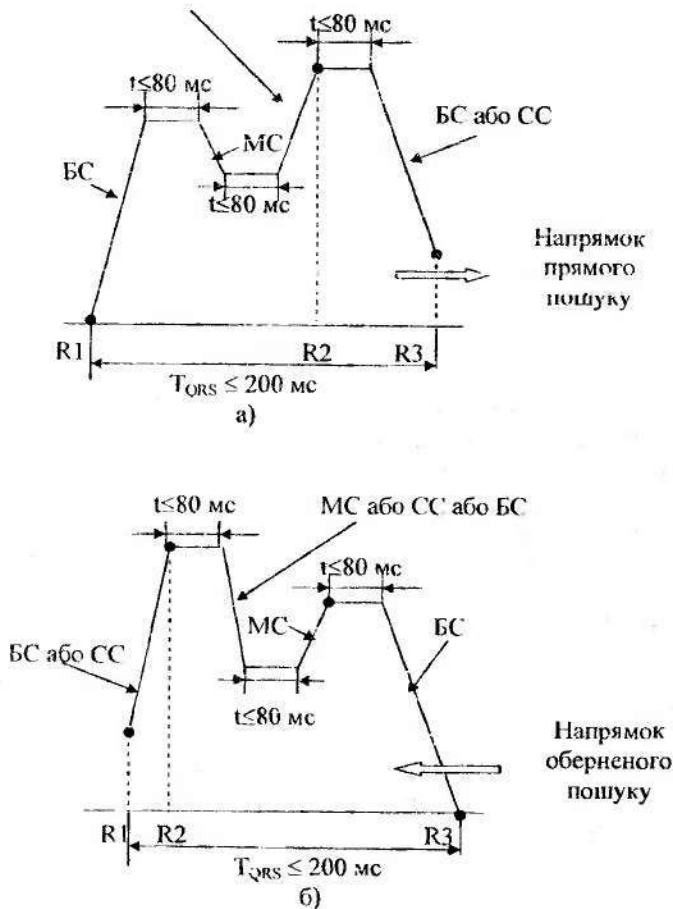


Рисунок 8.6 - До алгоритму пошуку R-зубця

41. Якщо  $t \leq 30$  мс, то перейти до пункту 43.
42. Зафіксувати відсутність Q-зубця (Q-зубець не знайдений), перейти до пункту 46.
43. Обчислити  $T_{QRS}$ .
44. Якщо  $T_{QRS} \geq 200$  мс, то перейти до пункту 42.
45. Зафіксувати точку Q. (Закінчення пошуку Q-зубця).
46. Виконати процедуру пошуку S-зубця. (Пошук S-зубця).
47. Виконати побудову компактного опису QRS-комплексу.
48. Кінець.

### 8.3.3 Структурна схема алгоритму

Вважається, що для розпізнавання R-зубця необхідна наявність комбінації, як мінімум, одного БС і протилежно спрямованого БС або СС. Тому на першій стадії алгоритму (рис 8.7) виконується пошук БС (блоки Б2-Б4). Коли такий схил знайдений, припускається, що це передній схил R-зубця, і початок його приймається за точку  $R_1$ . Далі аналізуються наступні за цим БС елементи стиснутого опису (Б5-Б14) і, якщо виявлений схил протилежного напрямку, то вважається, що R-зубець знайдений. При цьому до складу зубця включаються малий схил (МС) як напрямок і лінії з тривалістю не більш 80 мс. Загальна тривалість знайденої конфігурації не має перевищувати 200 мс.

Якщо пошук не дав результатів, то передбачається, що знайдений БС – це задній схил R-зубця, його кінець приймається за точку  $R_3$ , і починається спроба пошуку в зворотному напрямку (Б15 – Б21) з обліком тих самих умов. Якщо в цьому випадку R-зубців не виявилось, то спроба знайти QRS-комплекс в околі даного БС припиняється, й алгоритм переходить до аналізу наступного відрізка сигналу.

Після виявлення R-зубця виконується процедура добудовування його схилів (Б22), що зводиться до доповнення переднього і заднього схилів R-зубця схилами того самого напрямку (якщо вони є). Це дає можливість включати до складу R-зубця його початкові та кінцеві елементи, які могли бути окремими уступами на схилах. Далі коректується положення точки  $R_2$  (вершина R-зубця) в тому випадку, якщо через уступи на одному зі схилів вона опинилася не в крайній відносно підстави зубця точці (Б23).

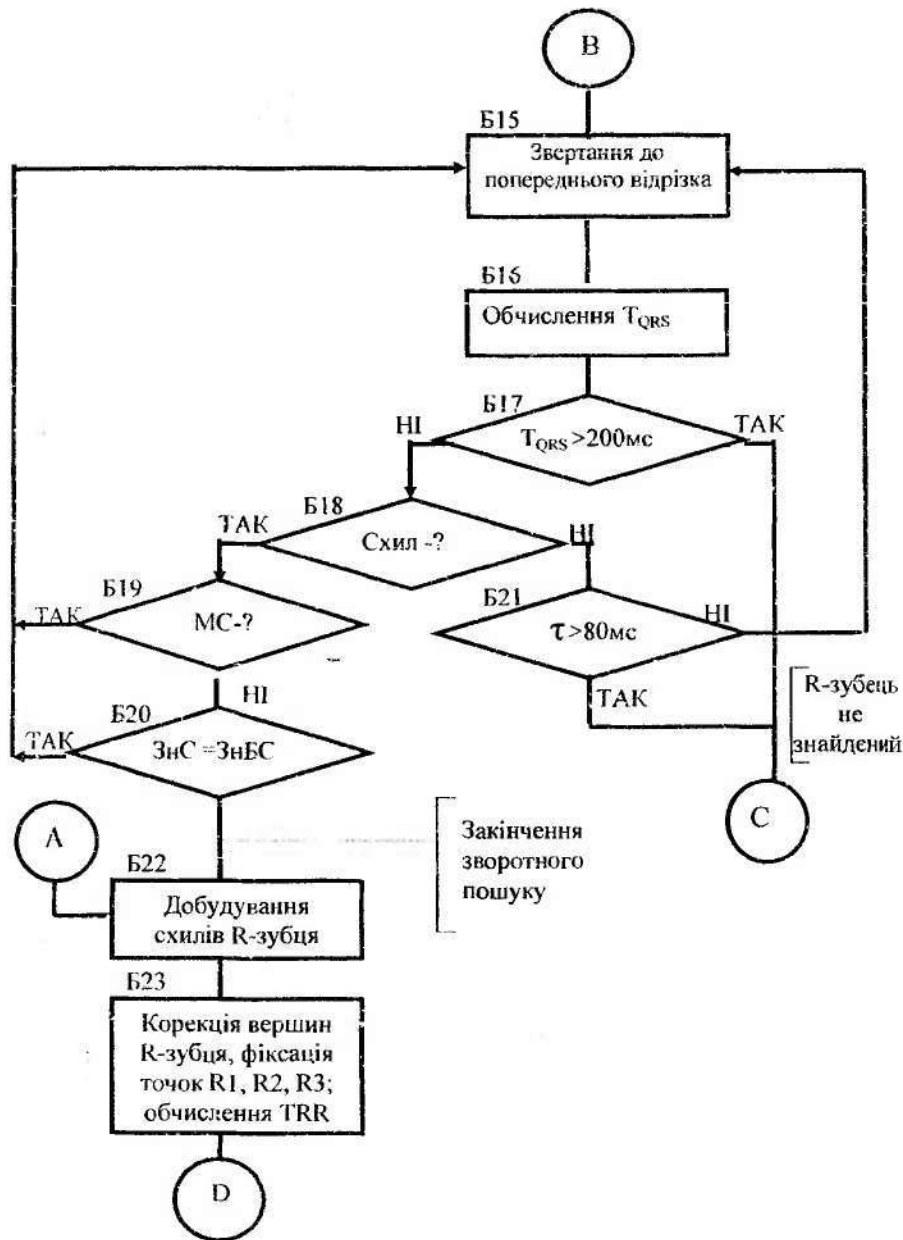
Процес пошуку Q-зубця (Б24 – Б45) полягає в послідовному перебиранні ліній і схилів, що передують точці  $R_1$ . До складу Q-зубця може бути включена будь-яка лінія з тривалістю не більше 30 мс, а так само схили, спрямовані протилежно передньому схилу R-зубця. Якщо Q-зубець виявлений, то початок його першого схилу вважається точкою Q. У протилежному випадку передбачається, що Q-зубець у даному комплексі відсутній.

Пошук S-зубця (Б46) відрізняється від пошуку Q-зубця тим, що, по-перше, поріг тривалості лінії дорівнює 50 мс, а по-друге, наявністю процедури перейменування зубців у випадку, якщо за S-зубцем виявляється ще один зубець протилежного напрямку, а Q-зубець не був до цього знайдений. При цьому колишній R-зубець стає Q-зубцем, S-зубець – R-зубцем, а новий зубець R-зубцем. Це дозволяє уникнути помилкового виявлення двох комплексів замість одного, коли є чітко виражені Q- і S-зубці. Для того, щоб знайдена структура була визнана QRS-комплексом, необхідно так само дотримуватися такої умови:

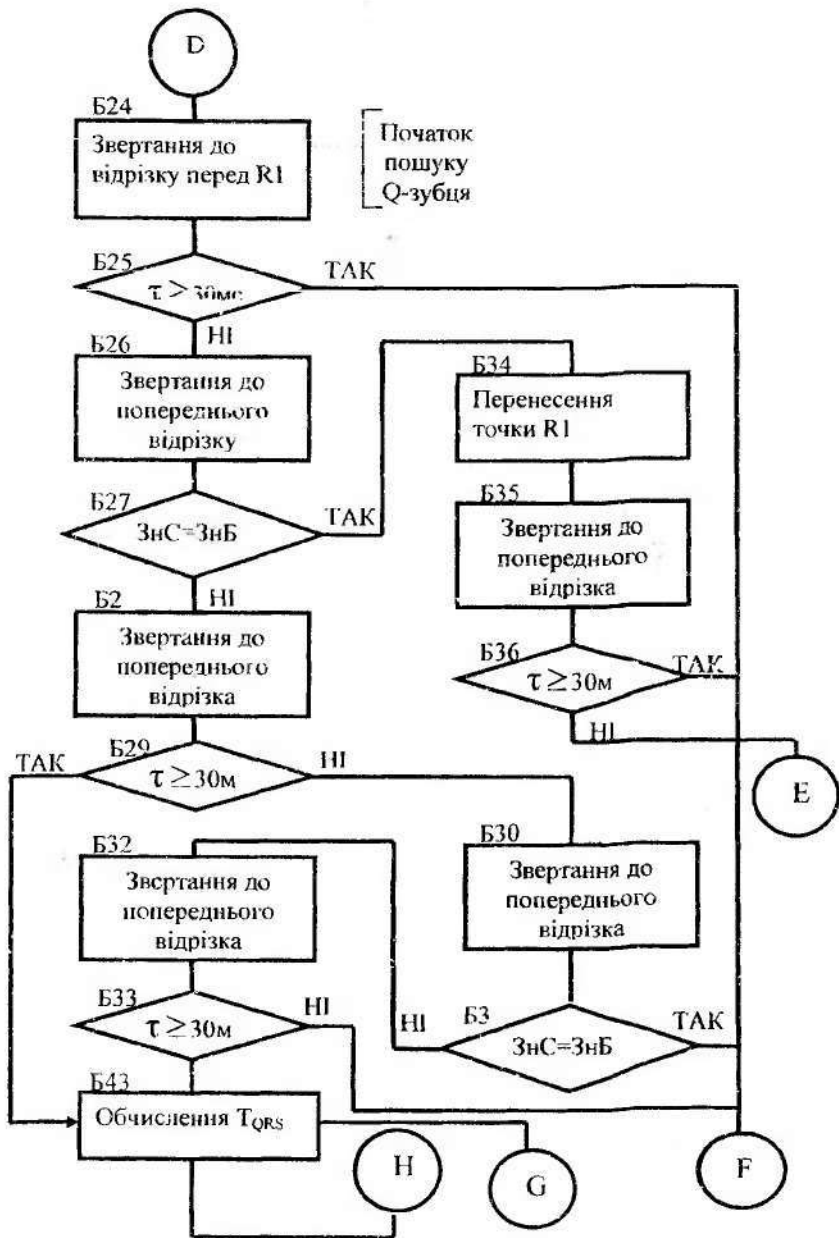
$$20 \text{ мс} < T(\text{QRS}) < 200 \text{ мс}; \quad T(\text{RR}) > 100 \text{ мс},$$

де  $T_{\text{QRS}}$  і  $T_{\text{RR}}$  – тривалість QRS-комплексу і розмір R-R інтервалу.

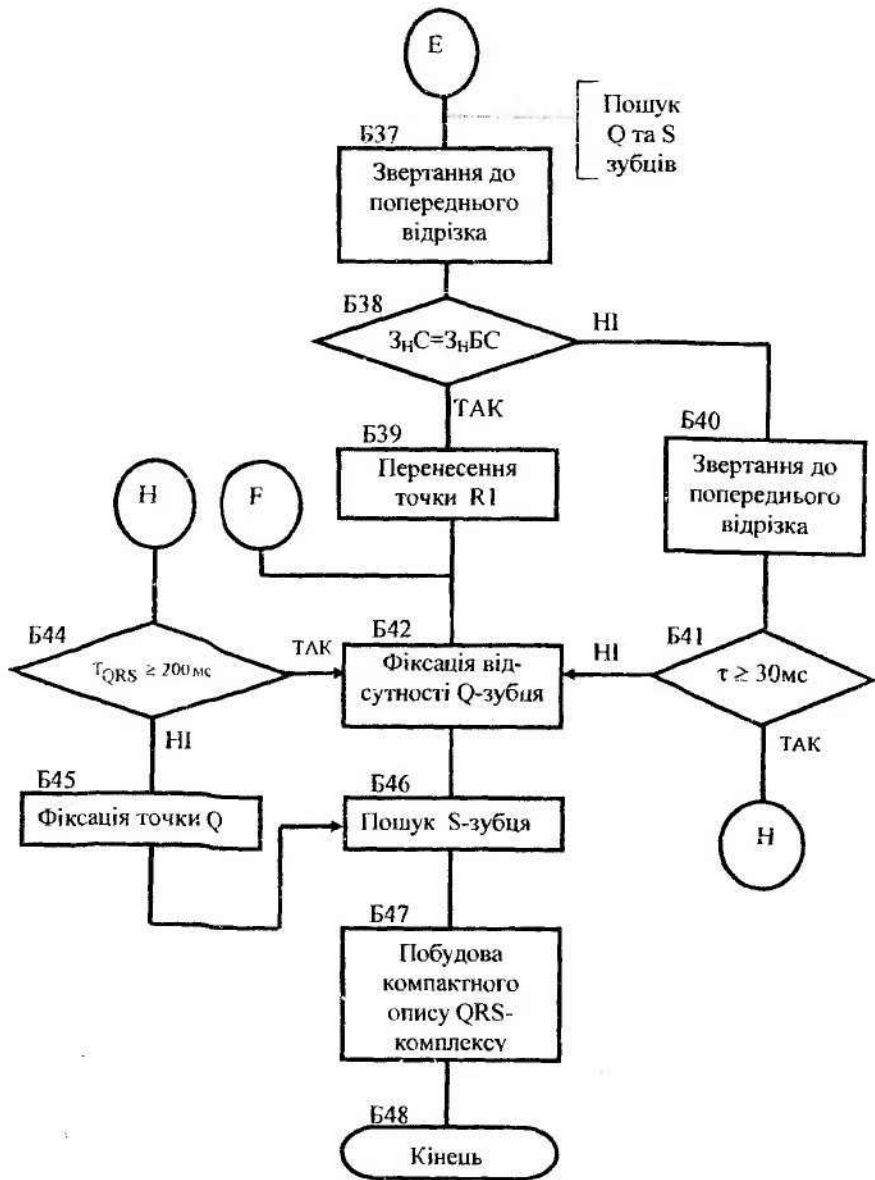




Продовження рис. 8.7



Продовження рис. 8.7



Продовження рис. 8.7

Якщо на деякому відрізку тривалістю більше трьох секунд не знайдено жодного QRS-комплексу, алгоритм формує одну з трьох ознак: NS – не знайдено жодного схилю; NBS – не знайдено жодного BC; NRW – не знайдено жодного R-зубця. Ці ознаки використовуються в подальшому алгоритмі аналізу небезпечних аритмій.

Останнім етапом алгоритму є формування компактного опису QRS-комплексу. При цьому розраховуються амплітуди і тривалість схилюв, які по'єднують знайдені характерні точки комплексу. В результаті на виході алгоритму QRS-комплекс описується дев'ятьма числами: чотирма парами 'амплітуда-тривалість' ( $A_1, T_1; A_2, T_2; A_3, T_3; A_4, T_4$ ) для схилюв і розміром RR-інтервалу  $T(RR)$  (рис. 8.8).

Якщо знайдені не всі характерні точки (зубці Q і S можуть бути відсутніми), то амплітуди і тривалості відсутніх схилюв вважаються рівними нулю.

## 8.4 Класифікація форми QRS-комплексу

### 8.4.1 Обчислення ознак форми QRS-комплексу

Даний алгоритм підготовляє інформацію, необхідну для подальшого аналізу QRS-комплексу і встановлення діагнозу.

Для чергового QRS-комплексу обчислюються такі параметри (рис.8.8):

P – площа QRS; S – ширина QRS; A – амплітуда QRS; C – зсув QRS щодо ізолінії.

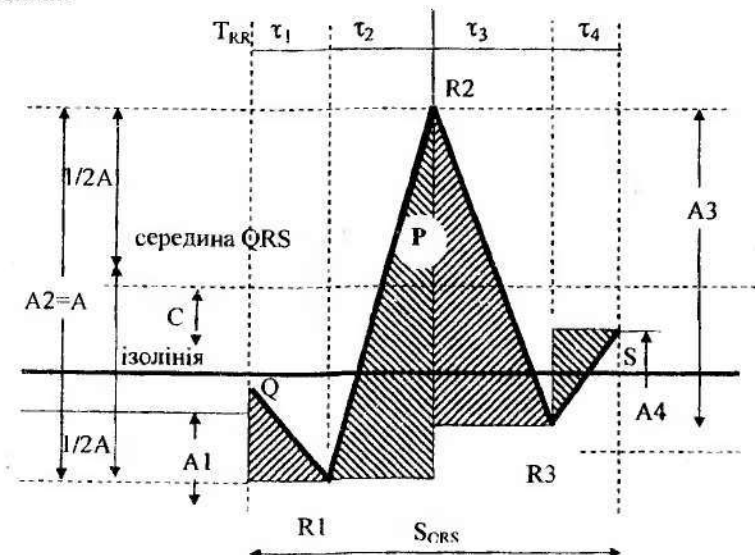


Рисунок 8.8 – Визначення параметрів QRS-комплексу

Розмах QRS :  $A = \max(Q, R1, R2, R3, S) - \min(Q, R1, R2, R3, S) \Rightarrow x_2$ .

Тривалість QRS :  $S_{QRS} = \sum_{i=1}^4 \tau_i \Rightarrow x_1$ .

Площа QRS :  $P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \tau_i \cdot A_i \Rightarrow x_3$ .

Зміщення QRS :

$C = \frac{\max(Q, R1, R2, R3, S) + \min(Q, R1, R2, R3, S)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 A_i \Rightarrow x_4$ .

$Q=0$ ;  $R1=A1$ ;  $R2=R1+A2$ ;  $R3=R2+A3$ ;  $S=R3+A4$ .

#### 8.4.2 Алгоритм режекції T-зубців

На рис. 8.9 наведена схема алгоритму режекції T-зубців, які помилково можуть бути прийняті за QRS-комплекси. Для розпізнавання T-зубців цей алгоритм використовує такі критерії:

- 1) попередній комплекс не має бути інтерпретований як T-зубець; розмір RR-інтервалу не повинен бути більш 300мс;
- 2) амплітуда A не може перевищувати амплітуди попереднього комплексу AJ1;
- 3) опис QRS-комплексу не має містити Q- і S-зубці;
- 4) для коефіцієнта KA, що характеризує співвідношення тривалостей і амплітуд аналізованого і попередніх комплексів, має виконуватися співвідношення

$$KA \geq KA2, DIS < KT; \quad KA \geq KA1, DIS \geq KT;$$

$$KA = \frac{A \cdot AJ1}{A \cdot SJ1}$$

де KA1, KA2, KT – постійні коефіцієнти;

$DIS = B1 \cdot |SJ1 - S| + B2 \cdot |AJ1 - A| + B3 \cdot |CJ1 - C| + B4 \cdot |PJ1 - P|$ ,

S, A, C, P і SA1, AJ1, CA1, PJ1 – відповідно тривалість, амплітуда, зміщення і площа для аналізованого і попереднього QRS-комплексів;

B1, B2, B3, B4 – коефіцієнти функції DIS, зміст і метод розрахунку якої описаний нижче;

TW – ознака розпізнавання T-зубця;

TT – виправлення до RR-інтервалу для комплексу, перед яким знайдений T-зубець;

JV – порядковий номер комплексу, що аналізується, від початку аналізу.

#### 8.4.3 Аналіз форми шлуночкового комплексу EKC

Для автоматичного аналізу ритму серця (зокрема, для розпізнавання шлуночкових і предсердних екстрасистол) необхідна інформація не тільки про

тривалість послідовних RR-інтервалів, але і характер форми (морфології) QRS-комплексів. Найбільш важливо при цьому визначити, чи є черговий комплекс фоновим (тобто нормальним) або викривленим, патологічним. У більшості відомих алгоритмів це завдання вирішується в два етапи.

Спочатку кожен *QRS-комплекс*, який аналізується, відносять до одного з класів морфології, а потім для кожного з отриманих класів приймається рішення про приналежність усіх його представників до якоїсь із заздалегідь заданих категорій (наприклад, до категорій «норма», «патологія» і «невизначеність»).

Для зіставлення форм *QRS-комплексів* і оцінки ступеня подібності їхніх морфологій, як правило, використовуються спеціальні ознаки форми, що можуть бути визначені як у часовій, так і в частотній областях. Значення цих ознак підставляються у вирішальні правила, на підставі яких із використанням емпірично підібраних порогів порівнювані комплекси можуть бути віднесені або до того самого класу морфології, або до різних класів, якщо ці комплекси досить сильно відрізняються за формою. Основною перевагою методів класифікації *QRS-комплексів*, які використовують ознаки форми комплексів, є їх відносно невисока обчислювальна складність. Недоліком даних методів можна вважати те, що порівняння форм *QRS-комплексів* виконується за побічно визначеними спрощеними параметрами, що може призводити до помилок, пов'язаних з недосконалістю способів визначення цих параметрів.

Іноді *QRS-комплекси* зіставляються за їхнім вхідним описом, який є послідовністю відліків. При цьому як критерій для порівняння використовуються або коефіцієнти взаємної кореляції, або ті чи інші показники, що дають наближену оцінку коефіцієнта кореляції. Використання кореляційних методів дозволяє досягати високої якості класифікації форм *QRS-комплексів*, але пов'язано це з досить суворими вимогами до швидкодії обчислювального пристрою, що дуже істотно для систем оперативного аналізу ЕКС. Крім того, виникає проблема надійного визначення опорної точки кожного *QRS-комплексу*, яка призначена для точного поєднання комплексів під час обчислення коефіцієнта взаємної кореляції.

Особливістю режиму аналізу ЕКС у реальному масштабі часу є те, що до моменту, коли виникає необхідність в аналізі форми чергового *QRS-комплексу*, алгоритм, як правило, не має в своєму розпорядженні повну інформацію про всі наявні класи форми у даній реалізації сигналу. Класи формуються динамічно, в міру надходження на вхід алгоритму відповідних даних. Крім того, в системах реального часу виключена можливість повторного перегляду аналізованої реалізації ЕКС, тобто прийняте алгоритмом рішення про характер форми чергового *QRS-комплексу* має бути *остаточним* і не може бути згодом уточнено.

ФУНКЦІЯ "DIS"

$$DIS = B1 \cdot |SJ1 - S| + B2 \cdot |AJ1 - A| + B3 \cdot |CJ1 - C| + B4 \cdot |PJ1 - P|$$

KA1=1,5  
KA2=2,0  
KT=2,2

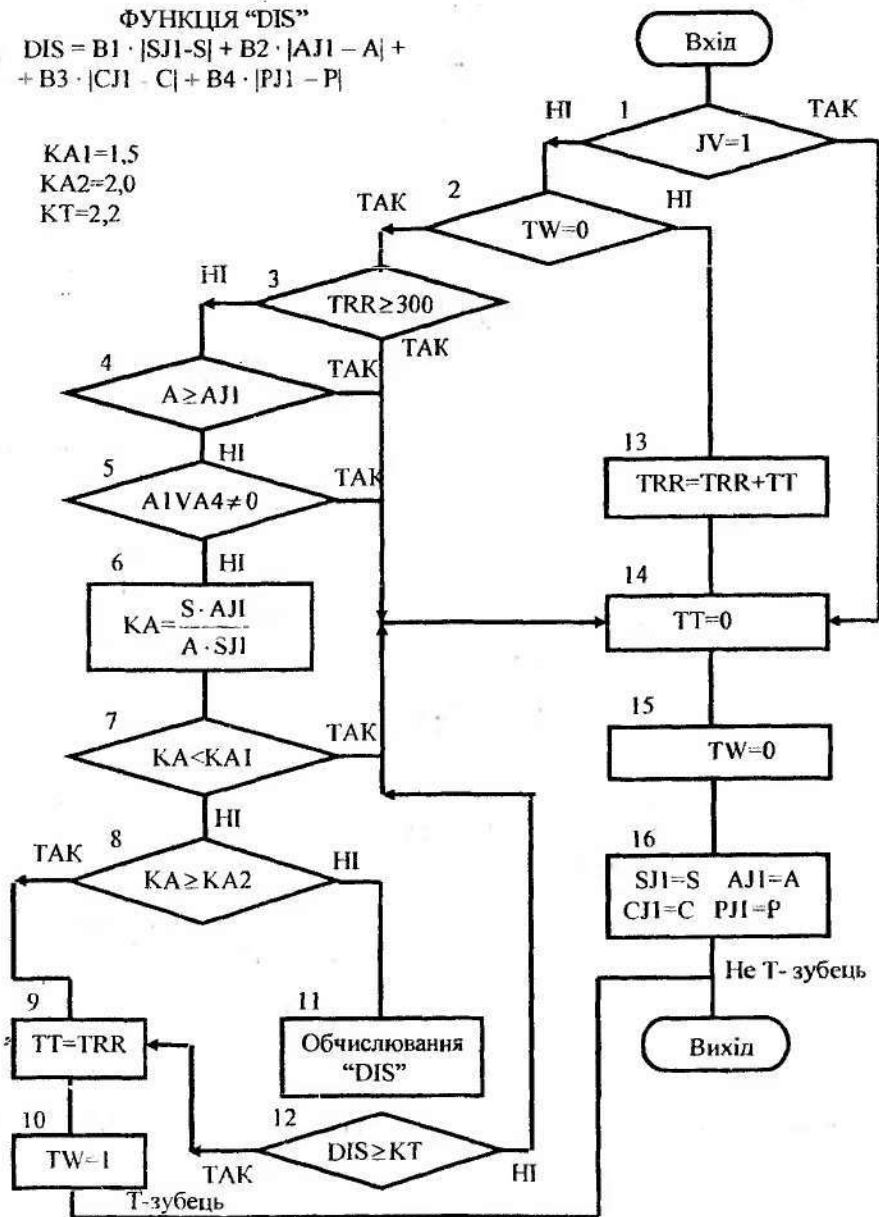


Рисунок 8.9 – Алгоритм режесції Т-зубців

Нижче описується конкретний алгоритм аналізу форми *QRS-комплексів* ЕКГ, орієнтований на використання в мікропроцесорному кардіомоніторі. Передбачається, що виявлення *QRS-комплексів* здійснюється алгоритмом на основі структурних методів розпізнавання способів, описаним раніше в цій главі. Опис кожного знайденого *QRS-комплексу* (рис. 8.8) надходить на вхід алгоритму аналізу форми у вигляді послідовних фрагментів (похилих відрізків прямої), кожен із яких визначається двома параметрами: розміром  $a_j$  зі знаком (різниця амплітуд двох сусідніх характерних точок) і тривалістю  $t_j$  (модуль різниці тимчасових координат точок початку і кінця кожного фрагмента). Перший і четвертий фрагменти опису *QRS-комплексу* можуть бути відсутніми. В цьому випадку відповідні параметри вважаються рівними нулю. Для кожного *QRS-комплексу* можна визначити ознаки форми відповідно до виразів

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \sum_{i=1}^4 t_i; \\
 x_2 &= \max_j \left( \sum_{i=1}^j a_i \right) - \min_j \left( \sum_{i=1}^j a_i \right), \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}; \\
 x_3 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 |a_i| \cdot t_i; \\
 x_4 &= \frac{1}{2} \left[ \max_j \left( \sum_{i=1}^j a_i \right) + \min_j \left( \sum_{i=1}^j a_i \right) - \sum_{i=1}^4 a_i \right], \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}.
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

де  $x_1$  і  $x_2$  – ширина і розмах *QRS-комплексу*;  $x_3$  – площа під кривою *QRS-комплексу*;  $x_4$  – зміщення *QRS-комплексу* щодо ізолінії.

Алгоритм динамічного кластерного аналізу форми шлуночкового комплексу припускає побудову кластерів за даними ознакам форми в поточному режимі. Кількість кластерів не перевищує  $N$ , а кожен з них поданий еталонним *QRS-комплексом* (еталоном)  $E^{(j)} = 1, 2, 3, \dots, N$  із параметрами  $E^{(j)} = (e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, e_3^{(j)}, e_4^{(j)})$ . Під час формування кластерів обчислюється мінімальна відстань  $D_m$  між еталонами і поточним *QRS-комплексом* за формулами

$$\begin{aligned}
 D_m &= \min(D_j); \\
 D_j &= \sum_{i=1}^4 B_i |x_i - e_i^{(j)}|, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

де  $B_i$  – постійні коефіцієнти нормування.

Віднесення поточного комплексу до деякого кластера здійснюється за результатами порівняння мінімальної відстані  $D_m$ , яка досягається на еталоні з номером  $m$  і порогом  $k$ , пов'язаним із розмірами кластерів. Якщо  $D_m \leq k$ , то комплекс відноситься до кластера з номером  $m$ . У протилежному випадку поточний *QRS-комплекс* утворить новий кластер або записується в  $m$ -й за наявності всіх  $N$  кластерів до моменту порівняння. Запис у кластер

визначається як повна заміна параметрів еталонного комплексу на параметри, кожен з яких обчислюється як середнє значення відповідних параметрів останніх  $L$  комплексів, віднесених до даного кластера (включаючи поточний  $QRS$ -комплекс). Отже, еталони постійно оновлюються з появою кожного нового шлуночкового комплексу. Після проходження кожної хвилини ті кластери, в які не було записано жодного представника, стираються.

В остаточному підсумку сформовані еталони розділяються на чотири класи з наданням кожному однієї з марок  $M \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Випадок  $M = 1$  відповідає нормальній формі  $QRS$ -комплексів,  $M = 2$  – патологічній, а  $M = 0$  і  $M = 3$  – проміжні варіанти. Для здійснення класифікації оновленого еталона в процесі утворення кластерів за формулами (8.11) додатково визначається мінімальна відстань  $D_{m_i}$  між поточним комплексом і еталонами з нормальною морфологією (досягається на еталоні з номером  $m_i$ ).

Класифікаційними ознаками для маркірування є такі: ширина еталонного  $QRS$ -комплексу  $S$ ; кількість представників  $G$ , які записані в кластер за попередню або поточну (у випадку відсутності даного кластера в попередній часовий інтервал) хвилину; і  $D_{m_i}$ . Маркірування здійснюється відповідно до таких логічних умов:

$$\begin{aligned} F_1 &= (D_{m_1} \leq K_1) \wedge (S \leq K_2) \wedge (G > K_3); \\ F_2 &= (D_{m_1} > K_1) \wedge (S \leq K_2) \wedge (G \leq K_3) \vee (S > K_2); \\ F_0 &= (D_{m_1} \leq K_1) \wedge (S \leq K_2) \wedge (G \leq K_3); \\ F_3 &= (D_{m_1} > K_1) \wedge (S \leq K_2) \wedge (G > K_3), \end{aligned}$$

де  $K_1, K_2, K_3$  – постійні коефіцієнти.

Еталону присвоюється марка  $M = j$  при виконанні умови  $F_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ .

Знак “ $\wedge$ ” означає кон'юнкцію, логічне множення.

В результаті кожний кардіоцикл подається трійкою параметрів  $J_i, M_i, T_{RR}$ , де  $J_i$  – номер кластера;  $M_i$  – марка еталона для  $i$ -го комплексу;  $T_{RR}$  – інтервал між  $i$ -им і попереднім  $QRS$ -комплексами.

Більш детально алгоритми аналізу форми  $QRS$ -комплексу розглянуті далі в розділі 9.

## 8.5 Алгоритми розпізнавання і діагностики аритмій

### 8.5.1 Перетворення $RR$ -інтервалів

Для аналітичної інтерпретації змін інтервалів при аритміях введемо кількісний показник  $Z(j)$ , що являє собою відношення поточного  $RR(j)$  інтервалу до наступного  $RR(j+1)$ .

Позначення  $RR$  інтервалів і  $QRS$ -комплексів наведені на рис. 8.10. Показник  $Z(j) = RR(j)/RR(j+1)$  квантується на п'ять рівнів відповідно до виразу

$$Z(j) \begin{cases} 1, & \text{якщо } Z(i) \geq 1,2; \\ 2, & \text{якщо } 1,2 \geq Z(i) \geq 1,1; \\ 3, & \text{якщо } 1,1 \geq Z(i) \geq 0,9; \\ 4, & \text{якщо } 0,9 \geq Z(i) \geq 0,8; \\ 5, & \text{якщо } Z(i) < 0,8, \end{cases}$$

де  $j$  – номер поточного інтервалу,  $Z(j)$  – номер рівня.

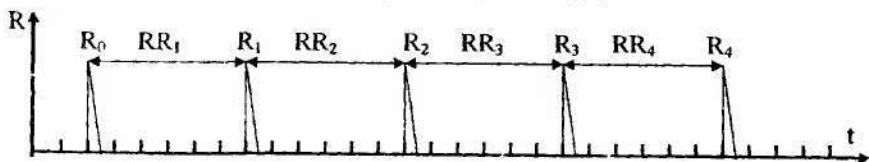


Рисунок 8.10 – Позначення RR-інтервалів і шлуночкових комплексів

Для виявлення деяких видів аритмій вводиться підрівень 1-го рівня змінної  $Z(j)$  позначений як шостий і обумовлений так:

$$Z(j)=6, \text{ якщо } \begin{cases} Z(i) \geq 1,4 \text{ при } T_{RRi} \leq 200 \text{ мс}; \\ T_{RRi} \geq 4,9 T_{RRi+1} - 500 \text{ мс при } T_{RRi} > 200 \text{ мс}. \end{cases}$$

Запис  $Z(2) = 5$  означає, що відношення другого RR інтервалу до третього відноситься до п'ятого рівня квантування, тобто  $RR(2)/RR(3) < 0,8$ .

### 8.5.2 Виявлення первинних аритмій

Виявлення первинних аритмій здійснюється в поточному режимі в міру виконання відповідних умов, записаних у вигляді логічних рівнянь. У цих рівняннях використовується привласнена QRS-комплексам відповідна марка ( $M = 0; 1; 2; 3$ ), яка була отримана в результаті проведеного вище кластерного аналізу (алгоритми класифікації).

Записи  $M(1) = 1, M(2) = 1, M(3) = 1, M(4) = 1$  означають, що всі чотири QRS-комплекси, які аналізуються, мають нормальну морфологію;  $M(2) = 2, M(3) = 2$  – другий і третій комплекси є патологічними;  $M(1) = 3, M(3) = 3$ , а також  $M(1) = 0, M(3) = 0$  – перший і третій QRS-комплекси займають проміжне положення між нормою і патологією.

Подамо первинні аритмії у вигляді логічних рівнянь:

1. Одиночна суправентрикулярна екстрасистола S1 (рис. 8.11)

$$S1 = [Z(1) = 1] \wedge [Z(2) = 5] \wedge [M(1) = 1] \wedge [M(2) = 1] \wedge [M(3) = 1].$$

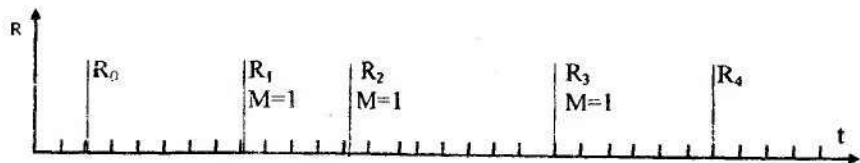


Рисунок 8.11 – Одиночна СВ екстрасистола S1

## 2. Одиночна шлуночкова екстрасистола S2 (рис. 8.12)

$$S2 = S_2^{(1)} \wedge S_2^{(2)} \wedge S_2^{(3)} \wedge S_2^{(4)};$$

$$S_2^{(1)} = [M(1) = 1] \wedge [M(2) = 2] \wedge [M(3) = 1] \wedge [Z(1) = 1, 2, 3] \wedge [Z(4) = 4, 5];$$

$$S_2^{(2)} = [M(1) = 1] \wedge [M(2) = 2] \wedge [M(3) = 1] \wedge [Z(1) = 6] \wedge [Z(2) = 4] \wedge [Z(3) \neq 5];$$

$$S_2^{(3)} = [M(1) = 1] \wedge [M(2) = 0, 2, 3] \wedge [M(3) = 1] \wedge [Z(1) = 1] \wedge [Z(2) = 5] \wedge [Z(3) = 5];$$

$$S_2^{(4)} = [M(1) = 3] \wedge [M(2) = 2] \wedge [M(3) = 3] \wedge [Z(1) = 1] \wedge [Z(2) = 5] \vee [Z(3) = 5].$$

В цих виразах запис  $M(1) = 1$  означає, що перший QRS-комплекс має марку  $M=1$ . Запис  $(M(2) = 0, 2, 3)$  – це спрощення заміни  $[M(2) = 0] \vee [M(2) = 2] \vee [M(2) = 3]$ . Так само читаються й інші аналогічні вирази.

Наприклад:

$$[Z(1) = 1, 2, 3] \equiv [Z(1) = 1] \vee [Z(1) = 2] \vee [Z(1) = 3].$$

На рис. 8.12а,б наведені випадки розташування QRS-комплексів і класи їхньої форми, що задовольняють умові  $S_2^{(1)}$ ; на рис. 8.12в – умові  $S_2^{(2)}$ ; на рис. 8.12г,д – умові  $S_2^{(3)}$ ; на рис. 8.13а,б – умові  $S_2^{(4)}$ .

На рисунках екстрасистола відзначена точкою.

## 3. Рання шлуночкова екстрасистола S3 (рис 8.14а,б).

$$S3 = [Z(1) = 6] \wedge H1 \wedge [M(2) = 2] \vee [M(2) = 3] \vee [Z(1) = 6] \wedge H2 \wedge (M(2) = 2) \vee (M(2) = 3).$$

У цьому рівнянні значення  $H1$  і  $H2$  визначаються такими виразами:

$$H1 = [M(1) = 1] \wedge [M(3) = 1] \wedge [Z(2) = 5];$$

$$H2 = [M(1) = 1] \wedge [M(3) = 1] \wedge [Z(3) = 5].$$

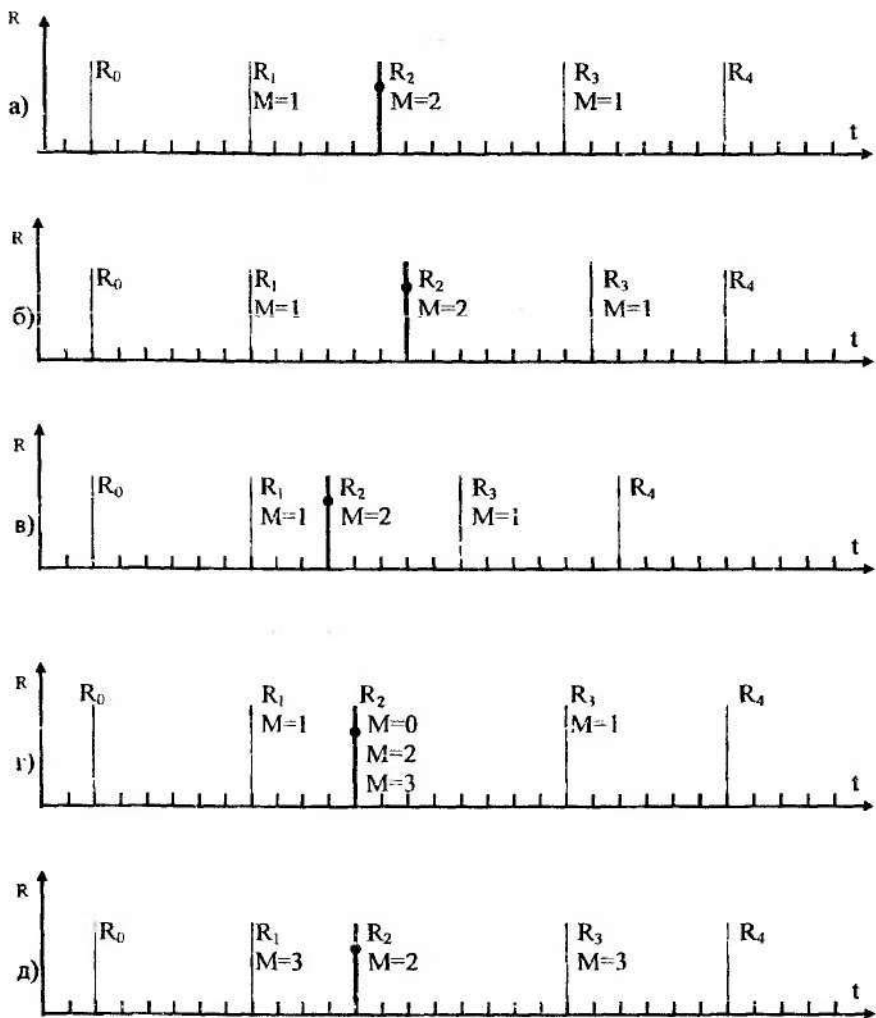


Рисунок 8.12 – Одиночна шлуночкова екстрасистола S2

#### 4. Парна шлуночкова екстрасистола S9 (рис 8.15)

$$S9 = \{ [Z(1) = 1] \vee [Z(1) = 2] \vee [Z(1) = 6] \} \wedge [M(1) = 1] \wedge [ (M(2) = 2) \vee (M(2) = 3) ] \wedge [ (M(3) = 2) \vee (M(3) = 3) ] \wedge [M(4) = 1].$$

5. **Групова** шлуночкова екстрасистола S4 (рис 8.16)

$$S4 = \{ [Z(i)=1] \vee [Z(i)=2] \vee [Z(i)=6] \} \wedge [M(1)=1] \wedge \bigwedge_{N=3}^5 \left\{ \bigwedge_{j=2}^N [(M(j)=2) \vee (M(j)=3)] \wedge [M(N+i)=1] \right\}.$$

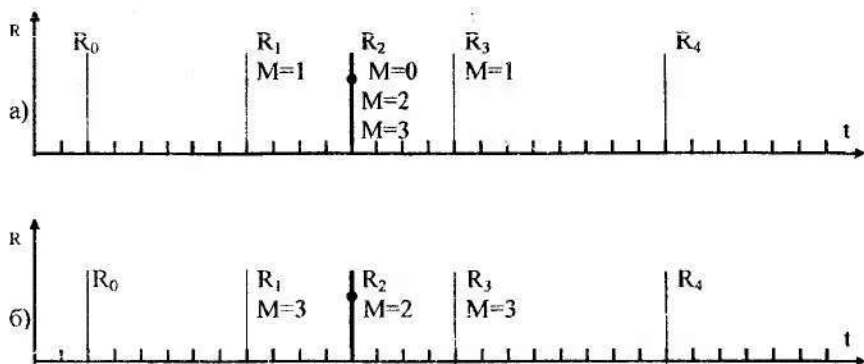


Рисунок 8.13 – Одиночна екстрасистола S2

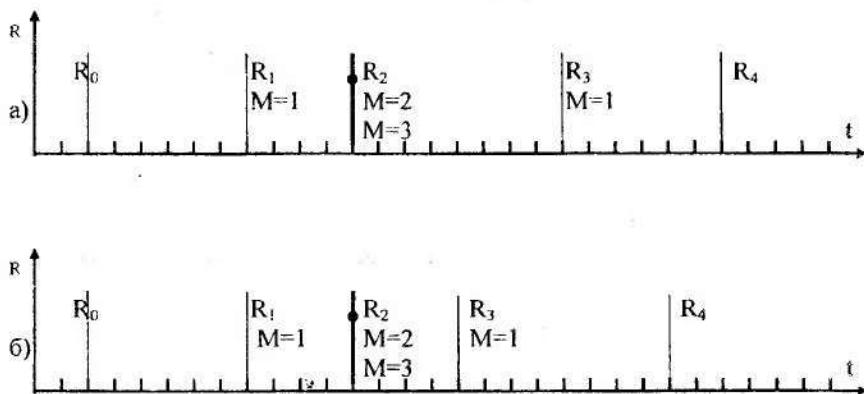


Рисунок 8.14 – Рання шлуночкова екстрасистола S3

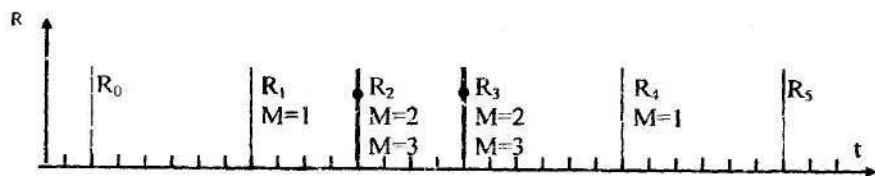


Рисунок 8.15 – Парна шлуночкова екстрасистола S9

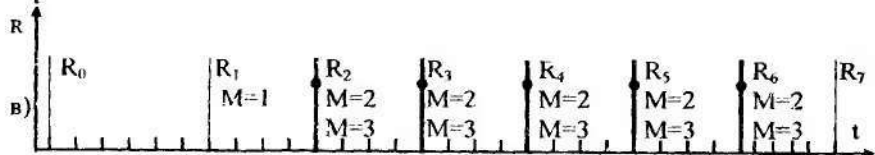
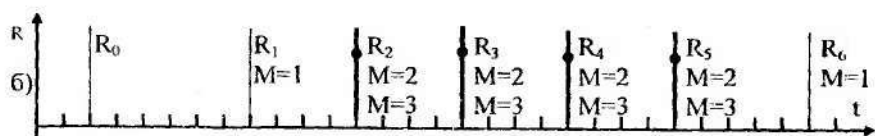
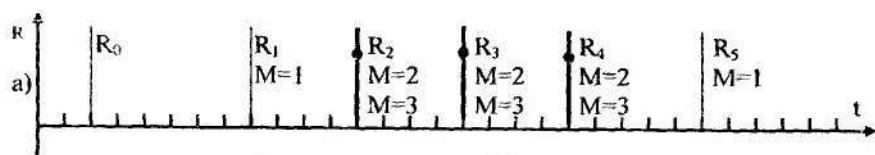


Рисунок 8.16 – Групова шлуночкова екстрасистола S4

6. Шлуночкова бігемія S5 визначається як одиночна шлуночкова екстрасистола вигляду (рис 8.17)

$$S5 = [Z(1) = 1] \wedge H1 \wedge [(M(2) = 2) \vee (M(2) = 3)] ,$$

що регулярно повторюється через один такт хоча б три рази підряд.

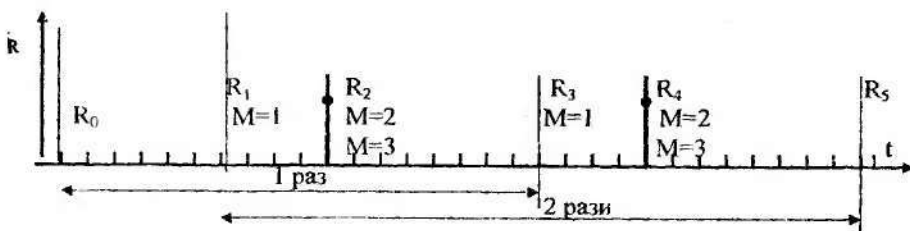


Рисунок 8.17 - Шлуночкова бігемія S5

7. Шлуночкова тригемінія S6 визначається як одиночна шлуночкова екстрасистола вигляду (рис 8.18)

$$S6 = [Z(1) = 1] \wedge H1 \wedge [(M(2) = 2) \vee (M(2) = 3)] \wedge [Z(3) = 1 \vee 2 \vee 3],$$

що регулярно повторюється через два такти хоча б три рази підряд.

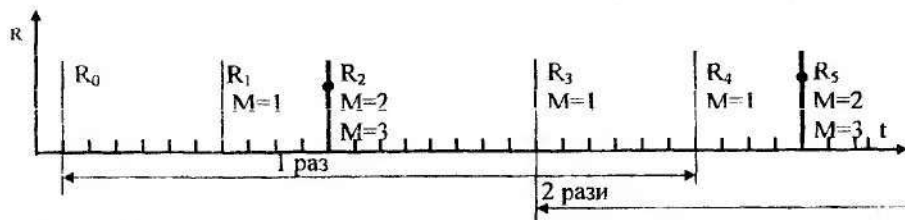


Рисунок 8.18 – Шлуночкова тригемінія S6

8. Випадання комплексу QRS S7 (рис 8.19)

$$S7 = [Z(1) \neq 1] \wedge [Z(2) = 5] \wedge [Z(3) = 1] \wedge \left\{ \bigwedge_{j=1}^3 [M(j) = 1] \right\}$$

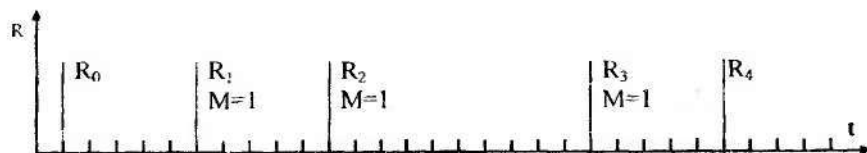


Рисунок 8.19 – Випадання комплексу QRS S7

### 8.5.3 Формування діагностичних висновків

Для формування остаточних діагностичних висновків крім виявлення аритмічних подій визначаються характеристики морфології QRS-комплексу, частоти і ритмічності серцевих скорочень на всьому інтервалі аналізу  $t_a$  (звичайне значення  $t_a$  складає 1 хвилину).

До цих характеристик відносяться такі:

*Нормальна форма всіх QRS-комплексів (NF):*

NF = {для всіх QRS-комплексів за  $t_a$  виконується умова  $M = 1$ };

*Аномальна форма всіх QRS-комплексів (AF):*

AF = {для всіх QRS-комплексів за  $t_a$  виконується умова  $M = 2$ };

*Властивість поліморфності (MF):*

MF = {за  $t_a$  еталони QRS-комплексів, для яких  $M = 2$ , зустрічаються хоча б один раз із різними індексами  $J_i$ }.

За частотою серцевих скорочень виділяються такі класи:

- брадисисто́лія (BR):  $BR = \{40 \leq ЧСС < 60\}$ ;
- нормасисто́лія (NR):  $NR = \{60 \leq ЧСС < 90\}$ ;
- тахісисто́лія (TL):  $TL = \{90 \leq ЧСС < 120\}$ ;
- виражена тахісисто́лія (TH):  $TH = \{120 \leq ЧСС\}$ .

Класи аритмічності визначаються так:

- слабка аритмічність (AL):  $AL = \{N_2/N_3 < 0,25\}$ ;
- середня аритмічність (AM):  $AM = \{0,55 > N_2/N_3 \geq 0,25\}$ ;
- сильна аритмічність (AH):  $AH = \{(N_2 + N_1)/N_3 > 0,55\}$ ,

де  $N_1, N_2, N_3$  – число подій  $b_1, b_2, b_3$  відповідно, що пройшли  $t_a$  за

$$b_1 = \{(Z_i = 2) \vee (Z_i = 4)\}, b_2 = \{(Z_i = 3)\}, b_3 = \{(Z_i = 1) \vee (Z_i = 5) \vee (Z_i = 6)\}.$$

Остаточні висновки формуються як частоти зустрічі або факт появи будь-яких аритмічних подій, а також як комбінації характеристик морфології, частоти і ритмічності проходження шлуночкових комплексів. До остаточних діагнозів відносяться частини надшлуночкових екстрасистол, якщо їхні появи більше 6 за 1 хвилину, частини шлуночкових екстрасистол, якщо їхня кількість за 1 хвилину перевищує 6, а також часті випадання QRS-комплексу, якщо кількість цих випадань за 1 хвилину перевищує 5.

Окремо відзначаються факти появи хоча б один раз за  $t_a$  ранніх, парних і групових екстрасистол із встановленням відповідних діагнозів. Якщо форма QRS-комплексу розрізняється хоча б у двох екстрасистол, які з'явилися за  $t_a$ , то алгоритм встановлює діагноз: поліморфна екстрасисто́лія. Бігемінія і тригемінія формуються як діагнози, якщо за  $t_a$  зустрінеться хоча б один епізод (події  $S_5, S_6$ ) їхнього виявлення.

Нижче наведені три приклади опису комплексних діагнозів за фоновими ритмами:

- брадисисто́лія регулярна з випаданням QRS-комплексів

$$F_1 = \{BR \wedge (AL \vee AM) \wedge (DR)\},$$

де  $DR = \{\text{кількість подій } S_7 \text{ за 1 хвилину перевищує } 5\}$ ;

- тахісисто́лія нерегулярна  $F_2 = TL \wedge AH$ ;
- нормасисто́лія регулярна  $F_3 = NR \wedge AL$ .

#### 8.5.4 Алгоритм розпізнавання небезпечних для життя аритмій

Алгоритм призначений для оперативного розпізнавання порушень ритму серця, що безпосередньо загрожують життю пацієнта: фібриляції шлуночків, асистолії, пароксизмальної тахікардії, пароксизмальної тахіаритмії. Основна вимога, яка висувається до алгоритму – надійне виявлення аритмій не пізніше, ніж через десять секунд після їх виникнення. Алгоритм (рис. 8.20) вводиться в дію після виявлення кожного QRS-комплексу, або за відсутності QRS-

комплексів за час більше трьох секунд. В останньому випадку алгоритм виявлення QRS-комплексів формує одна з трьох ознак:

- 1) NS – немає схилів;
- 2) NBS – немає великих схилів;
- 3) NRW – немає R-зубців.

Перша з цих ознак автоматично викликає формування діагнозу «Асистолія». В двох інших випадках спочатку починається спроба поліпшити умови виявлення QRS-комплексів за рахунок переключення параметрів алгоритмів стиснення і пошуку QRS-комплексів, для чого використовується змінна Q:

$$Q = \begin{cases} 0, & \text{використовується основний набір параметрів;} \\ 1, & \text{параметри змінюються.} \end{cases}$$

Якщо при змінених параметрах знову немає QRS-комплексів, то це розцінюється так само як «Асистолія». Якщо після зміни параметрів відновлюється нормальне виявлення QRS-комплексів, то це свідчить про низьку амплітуду сигналу на вході аналізатора, який відображається установкою ознаки LA = 1.

Розпізнавання інших небезпечних аритмій побудовано на основі аналізу трисекундних відрізків ЕКС. Якщо наведена до однієї хвилини середня частота ритму за цей проміжок часу відповідає таким умовам: FRZ > 180 скорочень у хвилину або FRZ < 40 скорочень у хвилину, то формується діагноз «Фібриляція» або «Асистолія» (оскільки діагноз «Сильна брадикардія» включений у визначення асистолії). Крім цього для розпізнавання фібриляції введені додаткові умови:

- 1) більш ніж три R-R мають тривалість T(RR) < 300мс;
- 2) симетрична форма коливань ЕКС при середній частоті не менше 140 скорочень у хвилину.

Критерієм симетричності є середній коефіцієнт заповнення

$$KZS = \frac{KZ}{NRZ},$$

де KZ – сума коефіцієнтів заповнення KZJ за аналізований n-ятисекундний інтервал, який обчислюється для кожного QRS-комплексу за формулою

$$KZJ = \frac{T_3 + T_4}{T(RR)},$$

де T<sub>3</sub>, T<sub>4</sub> – параметри компактного опису QRS-комплексу (рис. 8.7);

NRZ – число QRS-комплексів за останні три секунди.

Зміст коефіцієнта в тому, що під час фібриляції, коли форма сигналу близька до синусоїди з частотою 2-9 Гц, значення KZS наближається до 0,5, тоді як для нормального ритму воно в декілька разів нижче. На рис. 8.20 використані такі умовні позначення:

AS – ознака асистолії або сильної брадикардії;

FV – ознака фібриляції шлуночків або параксизмальної шлуночкової тахікардії;

Q – ознака переключення параметрів алгоритму стискання ЕКС і погіршу  
QRS-комплексу;

LA – ознака низької амплітуди ЕКС;

T3, T4, T(RR) – параметри компактного списання QRS-комплексу;

NS, NBS, NRW – ознака відсутності протягом трьох секунд схилів,  
«великих» схилів, R-зубців;

FRZ – середня частота ритму за три секунди;

NRZ – число QRS-комплексів за три секунди;

MNR – число R-R інтервалів за три секунди, для яких T(RR) < 300 мс;

TAL – час від початку чергової трисекундної дільниці;

KZ – сумарний коефіцієнт заповнення;

KZJ – коефіцієнт заповнення окремого QRS-комплексу;

KZS – середнє за три секунди значення KZJ;

KZM – межове значення KZS.

### 8.5.5 Алгоритм обробки ЕКГ при електрокардіостимуляції

Оцінка ефективності електрокардіостимуляції в даному алгоритмі заснована на зіставленні часового положення стимулюючих імпульсів і QRS-комплексів ЕКГ. У зв'язку з цим на першому етапі алгоритму, наведеного на рис. 8.21, виконується формування фрагмента ЕКГ, що складається з трьох подій. Під подією розуміється або QRS-комплекс, або стимулюючий імпульс. Вигляд основного фрагмента, що аналізується, наведений на рис. 8.22. У випадку появи фрагмента  $\alpha$  (два підряд стимулюючих імпульси) установлюється порушена (неефективна) стимуляція. В основному аналізованому фрагменті здійснюється обчислення часу TC і TB.

Якщо  $TC < 400$ , то фіксується фрагмент типу S. У протилежному випадку і за умови  $TB > 300$  – фрагмент типу Z. У залежності від кількості таких фрагментів (NR і NS) алгоритм установлює порушення  $\beta$  і  $\gamma$  (інтерференція ритмів).

Узагальнені умови діагнозу виглядають так:

$$S = TC \leq 400, r = TC > 400 \wedge TB > 300, \beta = NR > 4, \\ \gamma = NR \leq 4 \text{ і } NS > 8 \text{ за час аналізу } t_a.$$

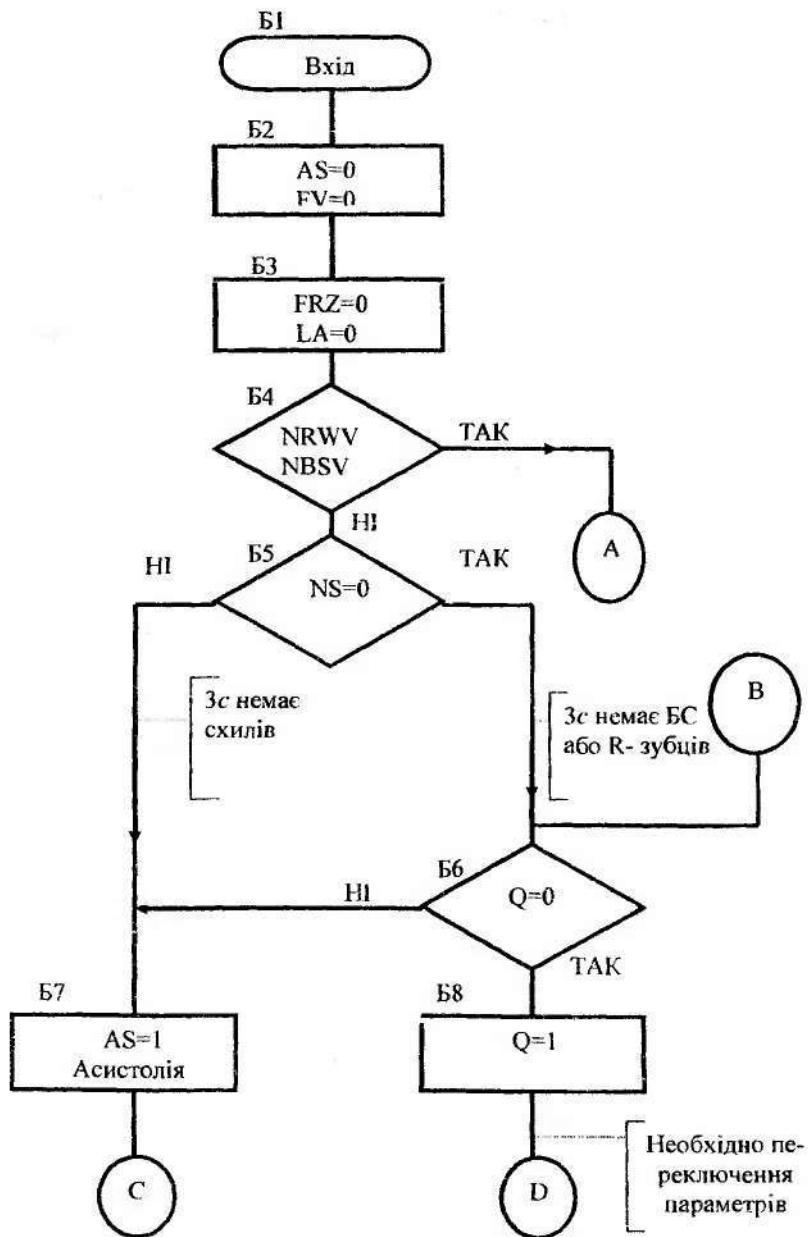
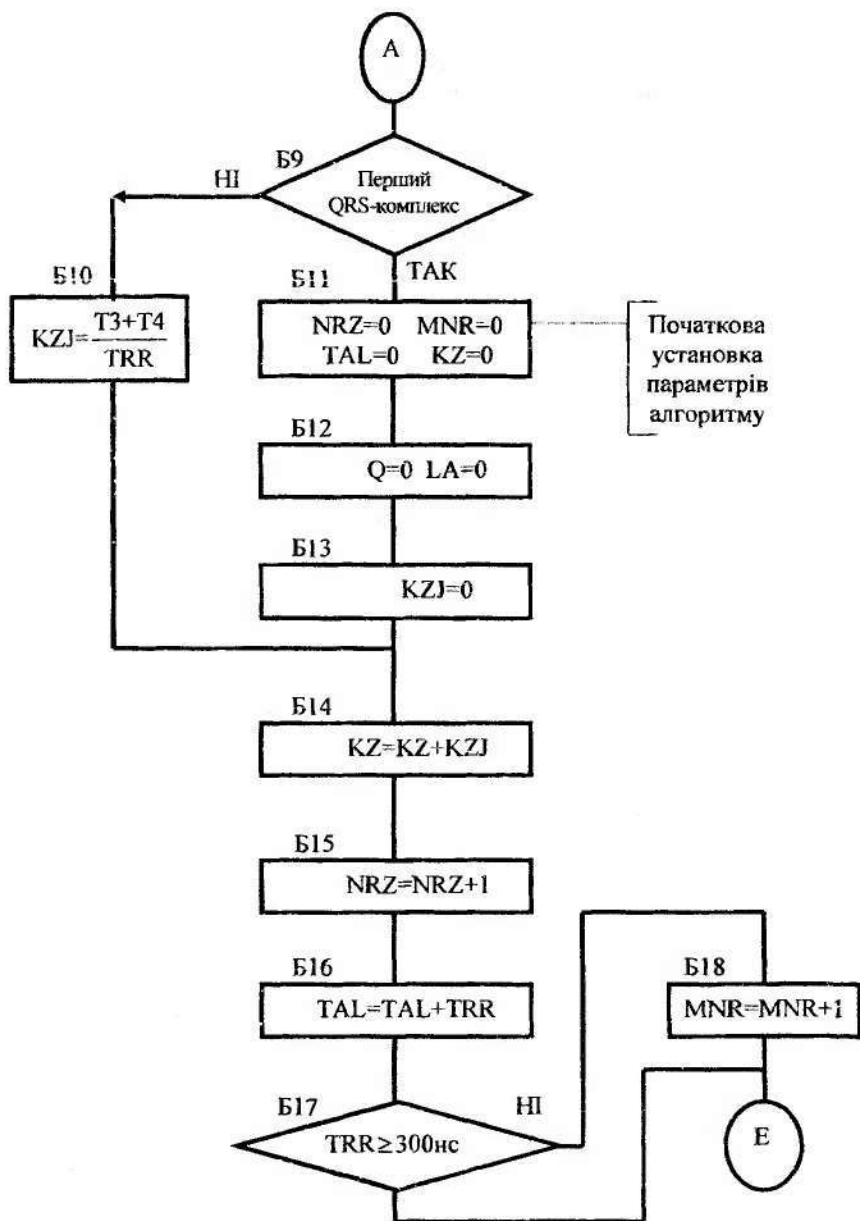
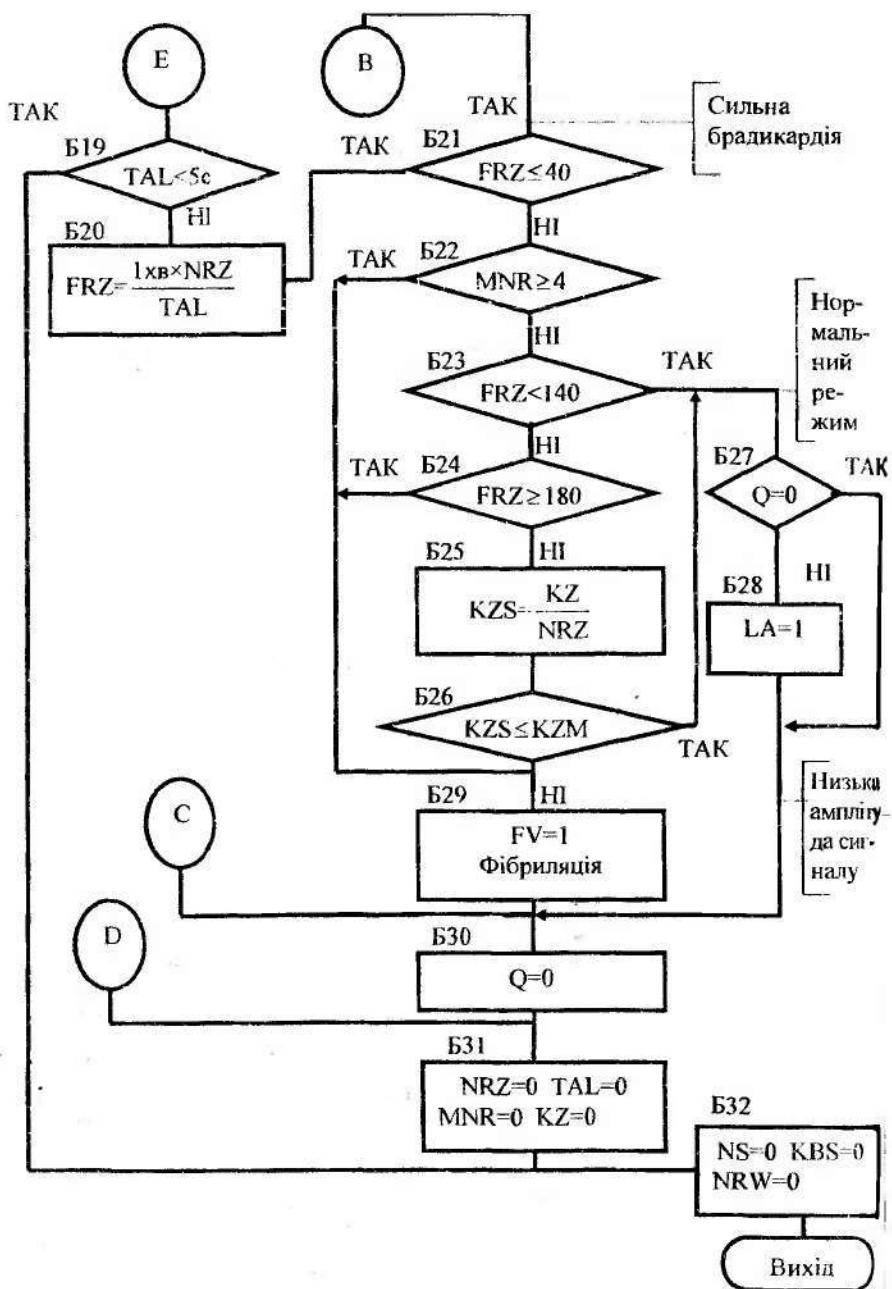


Рисунок 8.20 – Алгоритм аналізу небезпечних аритмій



Продовження рис. 8.20



Продовження рис. 8.20

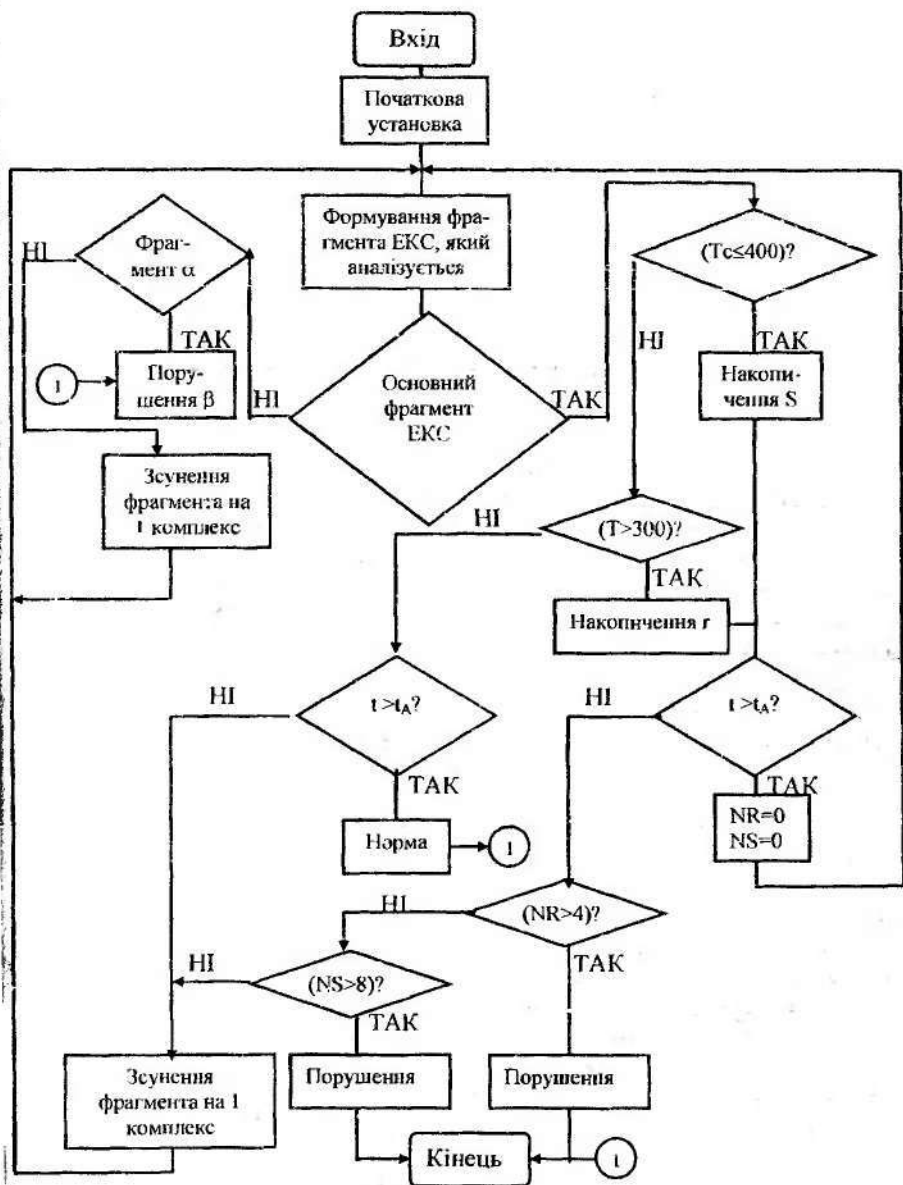


Рисунок 8.21 – Схема алгоритму обробки ЕКГ під час електрокардіостимуляції

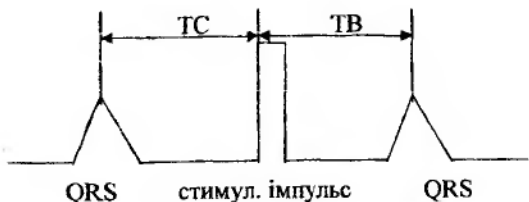


Рисунок 8.22 – Вид основного фрагменту, що аналізується

## 8.6 Алгоритми аналізу ЕКГ під час фізичного навантаження

### 8.6.1 Зміна ЕКГ під час навантаження

Фізичне навантаження по-різному впливає на організм, що викликає великі потреби міокарда в кисні. У здорової людини це спричиняє збільшення легеневої вентиляції, хвилинного об'єму крові, зростання витягу кисню тканиною і розширення кровоносних судин. Під час порушення коронарного кровообігу зростання потреби міокарда в кисні призводить до гострої коронарної недостатності, яка супроводжується нападом стенокардії й змінами структури ЕКГ, які вказують на появу в серцевому м'язі частин ішемії.

Для раннього виявлення ознак ішемічної хвороби серця (ІХС) широко використовують динамічний аналіз ЕКГ під навантаженням. Функціональні дослідження, що проводяться, дозволяють знайти за ЕКГ скриті порушення, які частіше не з'являються в стані спокою. Це має велике значення для клінічної медицини під час проведення диференційної діагностики захворювань серця, профілактики обстежень з метою раннього виявлення патології, а також для фізичної реабілітації хворих. Дозовані навантаження використовують також для спеціальних обстежень, коли необхідно вивчити рівень та динаміку фізичної працездатності людини-оператора, визначити ступінь функціональної стійкості серцево-судинної системи. Головним діагностичним критерієм, який використовується для пошуку й аналізу перших ознак ІХС, є ішемічне зміщення ST-сегмента, яке супроводжується специфічними змінами його форми. Ці зміни з'являються під час зростання (елевації) або зниження (депресії) цього сегмента не менше, ніж на 0,1 мВ відносно ізоелектричної лінії. Специфічні зміни ЕКГ у першому випадку з'являються лише в процесі навантажувальних проб. Вони є короткочасними, але стан при цьому загрожує життю хворого і потребує вживання негайних заходів. В інших випадках ознаки ІХС з'являються, незважаючи на фізичне навантаження, в спокої, частіше в нічний час. Все це потребує безперервного автоматичного аналізу ЕКГ для виявлення ІХС під час функціонального обстеження та цілодобового спостереження.

Перехід до автоматичної обробки ST-сегмента значно розширює діагностичні можливості методу аналізу ЕКГ під час навантаження, оскільки він забез-

печує безперервний контроль і оперативну діагностику стану хворого. Під час безперервного спостереження за станом хворого, оператори в процесі професійної діяльності виконують складні та кропіткі обчислення діагностичних параметрів, досліджують залежність їх від тривалості навантаження, що сприяє більшій точному й об'ємному аналізу зміни стану організму в оперативному режимі.

Алгоритми аналізу навантаженої ЕКГ будують за схемою лікарської логіки, але до них висуваються жорсткі вимоги, виконання яких забезпечує оперативність обробки й високої якості аналізу сигналу. Ці вимоги реалізуються в реальному масштабі часу, що викликає високу швидкість, завадоперешкодність, надійність роботи в умовах значних діагностичних навантажень, а також достатню точність вимірів і подальшого аналізу.

### *8.6.2 Основні етапи вимірювання та аналізу параметрів ST-сегмента*

Алгоритми обробки навантаженої ЕКГ базуються на формалізації основних етапів лікарського алгоритму. Вони реалізовані у вигляді послідовності визначених цільових процедур і звичайними діями проводять традиційну схему автоматичної обробки ЕКГ. Звичайна схема комп'ютерної обробки ЕКГ включає попередню обробку сигналу, зменшення високочастотних шумів і наводки мережі, що призводить до надійного виявлення QRS-комплексів. Послідовний аналіз форми шлуночкового комплексу і тривалості RR-інтервалів дає можливість оцінити ритм серцевої діяльності.

Під час дослідження з фізичним навантаженням на корисний ЕКГ-сигнал накладаються додаткові шуми різного походження, які значно викривляють його форму. ST-сегмент є низькочастотним та низькоамплітудним елементом кардіоциклу, тому аналіз його значно ускладнений в умовах низькочастотного дрейфу ізоїнії сигналу. Цей дрейф може бути викликаний нещільним накладанням електродів, дихальними рухами хворого й іншими ознаками. Апаратурні способи усунення цих коливань ізоїнії призводять до істотних викривлень ST-сегмента, оскільки їхні спектри перекриваються. Для ефективного розв'язання цієї задачі можна використовувати аналітичні підходи, які базуються на сплайн-інтерполяції й методах цифрової фільтрації.

Після корекції дрейфу ізоїнії, з метою подальшого покращення відношення сигнал – шум, проводиться усереднення типових для хворого кардіокомплексів за 8 кардіоциклами. Через швидке проведення ішемічних вимірів ST-сегмента при деяких хворобах (наприклад, стенокардії, неврозі міокарда) вибір великої кількості кардіоциклів для усереднення недоцільний.

На цьому етапі усереднення важливим моментом є організація синхронного накопичення. Найчастіше застосовують накопичення з розташуванням точки з максимальною амплітудою QRS-комплексу. Найчастіше точка TC обирається на вершині R-зубця.

У випадку автоматичного вибору опорної точки на піку великого S-зубця, **помилка** в локалізації характерних точок кардіоциклу не відбувається за рахунок використання спеціальних пошукових процедур.

Класичними лікарськими параметрами для аналізу змін ST-сегмента під впливом навантаження вважають його положення (рівень)  $A_{ST}$ , спрямованість (нахил)  $H_{ST}$ , тип форми й площу між ним та ізолінією  $P_{ST}$  (рис. 8.23).

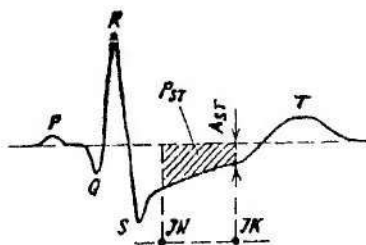


Рисунок 8.23 – Параметри ST-сегмента ЕКГ

Для дискретного подання сигналу параметри ST-сегмента розраховують-ся так:

- 1) рівень ST-сегмента (мВ)

$$A_{ST} = y(i_{JK}) - A_{UI},$$

де  $y(i)$  – значення  $i$ -го відрахунку усередненого кардіоциклу;  $i_{JK}$  – координата точки  $JK$  кінця ST-сегмента у відрахунках;  $A_{UI}$  – рівень ізолінії;

- 2) нахил ST-сегмента (мВ/с)

$$H_{ST} = \frac{y(i_{JK}) - y(i_{JN})}{(i_{JK} - i_{JN})\Delta t},$$

де,  $i_{JN}$  – координата точки  $JN$  початку ST-сегмента у відрахунках;  $\Delta t$  – інтервал дискретизації;

- 3) площа ST-сегмента (мВ·с)

$$P_{ST} = \sum_{i=i_{JN}}^{i_{JK}} [y(i) - A_{UI}] \Delta t.$$

Наведемо кроки узагальненого алгоритму:

1. Зчитування чергового фрагмента поточного сигналу.
2. Фільтрація завади мережі, височастотних шумів і високоамплітудних викидів.
3. Якщо остаточний рівень шумів високий або є виходи за межі динамічного діапазону АЦП, то хід на 23.

4. Знаходження QRS-комплексів.
5. Розпізнання нормальних кардіокомплексів від ектопічних нетипових скорочень і Т-зубців, неправильно прийнятих за QRS-комплекси.
6. Хід на 23, якщо нормальний QRS-комплекс не знайдений.
7. Аналіз сигналу на наявність небезпечних аритмій (фібриляція шлуночків, пароксизмальна тахікардія, PVB).
8. Якщо знайдена небезпечна аритмія – хід на 23.
9. Пошук ізоелектричного відрізка на PQ-сегменті поточного нормального кардіоциклу.
10. Якщо ізоелектричний відрізок не знайдений – хід на 23.
11. Корекція дрейфу ізолінії сигналу на його поточному сегменті.
12. Синхронне накопичення 8 послідовних нормальних скорочень в буфері, розміром 400 мс.
13. Якщо накопичення не закінчене – хід на 23.
14. Розрахунок ординат усередненого кардіоциклу і відповідного йому усередненого значення RR-інтервалу.
15. Пошук ізоелектричного відрізка на PQ-сегменті усередненого кардіоциклу.
16. Якщо такий відрізок не знайдений – хід на 23.
17. Вимірювання рівня ізолінії  $A_{UI}$ .
18. Пошук точки початку ST-сегмента – JN.
19. Якщо точка JN не знайдена – хід на 23.
20. Розрахунок координат точки кінця ST-сегмента.
21. Розрахунок діагностичних параметрів ST-сегмента  $A_{ST}$ ,  $H_{ST}$ ,  $P_{ST}$ .
22. Аналіз типу форми ST-сегмента.
23. Діагностичне повідомлення про результати аналізу та відмови.
24. Якщо запис ЕКГ продовжується, то перейти до 1.
25. Формування звіту, який містить результати обробки сигналу у вигляді графіків вимірювання параметрів ST-сегмента. Діагностичне повідомлення.

### 8 б 3 Алгоритм вимірювання ізоелектричної лінії

Пошук точки  $U_1$ , в якій вимірюється рівень ізолінії  $A_{UI}$  виконується на PQ-сегменті усередненого кардіоциклу. Алгоритм реалізує пошукову процедуру у вікні заданого розміру. Розмір вікна та його межові зони пошуку ( $G_1$ ,  $G_2$ ) вибрані за результатами експериментів.

Закінчення PQ-сегмента (між PQ-інтервалом і початком QRS-комплексу) знаходяться від піка R-зубця на відстані, яка дорівнює тривалості так званого інтервалу внутрішнього відхилення (IBV). У нормі IBV триває від 0,03 до 0,05 с та відноситься до фази асинхронного скорочення (АС) циклу серцевого скорочення (ЧСС) і визначаються, в основному, станом обміну речовин в міокарді та наявністю в ньому склеротичних змін. Тривалість фази АС коливань в нормі від 0,04 до 0,07с і в середньому дорівнює 0,05с.

Виходячи з цього, права межа зони пошуку G1 обирається на фіксованій відстані від піка R-зубця, яка дорівнює 10 .

При збільшенні ЧСС тривалість PQ-інтервалу й відповідно PQ-сегмента помітно скорочується. Тому, щоб виключити можливість влучання на R-зубець, вибір лівої межі G2 зони виконується з урахуванням змін ЧСС. На рис. 8.24 наведені експериментальні дані, які показують зв'язок між RR-інтервалом та інтервалом TPQR (інтервалом між піком R-зубця і центром ізоелектричного відрізка).

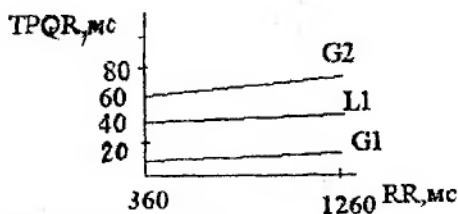


Рисунок 8.24 – Експериментальна залежність відстані TPQR від RR-інтервалів

За цими даними побудована лінія регресії L1, згідно з якою розраховано положення лівої межі пошуку

$$G2 = 50 + 0,03 \cdot RR, \text{ мс}.$$

Пошук проводиться шляхом переміщення вікна розміром 10 мс справа наліво й складається з двох етапів. Спочатку в зоні пошуку з'ясовується таке положення вікна, при якому максимальний розмах A значення сигналу не перевищує заданого порога AF. Як тільки таке положення знайдено, відповідний відрізок PQ визначається як рівний. Далі продовжується переміщення вікна вліво до межі G2 в пошуках більш рівного відрізка, розмах сигналу для якого мінімальний. Для заданого відрізка виставляється ознака знаходження ізоелектричної лінії й обраховуються координати ізоелектричної точки. Абсциса цієї точки обирається в середині вікна, а рівень  $A_{UI}$  розраховується як середнє значення ординат усіх точок вікна. У випадку, якщо жодне положення не відповідає критерію рівності, виставляється ознака відмови від подальшої обробки через високий рівень шумів на ізоелектричному відрізку. Для роботи алгоритму необхідна подальша вихідна інформація, масив значень усередненого кардіоциклу, відповідне йому середнє значення RR-інтервалу, координати його опорної точки TC (піки R-зубця), значення порогу гладкості AF.

Кроки алгоритму мають такий вигляд:

- 1 Початкове встановлення внутрішніх змінних.
- 2 Розрахунок G1, G2 для поточного значення середнього RR-інтервалу.
- 3 Розрахунок поточної координати лівої межі вікна.

- 4 Розрахунок розмаху сигналу  $A$  та сумарної амплітуди його точок.
- 5 Якщо  $A > AF$ , тоді перейти до 9.
- 6 Оновлення значень порогу гладкості  $AF$  згідно з розмахом сигналу у вікні.
- 7 Розрахунок координат ізоелектричної точки  $UI$  в цьому вікні.
- 8 Виставлення ознаки знаходження  $UI$ .
- 9 Просунення вікна на один розрахунок вліво.
- 10 Якщо  $G2$  не досягнуто, то перейти до 3.

#### 8.6.4 Алгоритм знаходження кордону ST-сегмента

##### 1. Пошук точки початку ST-сегмента

Пошук точки  $JN$  здійснюється також шляхом переміщення вікна даного розміру до знаходження такого його положення, яке відповідає умові гладкості

$$AFJ \geq A,$$

де  $A$  – розмах сигналу у вікні;

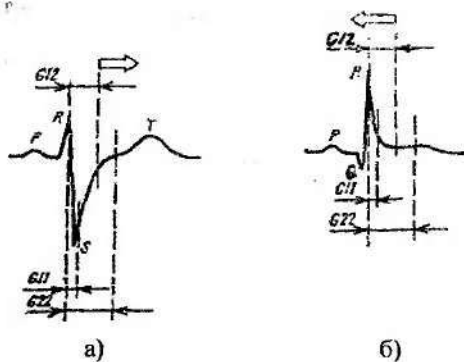
$AFJ$  – поріг гладкості.

Поріг  $AFJ$  вибраний на основі експериментальних досліджень записів ЕКГ. За точку  $JN$ , незалежно від напрямку пошуку, обирається права межа вікна. Зона пошуку розташована на відстані від 22 до 90 мс справа від точки  $TC$ . Її межі ( $G11$ ,  $G22$ ) вибрані за результатами побудови гістограми відстані  $RJ$  від точки  $TC$  (піку  $R$ -зубця) до точки  $JN$  для 1455 нормальних скорочень ЕКГ-реалізації. Відстань  $RJ$  приблизно відповідає фазі ізометричного скорочення середнього циклу, залежність якого від ЧСС нечітко виражена.

Пошук точки  $JN$  організовано так. Початкова координата лівої межі вікна  $J12$  вибрана 50 мс як найбільш імовірне значення відстані  $RJ$ . Розмір вікна дорівнює 10 мс. Якщо розмах сигналу у вікні перевищує заданий поріг, то вона переміщується вправо до знаходження такого положення вікна, яке відповідає критерію гладкості. Випадок такого пошуку показаний на (рис. 8.25, а).

Якщо умови гладкості виконуються ще у початковому положенні вікна, то воно зміщується вліво до досягнення такого його положення, при якому розмах сигналу у вікні перевищує поріг  $AF$ . Тоді початком ST-сегмента приймається координата правої межі вікна в його попередньому положенні. Такий напрямок пошуку спостерігається найчастіше за відсутності  $S$ -зубця (рис. 8.25, б).

У випадку, коли точка  $JN$  не знайдена, приймається рішення про відмову від аналізу ST-сегмента через високий рівень шумів і встановлюється відповідна ознака.



а) пошук вправо; б) пошук вліво

Рисунок 8.25 – Пошук точки початку ST-сегмента:

а) пошук вправо; б) пошук вліво

## 2. Знаходження точки кінця ST-сегмента

Рівень зсуву ST-сегмента відносно ізолінії  $A_{ST}$  під час діагностики ІХС має вимірюватися в його кінцевій точці. Рекомендації щодо вибору точки JK неоднозначні, але залежність тривалості ST-сегмента від ЧСС цілком визнана. Для знаходження вигляду цієї залежності була збудована гістограма тривалості ST-сегмента JKJN за верифікованими ЕКГ даним з СБД, яка містить 1455 нормальних скорочень, а також експериментальна залежність відстані JKJN від величини RR-інтервалу для еталонних кардіокомплексів, обраних лікарем-кардіологом. Аналіз цих даних показує, що вибір точки JK на фіксованій відстані (як правило, беруть 80 мс) від точки JN у випадку тахікардії (ЧСС більше, ніж 90 уд/хв) частіше спостерігається під час проведення навантажених проб, що призводить до влучання T-зубця кардіоциклу і неправильному вимірюванню рівня ST-сегмента. Правильним слід вважати вимірювання його на відстані, що залежить від ЧСС, наприклад, яка ступінчасто змінюється. За залежністю відстані JKJN, яка визначає тривалість ST-сегмента від величини RR-інтервалів, збудована лінія регресії і отримана формула розрахунку очікуваних значень JKJN при відомій ЧСС

$$JKJN = 56 + 0,05RR, \text{ мс.}$$

Кроки алгоритму пошуку меж ST-сегмента мають такий вигляд:

1. Початкова установка внутрішніх змін.
2. З'ясування поточних координат лівої межі вікна пошуку точки JN.
3. Обчислення розмаху сигналу A у вікні.
4. Якщо  $\Lambda > AF$ , то обчислюються ознаки пошуку вправо і перейти до п. 8.

5. Пошук вліво. Обчислення координати точки JN у поточному вікні  $\Pi$  установлення ознаки її знаходження.

6. Якщо установлена ознака пошуку вправо, то перейти до п.10.

7. Зсув вікна вліво.

8. Якщо установлена ознака знаходження точки JN, то перейти до п.10.

9. Зсув вікна вправо, перейти до п.2.

10. Визначення точки JK на відстані JKJN до точки JN.

#### 8.6.5 Алгоритм аналізу форми ST-сегмента

В алгоритмі розпізнаються 6 типів форми зміщення ST-сегмента відносно ізолінії (рис. 8.26), кожен з яких розділяється на два види – депресії (зниження) і елевачії (підвищення) в залежності від знаку рівня ST-сегмента на більшій його частині. Аналіз форми проводиться за трьома точками: початком (JN), серединою (JS) та кінцем (JK) ST-сегмента, що дозволяє правильно описати лінії і параболічний тип кривої.

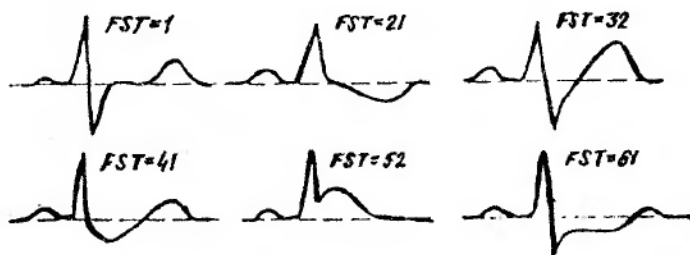


Рисунок 8.26 – Приклади типів форми ST-сегмента

Рішення про форму приймається шляхом порівняння амплітуд і знаків сигналу в трьох виділених точках. За діагностичний поріг DP для знаходження ІХС приймається зміщення ST-сегмента в точці JK на величину 0,1 мВ і більше. Якщо в жодній із трьох точок порогу сигнал не збільшений, цьому комплексу присвоюється код норми, і аналіз форми ST-сегмента не виконується. Зміщення ST-сегмента, яке на відрізьку між точками JS, JK не перевищує величину DP1, установлену емпірично, вважається горизонтальним.

Для організації аналізу форм необхідна така інформація: значення ординат усередненого кардіоциклу в масиві буфера, координата в ньому точки JN, тривалість JKJN, рівень ізолінії Au1 на PQ-сегменті та значення порогів DP, DP1. Результатом роботи алгоритму є код типу форми FST і значення максимального зміщення SST. В алгоритмі прийняті такі коди типу форми ST-сегмента ЕКГ:

- $FST=1$  – норма;
- $FST=31$  або  $32$  – в'ялосхідна депресія чи елевація;
- $FST=41$  або  $42$  – увігнута депресія чи елевація;
- $FST=51$  або  $52$  – випукла депресія чи елевація;
- $FST=61$  або  $62$  – горизонтальна депресія чи елевація.

В алгоритмі реалізовані логічні розв'язуючі правила розпізнавання типів форм ST-сегмента. Вони схематично наведені в табл. 8.1.

Таблиця 8.1 – Логічні правила розпізнавання основних форм ST-сегмента

Умова	Розв'язуючі правила							
$M4 > W$	Д	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н
$M_{js} - M_{jk} \leq W1$		Д	Д	Н	Н	Н	Н	Н
$A_{jk} \geq 0$		Н	Д				Н	
$M3 = A_{js}$				Д	Д	Д	Н	Н
$A_{js} \geq 0$				Н	Н	Д	Н	Н
$A_{jn} \geq A_{jk}$				Н	Д			Н
$M3 = A_{jn}$							Д	Н
$M1 = A_{js}$							Д	Д
$A_{jn} > 0$								Н
Код форми	1	61	62	51		52	41	
Зміщення	M4	-M4	M4	Ajn	Ajk	Ajs	Ajs	

Кроки алгоритму мають такий вигляд:

1. Знаходження ординат точки JK, JS, JK –  $A_{jn}$ ,  $A_{js}$ ,  $A_{jk}$  і їх модулів –  $M_{jn}$ ,  $M_{jk}$ ,  $M_{js}$ .
2. Знаходження екстремумів  $M1 = \min(A_{jn}, A_{js}, A_{jk})$ ;  $M2 = \min(M_{jn}, M_{jk}, M_{js})$ ;  $M3 = \max(A_{jn}, A_{js}, A_{jk})$ ;  $M4 = \max(M_{jn}, M_{jk}, M_{js})$ ;
3. Якщо  $M1 < DP$ , то перейти до п.28.
3. Якщо  $|A_{js}| - |A_{jk}| < DP1$ , то перейти до п.28.
4. Якщо  $M3 = A_{js}$ , то перейти до п.23.
5. Якщо  $M3 = A_{jn}$ , то перейти до п.15.
6. Якщо  $M1 = A_{js}$ , то перейти до п.11.
7. Якщо  $A_{js} < 0$ , то перейти до п.10.
8. Присвоїти  $FST = 32$ ,  $SST = A_{jk}$  і перейти до п.32.
9. Присвоїти  $FST = 31$ ,  $SST = A_{jn}$  і перейти до п.32.
10. Якщо  $A_{js} > 0$ , то перейти до п.14.
13. Присвоїти  $FST = 41$ ,  $SST = A_{js}$  і перейти до п.32.
14. Присвоїти  $FST = 42$ ,  $SST = A_{jk}$  і перейти до п.32.

15. Якщо  $M1 = A_{js}$ , то перейти до п.19.
16. Якщо  $A_{jn} \geq 0$ , то перейти до п.18.
17. Присвоїти  $FST = 21$ ,  $SST = A_{jn}$  і перейти до п.32.
18. Присвоїти  $FST = 22$ ,  $SST = A_{jn}$  і перейти до п.32.
19. Якщо  $A_{js} \geq 0$ , то перейти до п.22.
20. Якщо  $A_{jn} \geq 0$ , то перейти до п.22.
21. Присвоїти  $FST = 41$ ,  $SST = A_{js}$  і перейти до п.32.
22. Присвоїти  $FST = 42$ ,  $SST = A_{jn}$  і перейти до п.32.
23. Якщо  $A_{js} < 0$ , то перейти до п.25.
24. Присвоїти  $FST = 52$ ,  $SST = A_{js}$  і перейти до п.32.
25. Якщо  $A_{jn} \geq A_{jk}$ , то перейти до п.27.
26. Присвоїти  $FST = 51$ ,  $SST = A_{jn}$  і перейти до п.32.
27. Присвоїти  $FST = 51$ ,  $SST = A_{jk}$  і перейти до п.32.
28. Якщо  $A_{jk} \geq 0$ , то перейти до п.30.
29. Присвоїти  $FST = 61$ ,  $SST = -M4$  і перейти до п.32.
30. Присвоїти  $FST = 62$ ,  $SST = M4$  і перейти до п.32.
31. Присвоїти  $FST = 1$ .
32. Кінець.

Розглянуті алгоритми відповідають роботі в оперативному режимі, оскільки їх програмна реалізація не потребує великих витрат оперативної пам'яті для організації внутрішніх буферів і забезпечує високу швидкість обробки ЕКГ. Вони можуть бути використані мікропроцесорними кардіомоніторами для розв'язання задач оперативної діагностики ІХС під час навантаженого тестування і цілодобового моніторингування.

## 9 АЛГОРИТМИ ОЦІНКИ СТАНУ ПЕРИФЕРИЧНОГО КРОВООБІГУ

Для оцінки ефективності лікувальних процедур шляхом електромагнітного впливу і можливості корекції цих впливів у процесі лікування лікувально-діагностичний комплекс має містити в своїй структурі технічні засоби діагностики стану периферичного кровообігу. Склад технічних засобів при цьому має забезпечувати оцінку таких показників системи кровообігу: пружність і еластичність судин, швидкість поширення пульсової хвилі, стан тонуусу судин, артеріальне кровонаповнення і венозний відтік, характер або тип кровообігу.

Для проведення зазначених діагностичних досліджень доцільно використовувати методи дослідження, які мають найбільшу інформативність – сфїгмографічний і реографічний.

### 9.1 Аналіз стану кровеносних судин

Під час кожного скорочення серця має місце рух артеріальної стінки під впливом хвилі тиску крові. Ступінь деформації артеріальної стінки залежить від властивостей судини та рівня тиску крові.

Одержати інформацію про функціональний стан артеріальних судин великого кола кровообігу можна за допомогою сфїгмограм СФГ, використовуючи метод сфїгмографії.

При цьому розраховуються такі гемодинамічні показники системи кровообігу, як швидкість поширення пульсової хвилі по судинах м'язового й еластичного типу, модуль об'ємної пружності та еластичний опір артеріальної системи.

Розрізняють СФГ центрального і периферичного артеріального пульсу. Криві пульсу сонної, підключичної і легеневої артерій (центрального пульсу) відрізняються від кривих периферичних артерій (плечова, променева, стегнова, артерія гомілки і стопи).

На рис. 9.1 наведені сфїгмограми сонної (крива *a*), стегнової (*b*), променевої (*в*) артерій і електрокардіограма (*г*).

Крива центрального артеріального пульсу (рис. 9.1, *a*) починається невеликою пресистоличною хвилею 1, що визначається скороченням лівого шлуночка. Потім з'являється швидкий крутий підйом (анакрота) головної хвилі 2, яка визначає надходження крові з лівого шлуночка в центральні артерії. Тривалість підйому кривої – від 0,08 до 0,1с.

Діастолічна частина кривої центрального артеріального пульсу починається хвилею 5, що є відображенням основного власного коливання артерії. Ця хвиля називається дикротичною; вона показує, що на початку діастолі тиск в артерії підвищено. Діастолічна частина кривої відбиває рівномірний спад тиску, що відповідає рівномірному відтоку крові на периферію. Діастолічні хвилі на СФГ центрального пульсу мають нестійкий характер.

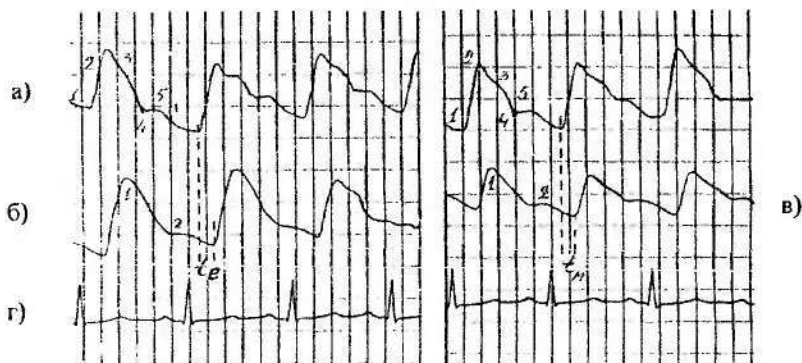


Рисунок 9.1 – Сфігмограми: а) сонної; б) стегнової; в) променевої артерій; г) електрокардіограма

Криві пульсу периферичних артерій (рисунок 9.1, б, в) більш прості і за формою істотно відрізняються від СФГ центрального артеріального пульсу. СФГ периферичного пульсу складається з двох хвиль – основної 1 і дикротичної 2. Підйом основної хвилі плавно переходить у вершину, від якої крива знижується й утворює злегка увігнуте плато, до якого примикає дикротична хвиля. На СФГ артерій стопи дикротична хвиля, як правило, виражена більш чітко. Отже, СФГ периферичних артерій відрізняються від СФГ центральних артерій тим, що основна хвиля не має додаткових коливань як на підйомі, так і на вершині. Після неї можуть бути зареєстровані одна чи кілька додаткових хвиль, що є результатом власних коливань судин.

Під час аналізу СФГ враховують їхню форму, тривалість анакротичного підйому, співвідношення амплітуди основної і дикротичної хвиль. У здорових осіб амплітуда дикротичної хвилі складає близько половини максимальної висоти кривої і знижується при патології. Характер СФГ периферичних артерій більшою мірою, ніж кривих центрального пульсу, визначається станом судинних стінок, їхнім тонусом і багато в чому залежить від місцевих гемодинамічних умов.

Найбільш достовірним показником упруго-в'язкого стану судин є швидкість поширення пульсової хвилі, що визначається за формулою

$$C = \frac{L}{t},$$

де  $L$  – довжина судини;  $T$  – час запізнювання пульсу на периферії.

Довжина відрізка, яким поширюється пульсова хвиля в судинах м'язового типу (променева і стегнова артерії)  $L_m = d - a$ , в еластичних судинах (аорта, підключична, сонна і легенева артерії)  $L_e = b + c - a$ , де  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  – відстані,

зазначені на рис. 9.2:

*a* – відстань від датчика на сонній артерії до яремної вирізки;

*b* – відстань від яремної вирізки до пупка;

*c* – відстань від пупка до датчика на стегновій артерії;

*d* – відстань від яремної вирізки до датчика на променевої артерії.

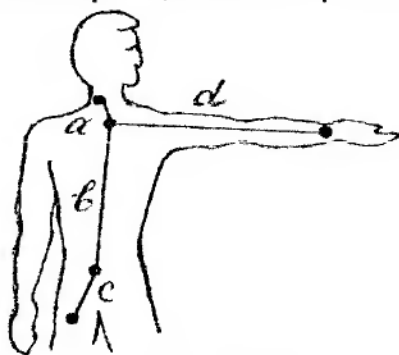


Рисунок 9.2 – Визначення відстані між приймачами пульсу – „датчиками”

Іншою величиною, яку необхідно знати для визначення швидкості поширення пульсової хвилі, є час запізнювання пульсу на дистальному відрізку артерії стосовно центрального пульсу (рис. 9.2).

Час запізнювання поширення пульсової хвилі по еластичних артеріях  $t_e$  визначається за початком підйому кривої центрального пульсу (сонної артерії) і сфїгмографічної кривої стегнової артерії, а час запізнювання по судинах м'язового типу  $t_m$  – від початку підйому кривої СФГ сонної артерії до початку підйому СФГ променевої артерії.

Отже, швидкість поширення пульсової хвилі для артерій еластичного типу  $C_e = l_e / t_e$ , а для артерій м'язового типу  $C_m = l_m / t_m$ .

Обчислені фактичні значення швидкості поширення пульсової хвилі (ШППХ) порівнюються з належними значеннями для кожного пацієнта. Відхилення фактичних значень від належних характеризують особливості периферичного кровообігу і можуть значно змінюватись в умовах патології.

Істотно впливає на ШППХ ступінь тонічної напруги гладкої мускулатури стінки артерій. Під час підвищення тонуусу судин пульсова хвиля поширюється швидше, при зниженні – повільніше.

Захворювання серця і судин викликають аналогічні зміни ШППХ у судинах еластичного і м'язового типу. Атеросклероз приводить до підвищення ШППХ у судинах м'язового типу. Однак, якщо в результаті атеросклерозу утворюються значні стенози або облітерації артерій, то відбувається уповільнення ШППХ в ураженому артеріальному руслі. Різні ШППХ на обох кінцівках може свідчити про наявність перешкоди в судинному руслі.

При захворюваннях периферичних судин (ендоarterіт, трофічні виразки та ін.) ШППХ у них, як правило, знижується. Це обумовлено зниженням пружних властивостей артерій, а також зменшенням їхнього просвіту.

Упругов'язкі властивості судин обумовлені не тільки структурними особливостями тканин, що складають стінки судин, але й активним станом м'язових елементів судинної стінки.

Для кількісного аналізу пружності артеріальних судин використовують модуль пружності, пов'язаний зі ШППХ співвідношенням

$$E = \frac{C^2}{320 R},$$

де  $E$  – модуль пружності артеріальної стінки (дин·см<sup>2</sup>);

$C$  – ШППХ (см/с);

$R$  – коефіцієнт для артерій еластичного типу  $R=0,24$ ; для артерій м'язового типу  $R=0,35$ .

Коефіцієнт еластичності судин або еластичний опір артеріальної системи використовується для характеристики змін судинного тонуусу і визначається за формулою

$$E = \frac{2 \cdot c \cdot \delta}{Q \cdot S},$$

де  $c$  – ШППХ в аорті;

$Q$  – поперечний переріз аорти;  $\delta$  – густина крові;

$S$  – тривалість фази вигнання.

До показників, які індивідуально характеризують стан гемодинаміки, відноситься серцевий індекс

$$CI = \frac{XO}{S_T},$$

де  $XO$  – хвилинний об'єм, м<sup>3</sup>;

$S_T$  – площа поверхні тіла, м<sup>2</sup>.

Площа поверхні тіла визначається за формулою

$$S_T = 0,007184 \cdot W^{0,425} \cdot P^{0,725}$$

Знаючи величини хвилинного об'єму крові ( $XO$ ) і середнього гемодинамічного тиску, можна судити про величину найважливішого фактора, що визначає рівень артеріального тиску, – периферичного судинного опору кровотоку (ОПС).

Розрахунок периферичного опору дозволяє вивчити артеріальний тонус, його зміни в різних фізіологічних і патологічних умовах.

$$ОПС = \frac{7,8 \cdot CP}{XO}, \text{ дин/см/с}^{-5},$$

де  $CP$  – середній гемодинамічний тиск, мм рт. ст.;

$XO$  – хвилинний об'єм крові.

Щоб знати індивідуальні особливості периферичного опору, необхідно визначити такі величини шитомого опору:

1. Належний питомий опір (ППОД)

$$\text{ППОД} = \frac{\text{НСР} \cdot \text{НСІ}}{\text{ДХО}},$$

де *НСР* – належна величина середнього тиску для здорових людей, мм рт.ст.;

*ДХО* – належний хвилинний об'єм крові, мл;

*НСІ* – належний серцевий індекс, л/м<sup>2</sup>.

2. Фактичний питомий опір (ППОФ) – периферичний опір у спокої

$$\text{ППОФ} = \frac{\text{СР}}{\text{СІ}},$$

де *СР* – фактична величина середнього тиску, мм рт. ст.;

*СІ* – фактичний серцевий індекс, л/м<sup>2</sup>.

3. Робочий питомий опір (ППОР) – оптимальний опір артерії, що найкраще відповідає даному хвилинному об'єму крові

$$\text{ППОР} = \frac{\text{НСР}}{\text{СІ}},$$

Величина периферичного опору знаходиться в тісних взаємовідносинах з кількістю крові, що викидається серцем у судинне русло.

Величина викиду крові лівим шлуночком у початковий відрізок аорти за одиницю часу, тобто об'ємна швидкість викиду (*ОШВ*)

$$\text{ОШВ} = \frac{\text{СО}}{\text{S}},$$

де *СО* – систолічний об'єм, см<sup>3</sup>;

*S* – час вигнання, с.

Лінійна швидкість руху крові (*ЛШРК*) у початковій частині аорти

$$\text{ЛШРК} = \frac{\text{ОШВ}}{\text{Q}}, \text{ см/з,}$$

де *Q* – площа поперечного перерізу аорти, см<sup>2</sup>.

Об'ємна швидкість викиду конкретизує уявлення про силу серцевих скорочень і дає можливість розрахувати потужність скорочень лівого шлуночка (*П*) за формулою

$$\text{П} = \text{ОШВ} \cdot \text{СР} \cdot 13,6 \cdot 9,8 \cdot 10^{-6} \text{ Вт,}$$

де *СР* – середній гемодинамічний тиск, мм. рт. ст.;

13,6 – питома вага ртуті для перекладу тиску в мм. рт. ст.;

9,8 · 10<sup>-6</sup> – множник для виразу потужності у Вт.

Алгоритм формування висновків про стан кровоносних судин заснований на порівнянні фактичних (обчислених) кількісних показників, які характеризують судинну систему з належними значеннями, обчисленими для кожного пацієнта персонально.

Нижче наведено приклад формування висновку за значеннями відхилення від норми деяких показників.

Припустимі відхилення від норми (належних значень) розраховуються за формулою

$$\delta_{\text{показ}} = \frac{\text{фактичні значення} - \text{належні значення}}{\text{належні значення}} \cdot 100\%.$$

У табл. 9.1 наведено перелік можливих приватних і комплексних висновків; необхідно тільки додатково обчислити величину відносини від належного значення середнього гемодинамічного тиску до серцевого індексу, тобто  $\delta_{\text{показ}}/CI$ .

Алгоритм формування висновків про стан кровоносних судин наведений на рис. 9.3.

Таблиця 9.1 – Перелік можливих приватних і комплексних висновків

Умова	Варіанти можливих висновків
$\delta_{\text{мін}} > 10\%$	Підвищення мінімального артеріального тиску
$\delta_{\text{мін}} < -10\%$	Зниження мінімального артеріального тиску
$\delta_{\text{ср}} > 10\%$	Підвищення середнього гемодинамічного тиску
$\delta_{\text{ср}} < -10\%$	Зниження середнього гемодинамічного тиску
$\delta_{\text{м}} > 10\%$	Підвищення максимального тиску
$\delta_{\text{м}} < -10\%$	Зниження максимального тиску
$\delta_{\text{шм}} > 15\%$	Підвищення швидкості поширення пульсової хвилі по м'язових артеріях
$\delta_{\text{шм}} < -15\%$	Зниження швидкості поширення пульсової хвилі по м'язових артеріях
$\delta_{\text{ше}} > 15\%$	Підвищення швидкості поширення пульсової хвилі по еластичних артеріях
$\delta_{\text{ше}} < -15\%$	Зниження швидкості поширення пульсової хвилі по еластичних артеріях
$\frac{\delta \cdot CP}{CI} < -15\%$	Гіпокінетичний тип кровообігу
$\frac{\delta \cdot CP}{CI} > 15\%$	Гіперкінетичний тип кровообігу
$-15\% < \frac{\delta \cdot CP}{CI} < 15\%$	Еукінетичний тип кровообігу

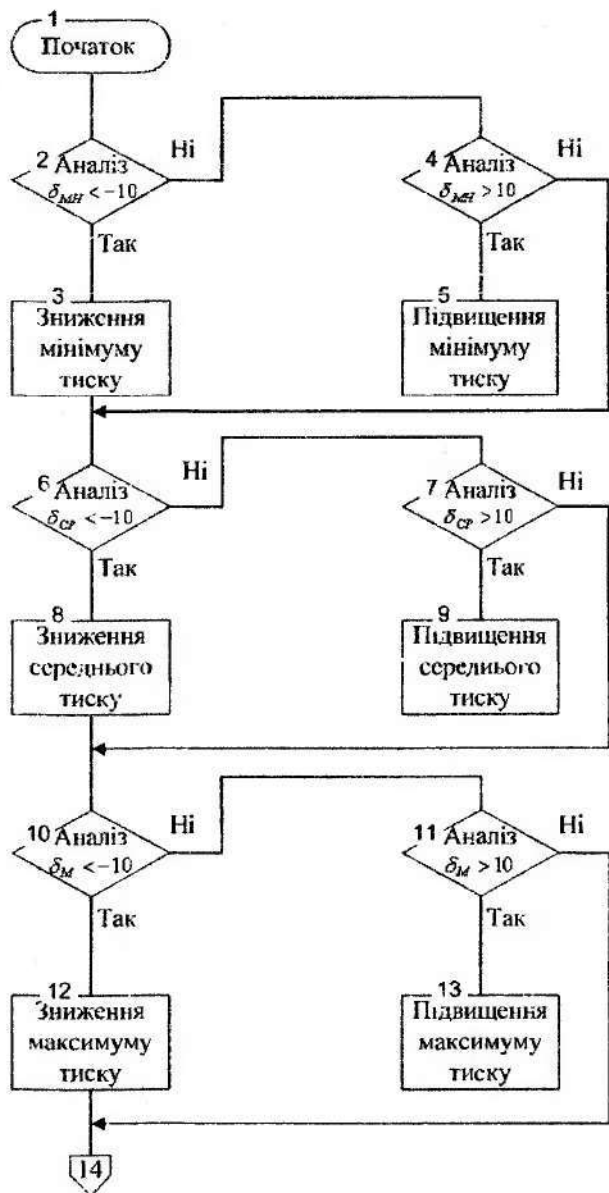
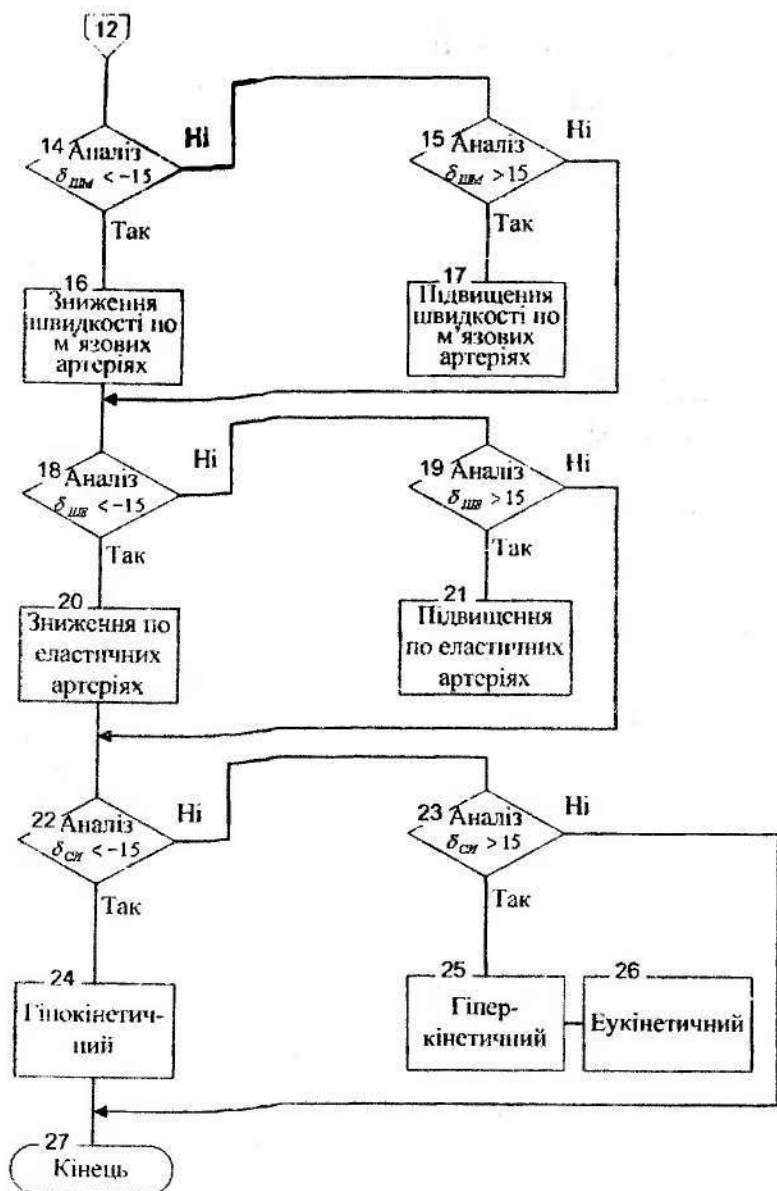


Рисунок 9.3 – Схема алгоритму формування висновків



Продовження рис. 9.3

## 9.2 Аналіз характеру кровообігу

Характеристику артеріального кровонаповнення, стану тонуусу артеріальних судин, венозного відтоку, колатерального кровообігу, мікроциркуляції крові можна одержати за допомогою реографічного методу дослідження. Крім того, цей метод дозволяє визначити ударний і хвилинний об'єми крові та цілий ряд додаткових параметрів кровообігу.

Однією з основних задач реографії є кількісна оцінка гемодинамічних параметрів за результатами вимірювання електричного опору досліджуваного об'єкта. Метод забезпечує можливість вивчення гемодинаміки будь-якого органа, доступного дослідженню, і частини кінцівки.

Електропровідність тканин обумовлена пульсуючим артеріальним кровотоком і рівномірним, який майже не пульсує, в дрібних венах і капілярах. Із загального електричного опору виділяється змінна складова омичного опору, пов'язана з пульсовими коливаннями кровонаповнення.

Під час проходження пульсової хвилі об'єм судини змінюється

$$\Delta V = \rho_{\text{ло}} \cdot l^2 \cdot \Delta R_0 / R_0,$$

де  $\rho_{\text{ло}}$  – питомий опір крові (150–156 Ом·см);

$l$  – довжина відрізка кровоносної судини;

$\Delta R_0$  – зміна опору сегмента тіла.

Реограми будь-якої області, крім серця, в нормі мають загальну конфігурацію, наведену на рис. 9.4. Вона складається з анакроти (висхідної частини), вершини і катакроти (спадної частини), на якій розташовуються 1–3 додаткові хвилі. Амплітуда систолічної хвилі  $A_2$  відбиває пульсовий приріст об'єму крові, інтенсивність артеріального кровонаповнення. Вершина реограми відповідає моменту, коли приплив крові дорівнює відтоку, швидкість кровонаповнення дорівнює нулю.

Спадна частина реограми від вершини систолічної хвилі до кінця кардіоциклу відповідає катакротичній фазі пульсової хвилі, що характеризує венозний відтік. Крутий спуск катакроти свідчить про добрий відтік. У середині чи першій третині спадної частини катакроти розташовується гостре поглиблення – інцизура. З інцизури починається висхідна частина дикротичної хвилі. На катакроті спостерігається кілька дрібних хвиль, розташування і виразність яких визначаються властивостями судинних стінок.

Систолічному підйому може передувати присистолічна хвиля II, тривалістю 0,08–0,12 с. Ця хвиля відповідає скороченню передсердь.

На рис. 9.4 наведена диференціальна реограма (ДРГ) – перша похідна об'ємної реограми. ДРГ характеризує швидкість зміни кровонаповнення досліджуваного органа, дозволяє одержати інформацію про судинний тонус і скорочення міокарда.

Аналіз реограми полягає в її якісній і кількісній оцінці. Якісна характеристика враховує регулярність кривої, крутість анакроти, характер вершини, форму катакроти, кількість і виразність додаткових хвиль. Крива

вважається регулярною, якщо кожна наступна хвиля схожа на попередню. При аритміях регулярність кривої порушується: чим довше діастола – тим більше ударний обсяг кровообігу, тим вище амплітуда реограми.

Особливою мінливістю відрізняється катакрота, змінюється кількість додаткових хвиль, рівень виникнення діастолічної хвилі, її висота. Особливо різко це виражено в осіб з вегето-судинною дистонією. Підйом реограми може бути крутим, похилим, з виступами, з зубцями. Вершина РГ може бути закругленою, плоскою, двогорбою. Спуск катакроти буває крутим, плавним, опуклим.

Під час кількісного аналізу слід обирати оптимальний набір показників, щонайкраще відображають стан кровообігу при даній постановці задачі дослідження.

Для лікувально-діагностичного комплексу набір показників визначається синдромами, характерними для патологічних змін периферичного кровообігу. При цьому необхідно охарактеризувати інтенсивність артеріального кровонаповнення досліджуваної області, стан тонуусу артеріальних судин, характер венозного відтоку.

Під час оцінки різних відрізків РГ-кінцівок у висновку необхідно вказати тип кровообігу: магістральний або колатеральний. У випадку зниження артеріального кровонаповнення на підставі динамічного спостереження висловлюється припущення про функціональні чи органічні зміни артеріальних судин.

Тому під час оцінки РГ виділили синдроми, що відбивають стан кровонаповнення, тонуусу артеріальних судин і характер венозного відтоку. В залежності від інтенсивності артеріального кровонаповнення можна говорити про гіперволемію (підвищення артеріального кровонаповнення) і нормоволемію (нормальне артеріальне кровонаповнення).

За даними літератури основними ознаками, що дозволяють діагностувати цей стан, є амплітуда систолічної хвилі A2 і амплітудно-частотний показник.

Під тонуусом судин розуміється інтегральна величина, що протидіє крові. Виділяються два компоненти тонуусу: базальний (основний) і нейрогенний (вазомоторний). Вазомотори – це судинорухомі нервові волокна.

Для оцінки стану тонуусу виділили такі варіанти: підвищення, зниження і нормальний стан артеріального тонуусу.

Тонуус артеріальних судин слід визначати за такими реографічними показниками: амплітуда РГ, рівень інцизури, висота діастолічної хвилі, час максимального кровонаповнення, час повільного кровонаповнення, середня швидкість повільного кровонаповнення.

Підвищення тонуусу артеріальних судин характеризується зниженням амплітуди систолічної хвилі, підвищенням рівня інцизури, зниженням діастолічної хвилі аж до її зникнення.

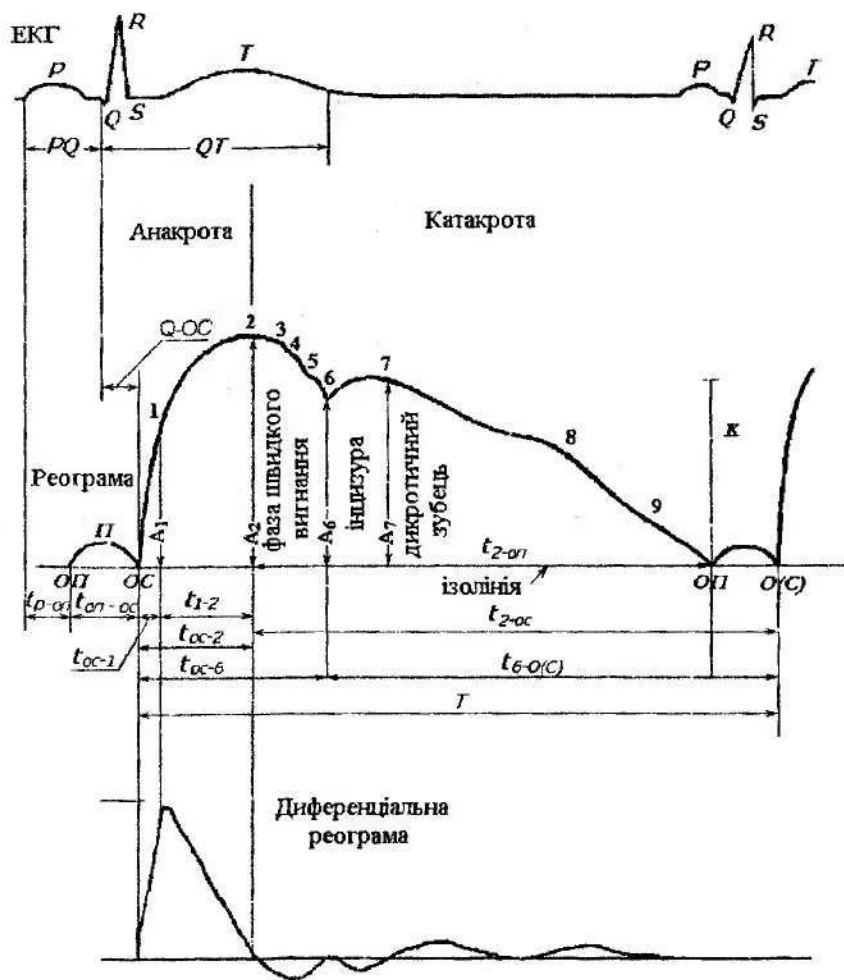


Рисунок 9.4 – Реограма з розрахунковими точками

Час максимального кровонаповнення збільшується за рахунок часу повільного кровонаповнення, швидкість повільного кровонаповнення знижується.

Під час зниження тонуусу артеріальних судин амплітуда систолічної хвилі збільшується і перевищує норму, інцизура розташована ближче до ізолінії, діастолічна хвиля стає високою. Час максимального кровонаповнення коротшає за рахунок часу повільного кровонаповнення, середня швидкість повільного кровонаповнення збільшується. Найбільш інформативними у визначенні тонуусу судин є амплітудні показники.

Для оцінки реограми кінцівок слід виділити магістральний і колатеральний тип кровообігу. Колатеральний тип відрізняється від магістрального зниженням амплітуди систолічної хвилі в 2–3 рази в порівнянні з нормою, збільшенням часу максимального кровонаповнення  $t_{oc-2} > 0,26c$ . Діастолічна хвиля й інцизура відсутні.

Венозний відтік слід оцінювати за станом катакrotичної частини реограми. При цьому виділяють такі типи венозного відтоку: нормальний, утруднений і прискорений.

Утруднений венозний відтік виявляється подовженням катакrotичної частини реограми, опуклою катакrotотою, іноді високої діастолічною і пресистолічною хвилями. Для швидкого венозного відтоку має місце крутий спуск катакrotоти, укорочення катакrotичної частини РГ. При нормальному венозному відтоку дані показники відповідають нормі.

Отже, для аналізу тонуусу артеріальних судин, стану кровонаповнення і венозного відтоку необхідно визначити такі показники реограми (рис. 9.4):

1. Амплітуда систолічної хвилі  $A_2$ .
  2.  $T$  – тривалість серцевого циклу  $T$ .
  3. Амплітуда реограми на рівні інцизури  $A_6$ .
  4. Амплітуда діастолічної хвилі  $A_7$ .
  5. Час максимального систолічного наповнення судин  $t_{oc-2}$  від початку підйому РГ до перпендикуляра, опущеного з його вершини.
  6. Час швидкого кровонаповнення  $t_{oc-1}$  – інтервал від початку підйому РГ до точки закінчення найбільш крутого її підйому  $A_1$ , більш чітко визначається за піком диференціальної реограми.
  7. Час повільного кровонаповнення  $t_{1-2}$  визначається як різниця між  $t_{oc-2}$  і  $t_{oc-1}$ .
  8. Тривалість спадної частини реограми  $t_{2-0}$ .
  9. Час  $Q - OC$  – від початку зубця  $Q$  електрокардіограми до початку підйому систолічної хвилі.
  10. Площа діастолічної хвилі  $S_d$ .
- Схема синдромального алгоритму наведена на рис. 9.5.  
Умовні позначки синдромального алгоритму наведені в табл. 9.2.

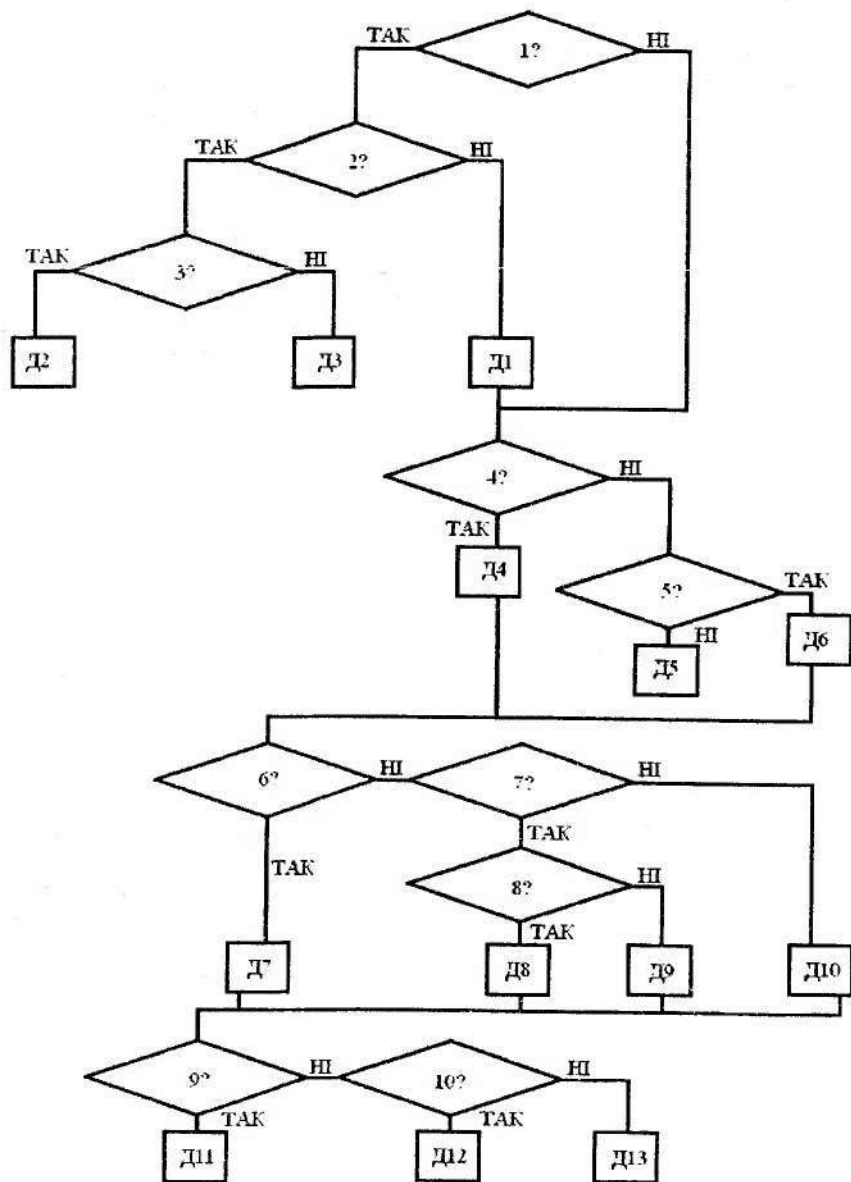


Рисунок 9.5 – Схема синдромального алгоритму

Таблиця 9.2 – Умовні позначки синдромального алгоритму

Позначення	Зміст
1	2
1?	Чи є досліджуваний орган кінцівкою?
2?	$t_{0.2} > N, A_2 > N$ ?
3?	$A_2 > N$ ?
4?	$A_2 = N$ ?
5?	$A_2 < N$ ?
6?	$A_2 = N, t_{0.2} = N, t_{1.2} = N, A_6 = (0.33 \pm 0.66) A_2,$ $(A_7 - A_6) / A_2 \leq 0,1$ ?
7?	$A_2 < N, t_{0.2} > N, t_{1.2} > N, A_6 > 0,66 A_2,$ $(A_7 - A_6) / A_2 < N$ ?
8?	Чи є гіповолемія?
9?	$t_{2.0} = N, A_6 / A_2 = N, S_d = N.$ спуск катакрати нормальний?
10?	$t_{2.0} > N, A_6 / A_2 > N, S_d > N$ катакрота опукла?
Д1	Магістральний тип кровообігу.
Д2	Колатеральний тип кровообігу, компенсований тип.
Д3	Колатеральний тип кровообігу, декомпенсований тип.
Д4	Нормальне артеріальне кровонаповнення.
Д5	Зниження артеріального кровонаповнення.
Д6	Підвищення артеріального кровонаповнення.
Д7	Нормальний стан тонусу.
Д8	Підвищення артеріального тонусу, диференціювати з органічними змінами судин.
Д9	Підвищення артеріального тонусу.
Д10	Зниження артеріального тонусу, можлива атонія.
Д11	Нормальний венозний відтік.
Д12	Утруднений венозний відтік.
Д13	Прискорений венозний відтік.

Для оцінки ефективності проведених лікувальних заходів доцільно передбачити вимірювання і обчислення ряду показників реовазограми і на підставі порівняння їх з нормою зробити висновок про продовження терапевтичних процедур у проведеному режимі корекції в необхідному напрямку.

До таких показників можна віднести такі:

1) реографічний систолічний індекс

$PI = A_2 / A_k$ , де  $A_k$  – калібрований сигнал;

2) ликротичний індекс

$$ДІКІ = A_0/A_2;$$

3) діастолічний індекс

$$ДАІ = A_2/A_2;$$

4) реографічний систолічний індекс, наведений до імпедансу  
 $PI/z = PI/z;$

5) середня швидкість швидкого кровонаповнення

$$СШШК = A_1/t_{0.1};$$

6) середня швидкість повільного кровонаповнення

$$СШПК = (A_2 - A_1)/t_{1-2};$$

7) показник тонуусу артерій

$$ПТА = t_{0.1}/T;$$

8) показник еластичності артерій

$$ПЕА = A_2/A_{\text{оф}};$$

9) систолічний обсяг кровотоку

$$V_s = 220 \cdot L^2 \cdot T_u \cdot A_{\text{оф}}/z^2;$$

10) хвилиний обсяг кровотоку

$$V_m = V_s \cdot ЧСС;$$

11) питомий периферичний судинний опір

$$ППСО = P_m/CI,$$

де  $P_m$  – середній артеріальний тиск (мм рт.ст.);

$CI$  – серцевий індекс.

У табл. 9.3 наведені значення параметрів реовазограми в нормі для трьох частин: стегно, гомілка, стопа. Нормою вважається середнє значення показника у здорових людей з урахуванням віку.

Таблиця 9.3 – Значення норми параметрів реовазографії

Параметри	Стегно	Гомілка	Стопа
$Q - OC$	0,15–0,25	0,19–0,30	0,18–0,30
$t_{0.2}$	0,1–0,2	0,10–0,15	0,08–0,16
$t_{2.0}$	0,4–0,6	0,46–0,60	0,48–0,60
$A_2$	0,08–0,12	0,08–0,12	0,06–0,10
$A_{\text{оф}}$	0,1–0,4	0,8–1,3	1,0–2,3
$PI/z$	0,4–0,8	0,8–1,4	0,6–1,3
$A_0/A_2$	0,15–0,5	0,25–0,80	0,30–0,80
$A_1/A_2$	0,1–0,8	0,20–0,80	0,20–0,80
$(A_2 - A_1)/t_{1-2}$	0,07–0,20	0,5–0,9	0,5–1,1
$V_m$	3–5	1,5–3,0	0,4–1,0

Алгоритм оцінки двох параметрів реовазограми для гомілки наведений на рис. 9.6. Алгоритми оцінки параметрів інших частин організму будуються за аналогічним принципом.

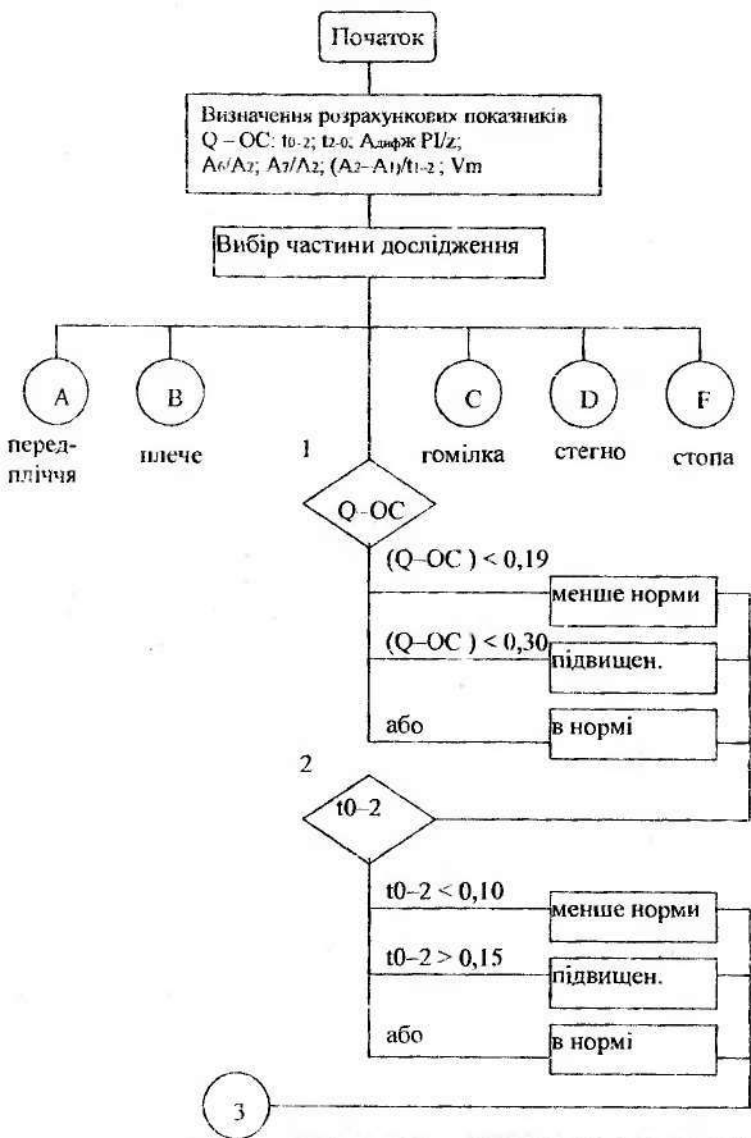


Рисунок 9.6 Алгоритм оцінки параметрів реовазограми гомілки

Незважаючи на велику різноманітність методів аналізу ЕЕГ, які використовуються зараз, їх можна розділити на декілька груп, що узагальнюють: аналіз структурних характеристик сигналів і розпізнавання форми сигналів (ЕЕГ-сигнал апроксимується деяким коливальним процесом); різні модифікації кореляційно-спектрального аналізу; методи, засновані на поданні мозку у вигляді багатоплощинної електролітичної сфери; методи викликаних потенціалів та деякі інші. Сьогодні все більше поширення одержує використання функцій Уолша для аналізу ЕЕГ.

Розглянемо деякі алгоритми реалізації методів аналізу ЕЕГ із перерахованих вище груп.

### 10.1 Алгоритм аналізу структурних властивостей ЕЕГ-сигналу

Під час реєстрації ЕЕГ одночасно від різних частин голови можна виявляти функціональні розлади мозку і говорити про ступінь їхньої ваги локалізації і ураження. На рис. 10.1 наведені ЕЕГ за 16 відведеннями.

У даному розділі розглядається алгоритм аналізу структурних властивостей коливального процесу, ідентичного ЕЕГ.

Нехай є деякий об'єкт. Його функціональний стан позначимо через "Ф" і думатимемо, що він змінюється за часом  $t$  і різними зовнішніми подразниками. Можлива реєстрація коливального процесу  $x(t)$ , яка, в свою чергу, вказує на зміну "Ф". Тоді реалізація  $x(t)$  на відрізку часу  $(0, T)$  відповідає "Ф" на даному відрізку. Отже,  $x(t)$  має параметри  $P_j (j=1, \bar{n})$ , що за наявності сукупності вказують на стан "Ф". Інакше, оцінюючи  $P_j (j=1, \bar{n})$  в цілому, оцінюється даний функціональний стан "Ф".  $X(t)$  може мати дискретний або безупинний характер. Під час аналізу за допомогою ЕОМ  $x(t)$  розглядають у вигляді дискретної послідовності чисел, яка утворюється дискретизацією за часом і квантуванням за рівнем.

Як параметри коливального процесу, застосовують дискретні значення функції  $x(t)$

$$P_1 = x(t_1); P_2 = x(t_2); \dots P_N = x(t_N).$$

Становить інтерес виділення таких  $P_j$ , які охоплювали б структурні властивості  $X(t)$  і адекватно відтворювали вихідний стан  $x(t)$ . Існує ряд підходів до розв'язання цього завдання.

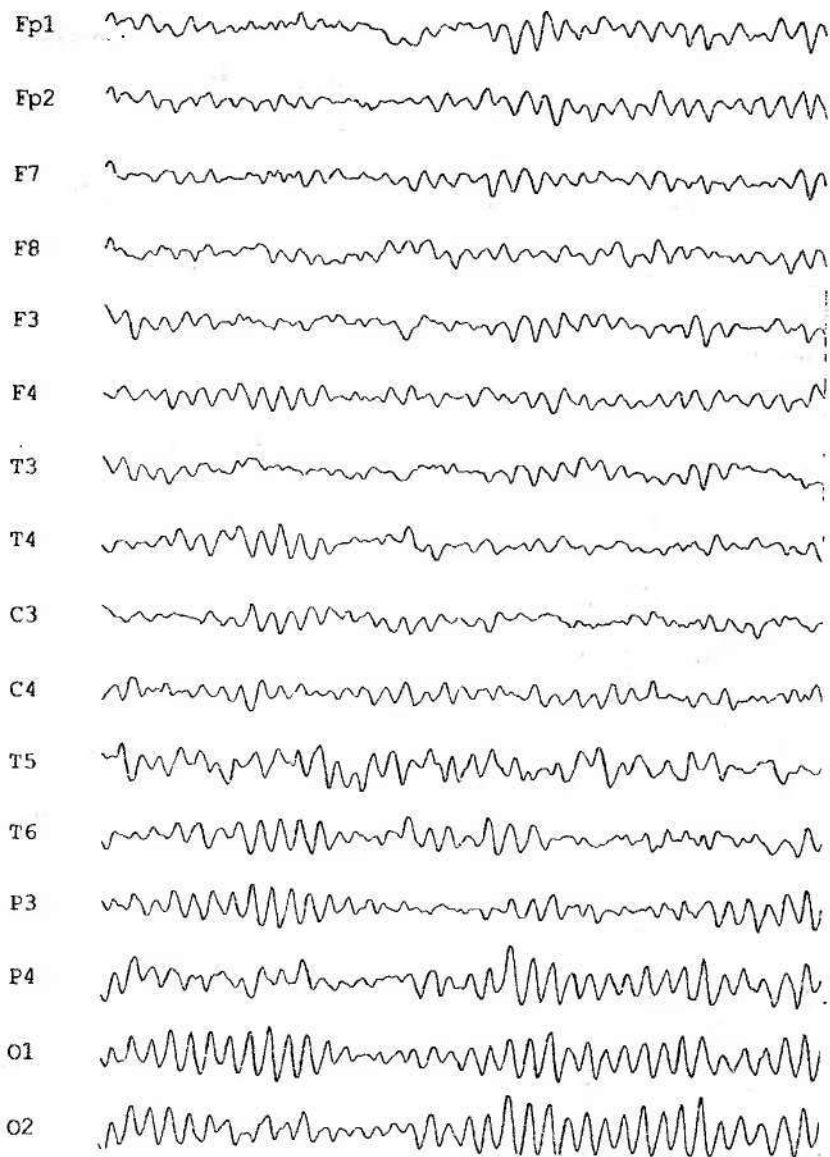


Рисунок 10.1 – ЕЕГ за 16 відведеннями

Розглянутий алгоритм визначає такі параметри  $P_j$ , які в сукупності можна вважати універсальними. Як  $P_j$  обрані такі параметри:

$P_1 - n_1$  – кількість екстремумів  $x(t)$ ;

$P_2 - n_2$  – кількість перетинань осі абсцис;

$P_3 - T_1$  – значення часу, протягом якого крива, що відповідає  $x(t)$ , додатна;

$P_4 - S^+$  – площа позитивної частини кривої;

$P_5 - S^-$  – площа негативної частини кривої;

$P_6 - T_2$  – час, протягом якого крива зростає;

$P_7 - T_3$  – час, протягом якого крива спадає;

$P_8 - A_n^r$  – середня сума амплітуд кривої від піка до піка;

$P_9 - \Delta_{мер}$  – середній рівень асиметрії тривалості фаз;

$P_{10} - K_{ас}$  – коефіцієнт асиметрії кривої;

$P_{11} - K_{ex}$  – коефіцієнт ексцесу;

$P_{12} - n_3$  – кількість одиночних хвиль;

$N$  – кількість відліків;

$K$  – кількість відрізків  $(0, T)$ , які підлягають усередненню;

$Y_j$  –  $i$ -те дискретне значення  $j$ -го відрізка;

$X_j$  –  $j$ -те дискретне значення усередненого процесу.

Схема алгоритму аналізу структурних властивостей ЕЕГ наведена на рис.

## 10.2.

За викладеним алгоритмом можна скласти програму автоматизованого аналізу структурних властивостей ЕЕГ для різних значень  $N$  і  $K$  ( $N = 64, 128, 256, \dots$ ;  $K = 1, 8, 16, \dots$ ). Простежується різниця результатів у залежності від стану “Ф” (наприклад, здоровий – стан Ф1, хворий епілепсією – Ф2).

Велике значення під час аналізу форми ЕЕГ-сигналів і їхніх параметрів відіграє виділення нульової лінії. Пропонується моделювати поведінку нульової лінії сгладжувальним сплайном. Математична постановка завдання зводиться до того, що нульову лінію апроксимують кубічним сплайном, зводячи вихідне завдання до завдання математичного програмування. Перевага цього методу полягає в тому, що завдання легко параметризується, чисельний метод універсальний і реалізується в часовій області.

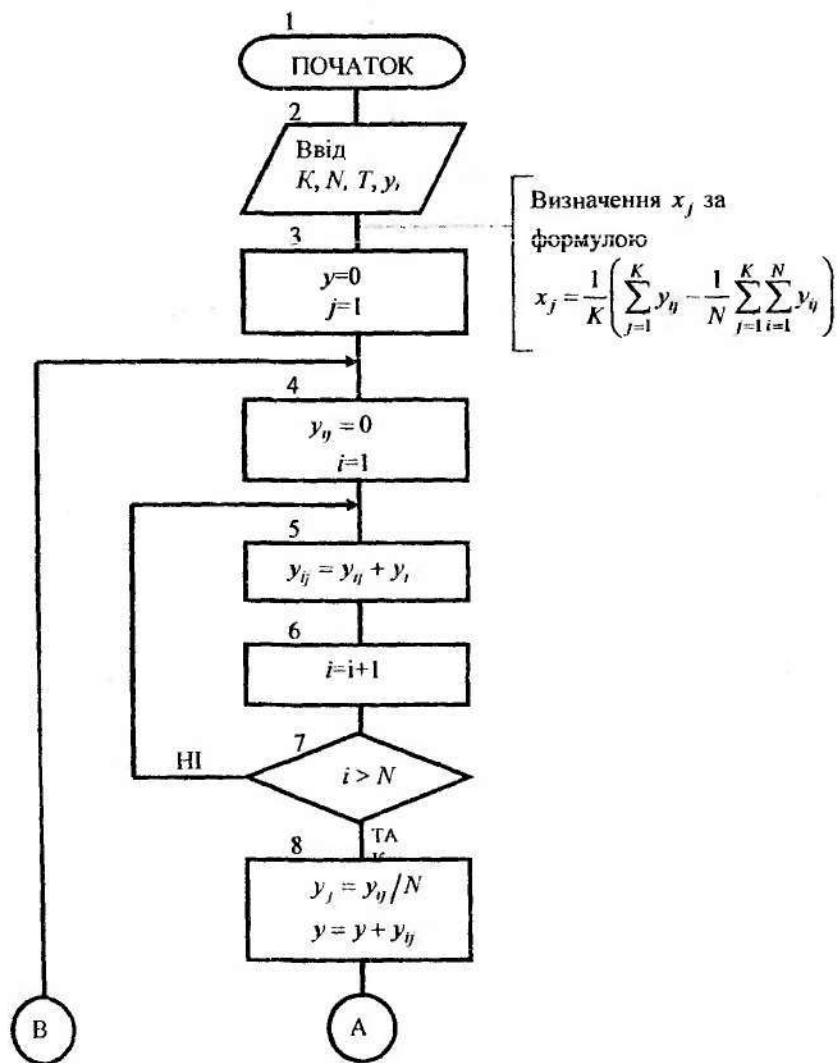
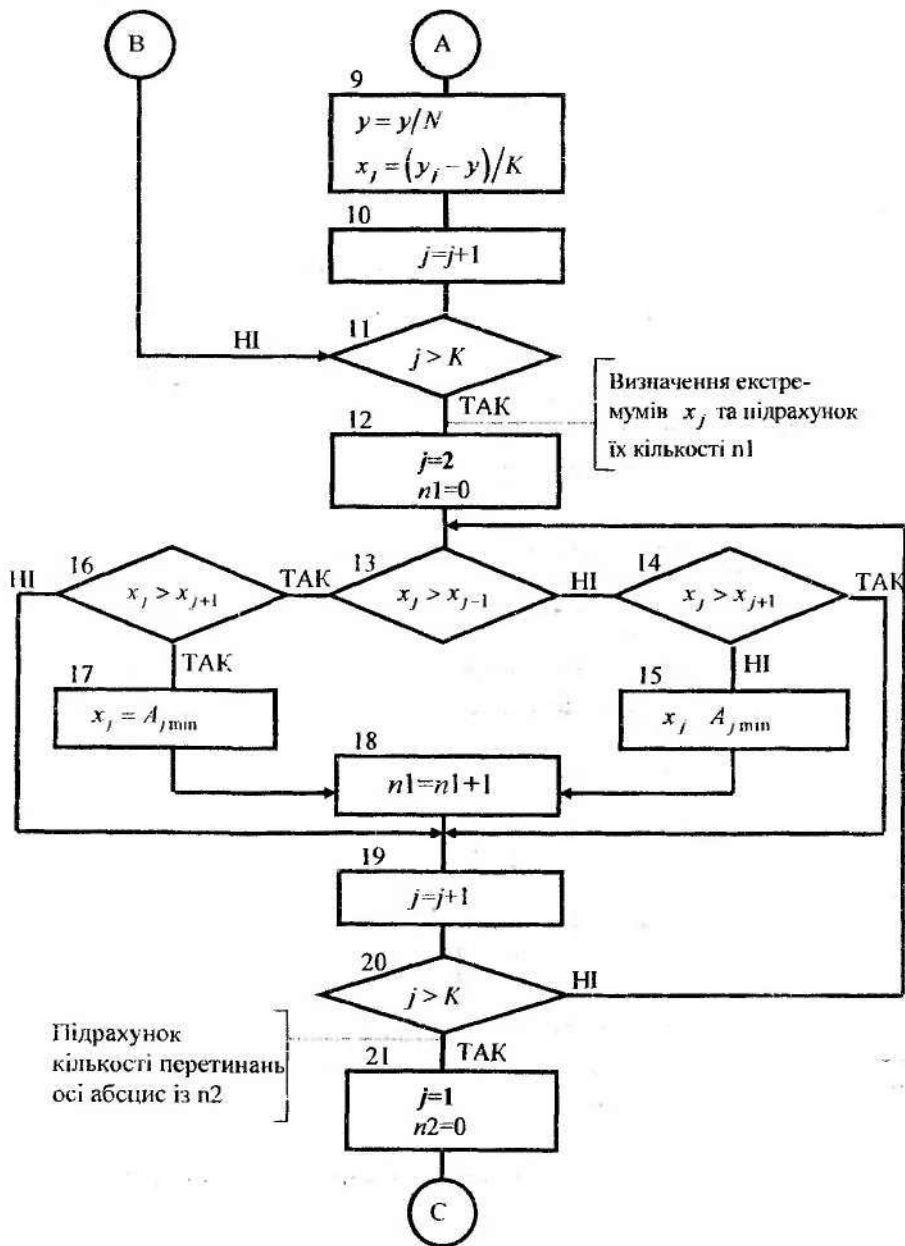
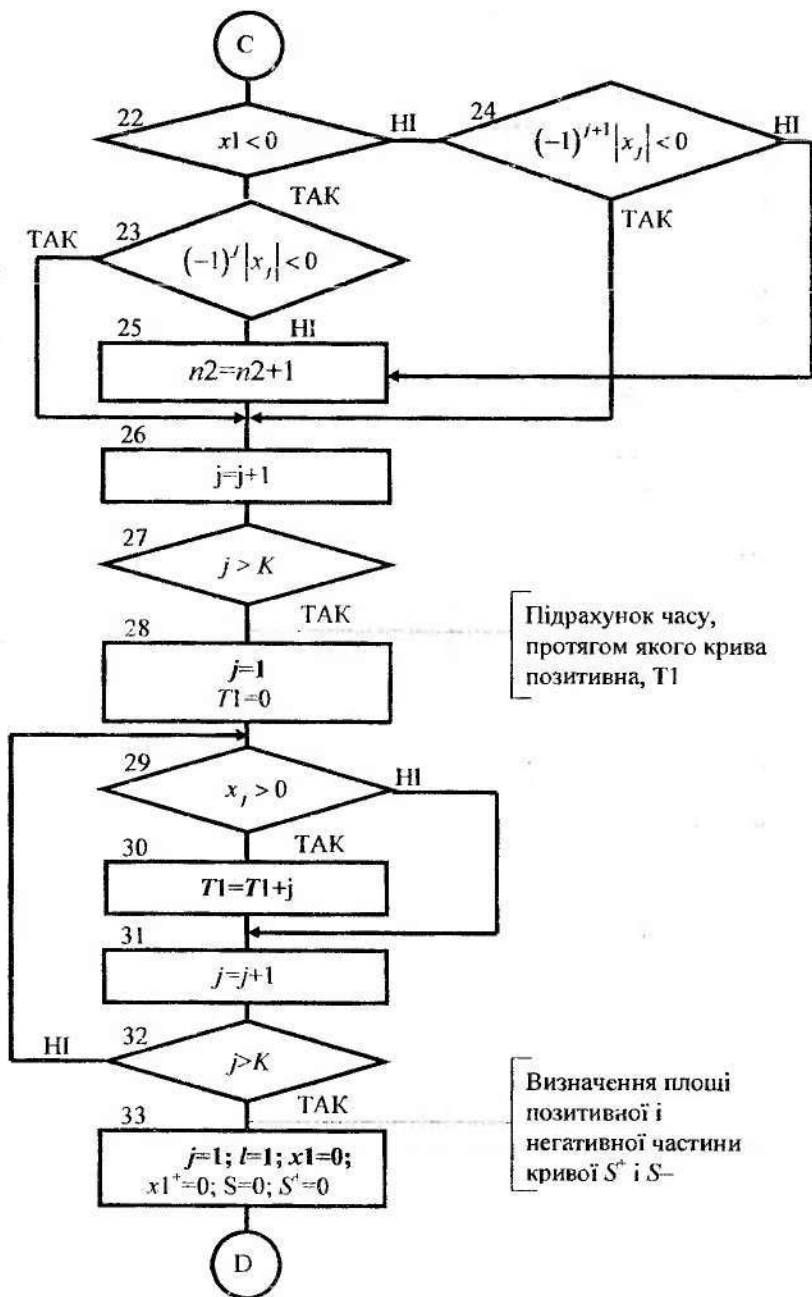


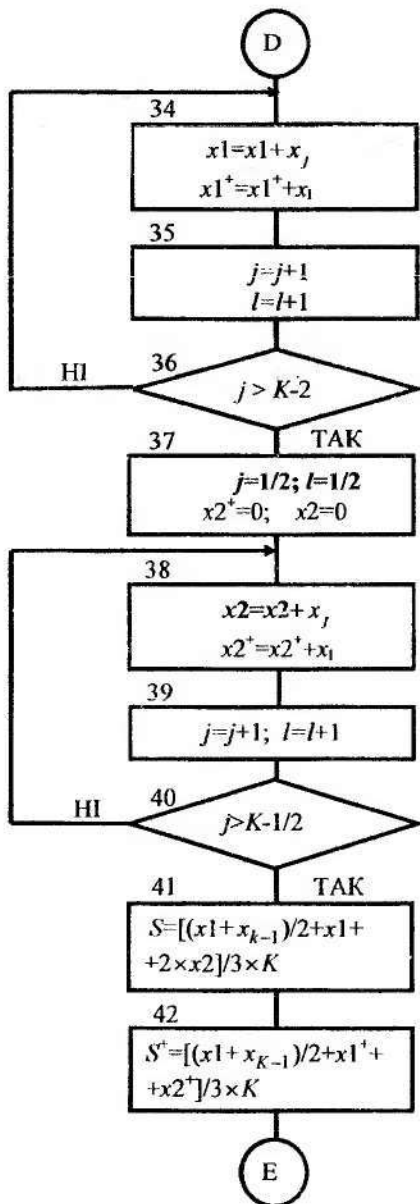
Рисунок 10.2 – Алгоритм аналізу структурних властивостей ЕЕГ



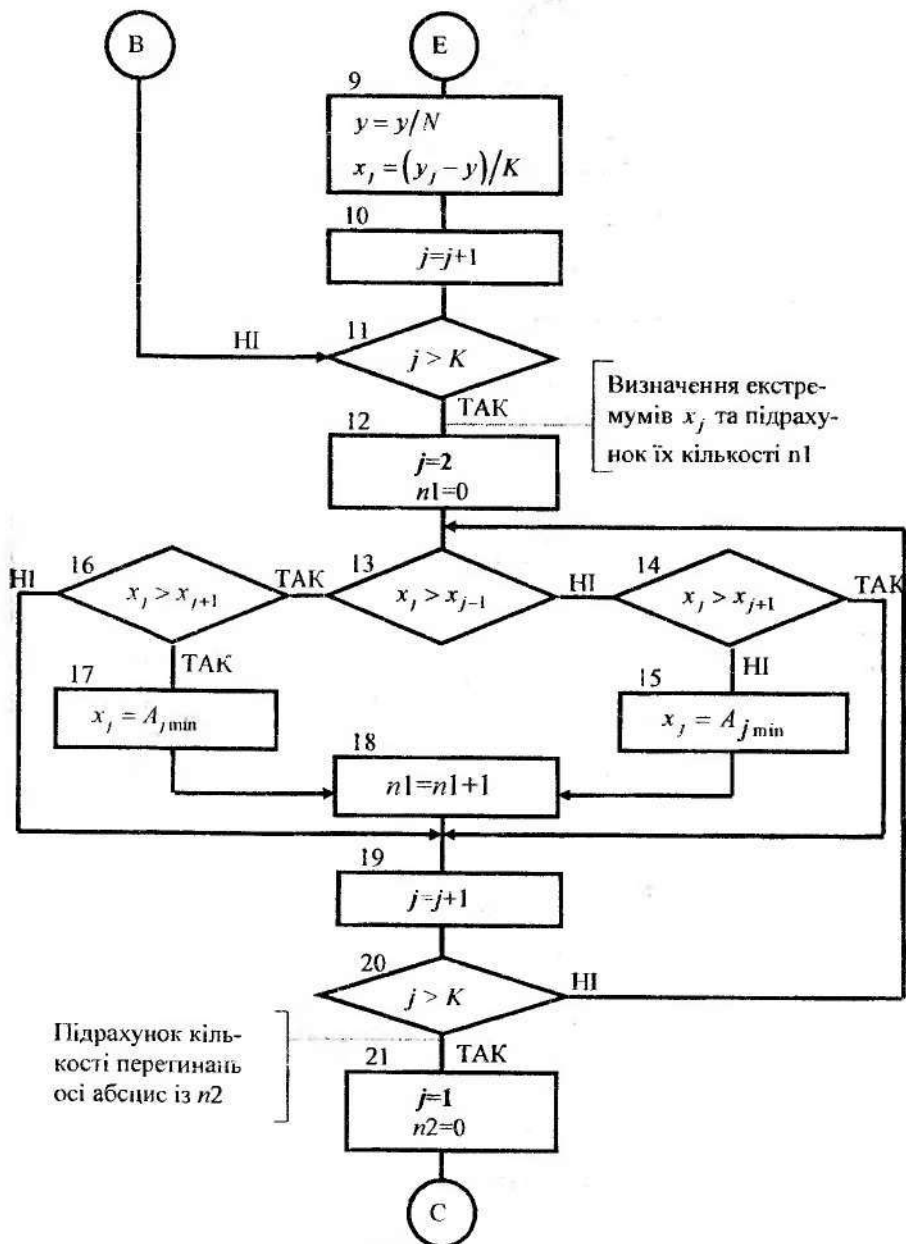
Продовження рис. 10.2



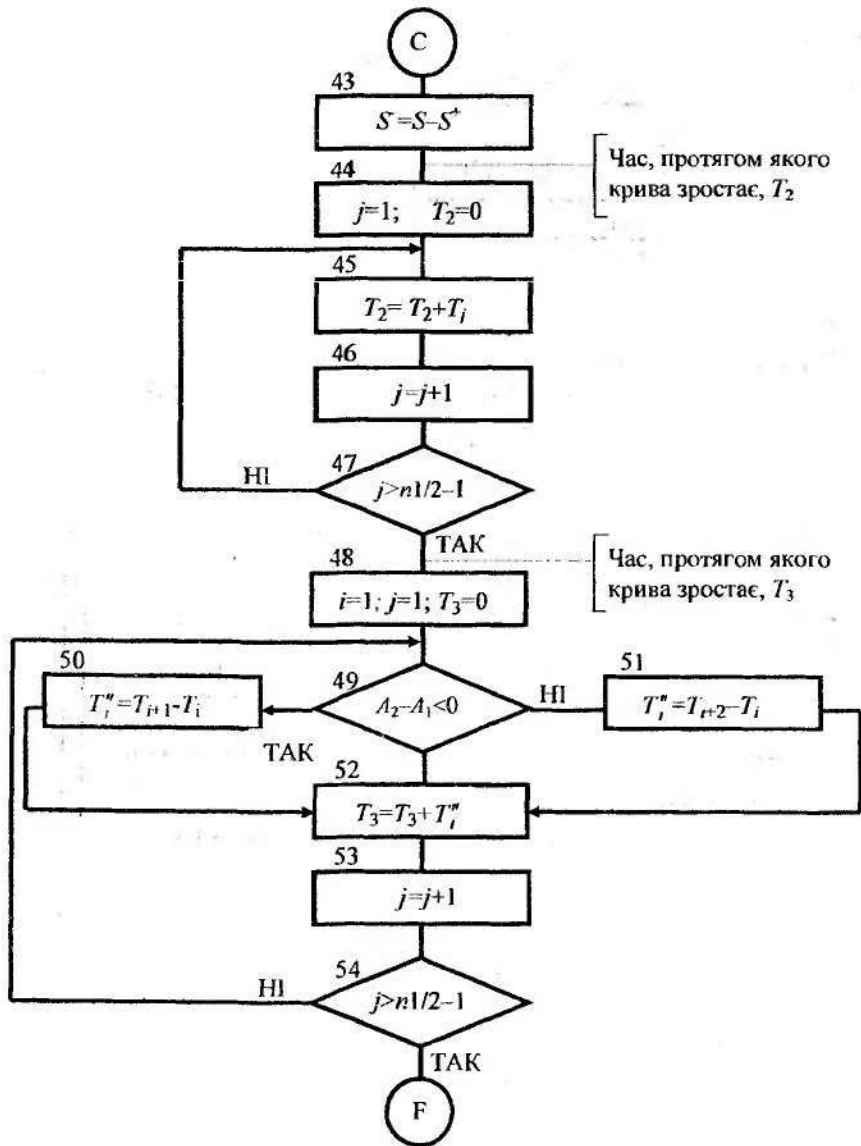
Продовження рис. 10.2



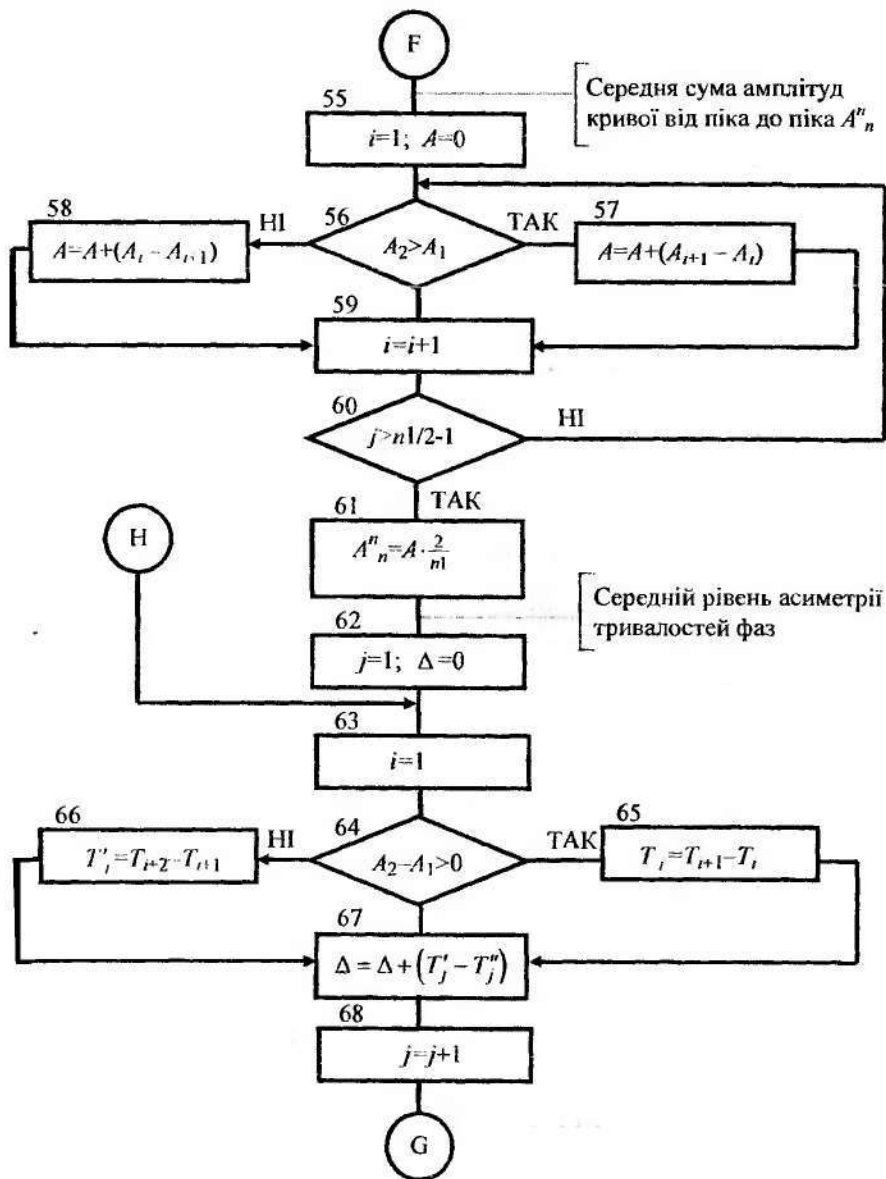
Продовження рис. 10.2



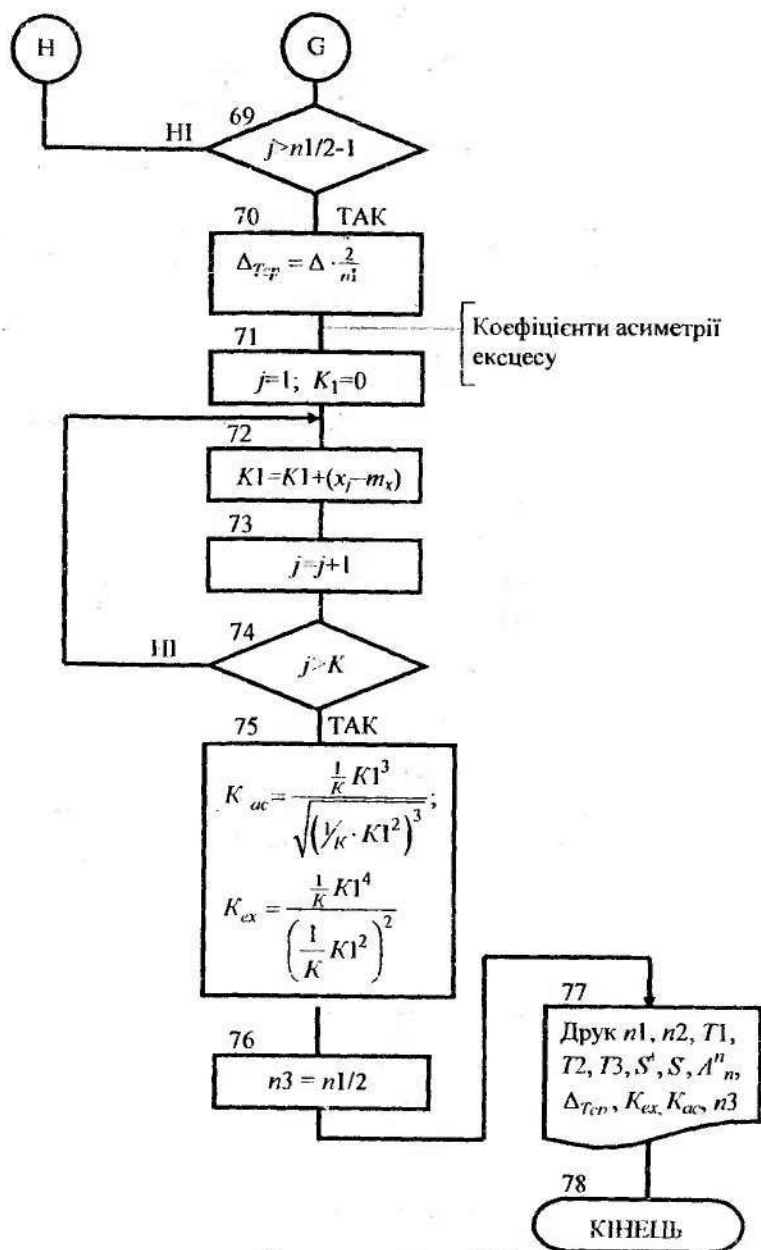
Продовження рис. 10.2



Продовження рис. 10.2



Продовження рис. 10.2



Продовження рис. 10.2

## 10.2 Метод викликаних потенціалів із використанням функцій

Уолша

Досить широке поширення одержав метод обробки ЕЕГ за допомогою викликаних потенціалів (ВП). Цей метод такий.

При одиночних подразниках достатньої сили у відведеннях від проєкційних зон кори головного мозку виникають характерні коливання потенціалу – ВП. Вивчення електричної активності мозку на основі аналізу ВП дає добрі результати. Як одиночні подразники використовуються різні різкі сигнали, що впливають на нервові рецептори, через які порушення передається в мозок. Під час використання методу ВП необхідно розпізнавати форму сигналу. В цьому напрямку оптимальним є метод розпізнавання висхідних і спадних фаз коливань викликаних потенціалів.

Перед тим, як говорити про властивості ВП, необхідно виявити параметри, що характеризують ці властивості. Як параметри найбільш часто використовуються такі:

- 1)  $L$  – тривалість викликаної відповіді;
- 2)  $A$  – амплітуда викликаної відповіді;
- 3)  $\alpha, \beta$  – кути нахилу кривої, що відповідає викликаній відповіді, до осі абсцис;
- 4)  $K_{ac}$  – коефіцієнт асиметрії кривої, що відповідає викликаній відповіді;
- 5)  $K_{ex}$  – коефіцієнт ексцесу (крутість);
- 6)  $K_x(\tau)$  – автокореляційна функція кривої, що відповідає викликаній відповіді.

Виходячи із заданих параметрів, будується деякий ознаковий простір для розпізнавання викликаних відповідей, поданий на рис. 10.3.

Тут

$$1) L = t_2 - t_0;$$

$$2) A = \max\{x\};$$

$$3) \alpha = \arctg \frac{A}{(t_1 - t_3)};$$

$$4) \beta = \arctg \frac{A}{(t_1 - t_4)};$$

$$5) K_x(\tau) = K_v(\mu\Delta t) = 1/(n - \mu + 1) \sum_{i=0}^{n-\mu+1} x(i\Delta t)x[(\mu + i)\Delta t],$$

де  $i = t/\Delta t$ ;  $\Delta t = T/n$ ;  $\mu\Delta t = \tau$ .

Для більш детального уточнення форми ВП застосовують спектральний аналіз за допомогою перетворень Уолша. Інакше кажучи, кожну періодичну, кінцеву, обмежену функцію можна описати за допомогою функцій Уолша і здійснити розкладання в ряд Уолша-Фур'є. ВП можна розглядати як періодичний кінцевий обмежений процес. Тоді

$$x(t) = a(0) \cdot wal(0, t) + \sum [a_C(i) cal(i, t) + a_S(i) sal(i, t)],$$

де  $a(0)$ ,  $a_C(i)$ ,  $a_S(i)$  – деякі коефіцієнти, що відповідають функціям Уолша  $wal(0, t)$ ,  $cal(i, t)$ ,  $sal(i, t)$ .

Отже доцільно включити в раніше побудований ознаковий простір розпізнавання ВП коефіцієнти ряду Уолша-Фур'є, оскільки за їх допомогою можна дослідити спектр частот. За зміною спектра частот хвилі ВП можна говорити про її форму. Приклад розподілу коефіцієнтів Уолша-Фур'є у вигляді спектра частот двох усереднених ВП наведений на рис. 10.4. На рис. 10.4а показаний розподіл коефіцієнтів у нормі, на рис. 10.4б – при патології (наприклад, уповільнена реакція на роздратованість, наявність осередкових уражень та ін.).

Схема алгоритму розпізнавання форми ВП на основі побудованого ознакового простору наведена на рис. 10.5.

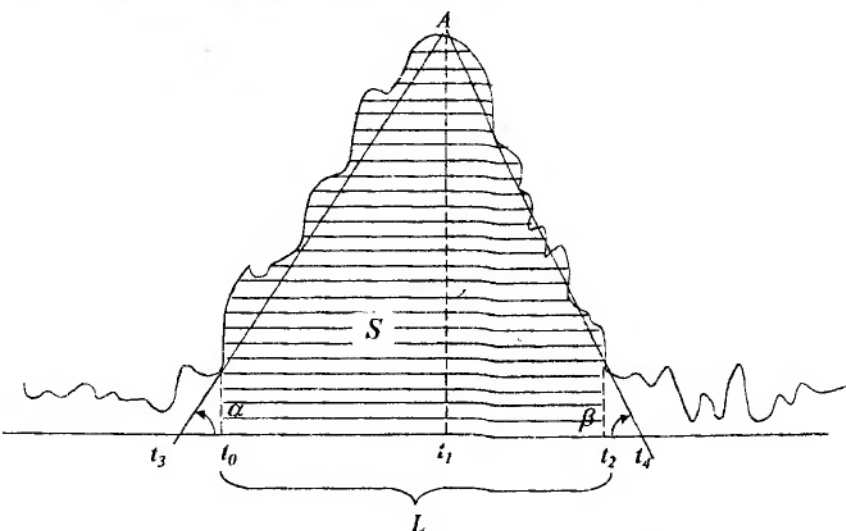


Рисунок 10.3 – Ознаковий простір для розпізнавання викликаних потенціалів

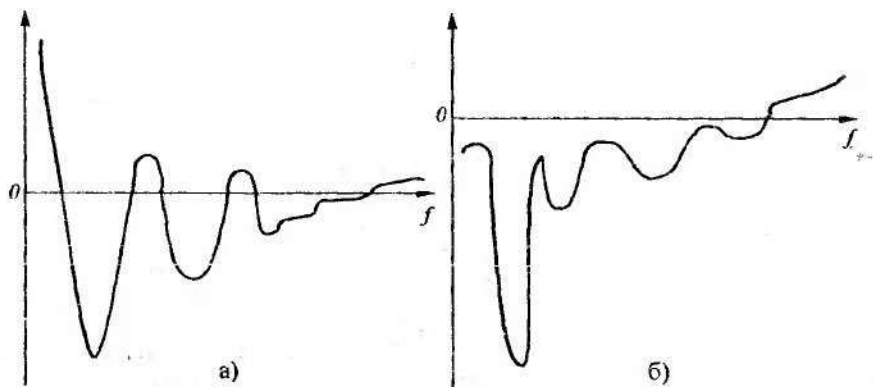


Рисунок 10.4 – Розподіл коефіцієнтів Уолша-Фурье: а) в нормі; б) патології

### 10.3 Алгоритм розрахунку амплітуди ЕЕГ як потенціалу в однорідному необмеженому середовищі

Ряд актуальних завдань чисельного аналізу ЕЕГ зводиться до розв'язання оберненої задачі електроенцефалографії (ОЗЕ) – визначенню конфігурації внутрішньочерепних джерел за вимірною багатоканальною ЕЕГ (наприклад, розрахунок еквівалентного диполя пухлин, рубців, епілептичних зон та ін.). Вирішення ОЗЕ ґрунтується на адекватному розв'язанні прямої задачі електроенцефалографії (ПЗЕ) – умінні обчислити розподіл потенціалу по поверхні черепа від заданих внутрішньочерепних джерел.

Складність вирішення ПЗЕ людини пов'язана в основному з множинністю покривів мозку, що обумовлюють багатократні стрибки провідності на шляху струмів від джерел на черепі. Найбільш повно покриви враховані в моделях багатосарової електролітичної сфери (БШС-моделях). Потенціал на поверхні МС, тобто миттєве значення ЕЕГ, обчислюється щодо нульового потенціалу нескінченості, тоді як у реальних експериментах різниця потенціалів вимірюється в парі точок поверхні черепа (моно- і біполярні відведення). У більш складних способах реєстрації ЕЕГ ці різниці потенціалів є членами лінійної суми (відведення з усередненим електродом, відведення джерело – диференціальне відведення). Тому кінцевим об'єктом модельного аналізу має бути не відособлене миттєве значення ЕЕГ (ЕЕГ<sub>п</sub>), а їхня лінійна комбінація. Кількість використаних електроенцефалограм і вагові коефіцієнти цієї комбінації визначаються способом реєстрації ЕЕГ разом з умовою фізичної реалізованості реєстратора.

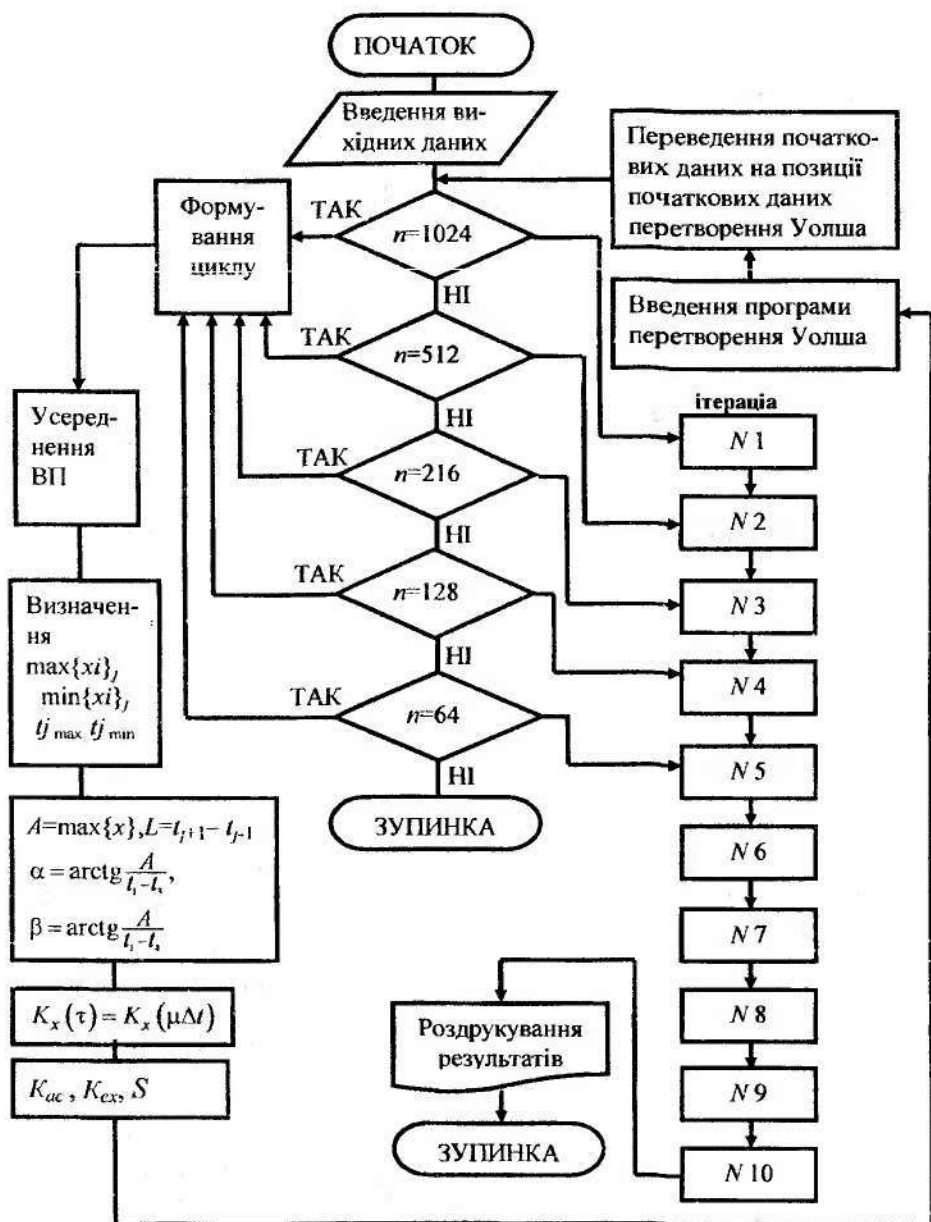


Рисунок 10.5 – Алгоритм розпізнавання форми викликаних потенціалів

Тому чисельний аналіз прикладних ЕЕГ, частиною якого є таке багатократне підсумовування, важкий, оскільки обсяг розрахунків великий навіть для потужних комп'ютерів. Найвні спроби замінити багатошарові сфери імітаційними моделями з менш громіздкими рішеннями або недостатньо аргументовані, або мають місце змодельовані імітаційні розрахунки лише окремих відособлених ЕЕГ.

Диференціальний спосіб реєстрації, заснований на оцінці другої похідної ЕЕГ по поверхні черепа, перспективніше моно- і біполярних способів, оскільки таким способом потенціал, що відводиться, в основному сформований прилеглими до системи електродів частинами мозку.

Потенціал на поверхні БШС обчислюється як сума за  $l$  і  $m$  поліномів Лежандра  $P_l^m$ , помножених на обумовлені БШС-моделями коефіцієнти  $C$  [12]. Тут  $l$  – це ступінь сферичних поверхневих гармонік, а  $m$  – їхній порядок. Під час виводу формули для розрахунку потенціалу на виході диференціального реєстратора (ДР) використовується сферична система координат  $(r, \theta, \varphi)$  (рис. 10.6).

Тут  $r$  – полярний радіус;  $\theta$  – широта;  $\varphi$  – довгота.

Під час виводу використовуються такі позначення:

- 1)  $U(\theta, \varphi(R))$  – потенціал на поверхні  $r = R$  у необмеженому однорідному електроліті (НОЕ);
- 2)  $r_{br}$  – радіус кулі-мозку;
- 3)  $r_d, \theta_d, \varphi_d$  – координати точки додатка внутрішньочерепного диполя;
- 4)  $D^r$  – проекція його дипольного моменту на полярний радіус-вектор;
- 5)  $D^\theta$  – проекція на дотичну меридіана (довготи);
- 6)  $r = r_{sc} - W(\theta, \varphi)$  – проекція на поверхню БШС.

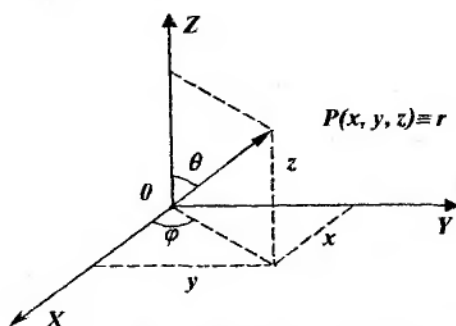


Рисунок 10.6 – Сферична система координат

Потенціал на виході диференціального реєстратора дорівнює

$$\eta(\theta_r, K) = W(0,0) - K^{-1} \sum_{R=1}^K \left( \theta_{r_r} \frac{2\pi}{K} R \right). \quad (10.1)$$

Диференціальний реєстратор зображений на рис. 10.7.

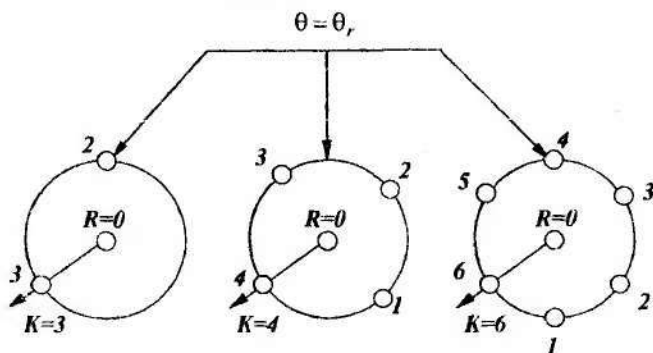


Рисунок 10.7 – Диференціальний реєстратор ЕЕГ

Задані на сферичній поверхні потенціали розкладаються в ряд, який після перетворень має такий вигляд:

$$\eta(\theta_r) = \sum_{\lambda=1}^L X_{\lambda} [1 - P_{\lambda} \cdot \cos(\theta_r)] \cdot C_{MS}(\lambda) \cdot \left( \frac{r_{br}}{r_{sc}} \right)^{\lambda+1} \cdot U(\lambda, m=0 | r_{dr}), \quad (10.2)$$

де  $X_{\lambda}$  – сферичні поверхневі гармоніки;

$$S_{MS}(\lambda) = (2\lambda + 1)^3 \cdot \lambda \cdot P_1^{2\lambda+1} / [(2\lambda + 1)R_1(\lambda) + \lambda R_2(\lambda) \cdot R_3(\lambda)],$$

$$\text{де } R_1(\lambda) = 0,9875 \cdot (\lambda^2 + (\lambda + 1) \cdot \lambda \cdot P_1^{2\lambda+1}),$$

$$R_2(\lambda) = (0,0125 \cdot (\lambda + 1) + \lambda) \cdot P_1^{2\lambda+1} - 0,9875\lambda,$$

$$R_3(\lambda) = (80 - 79 \cdot P_1^{2\lambda+1}) \cdot (\lambda + 1) + \lambda,$$

$$P_1 = 8,5/8,$$

$$P_2 = 8,5/9,2,$$

(10.3)

де  $U(\lambda, m)$  – просторовий спектр, який відповідає потенціалу  $U(\theta, \varphi | R)$ .

Череп людини близький за формою до еліпсоїда обертання з піввісьями  $\sim 7$  і  $\sim 9$  см, тому при сферичній апроксимації  $r_{br} = 8$  см,  $r_{sc} = 9,2$  см; мінімальна міжелектродна відстань реальних ЕЕГ складає  $\sim 2$  см. На сферичному черепі з  $r_{sc} = 9,2$  см – це дуга в  $12^\circ$ . ЕЕГ формує перші 20 гармонік, тобто  $L \leq 20$ .

Чисельний аналіз свідчить, що при цих значеннях параметрів моделі можлива така апроксимація:

$$\left[1 - P_{\lambda}(\cos 12^{\circ})\right] C_{mc}(\lambda) \cdot \left(\frac{8}{9,2}\right)^{\lambda+1} \approx \left(\frac{8}{9}\right)^{\lambda+1}.$$

У цьому випадку потенціал на виході диференціального реєстратора можна обчислити як потенціал у НОЕ за формулою

$$\eta(\theta_r) \approx \sum_{\lambda=1}^{L_r} \left(\frac{8}{9}\right)^{\lambda+1} \cdot U(\lambda, m=0|8). \quad (10.4)$$

На рис. 10.8 наведені потенціали, обчислені в рамках БШС за формулами (10.2) і (10.3) (суцільна лінія) і формулою (10.4) (пунктир). Очевидно, що вони збігаються. При цьому імітація скорочує час розрахунку в  $\sim 6^2$  разів. Це є важливою передумовою розв'язання прикладних обернених завдань енцефалографії в реальному часі.

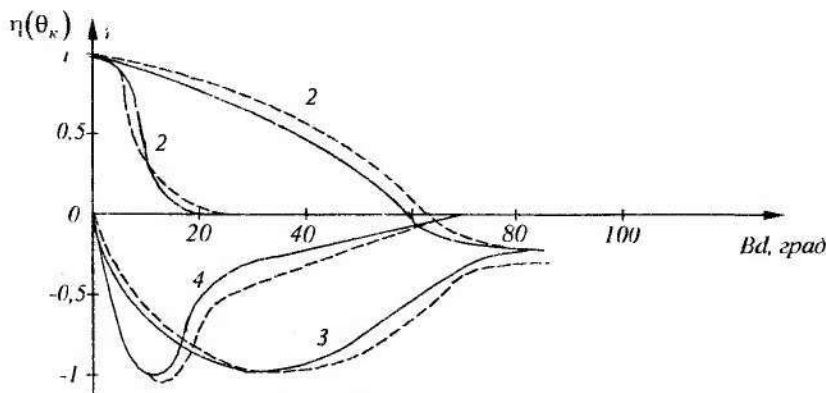


Рисунок 10.8 – Потенціали на виході ДР

#### 10.4 Алгоритм дискримінантного аналізу ЕЕГ-сигналу

Суть дискримінантного аналізу така. При заданій безлічі класифікованих змінних  $x_1, \dots, x_p$ , які характеризують дві або більше групи, основною метою лінійного дискримінантного аналізу є знаходження лінійних дискримінантних функцій

$$d = a + b_1 x_1 + \dots + b_p x_p, \quad (10.5)$$

щоб використовувати їх для класифікації спостережень до однієї з груп [13]. У випадку двох груп бажано знайти функцію  $d$ , значення якої для цих двох груп розрізняються якнайбільше. Це можна зробити, якщо зажадати, щоб  $d$  максимізувало відношення

$$R(d) = \frac{T(d)}{W(d)} \quad (10.6)$$

загальної  $T$  і внутрішньогрупової  $W$  сум квадратів. Функція  $d$  має таку властивість, що будь-яка інша дискримінантна функція, яка має нульову внутрішньогрупову кореляцію з  $d$ , повинна мати однакові вибіркові середні в кожній групі. Ця властивість може бути узагальнена на випадок декількох груп. Для довільної кількості груп безліч дискримінантних функцій  $d_1, \dots, d_r$  має однакове середнє значення в кожній групі. Це додає чіткий зміст висловленню, що вся інформація про класифікацію  $x_1, \dots, x_p$  міститься в  $d_1, \dots, d_r$ . Послідовність  $d_1, \dots, d_r$  ненульових дискримінантних функцій із нульовими внутрішньогруповими кореляціями називається канонічною послідовністю, якщо

$$R(d_i) = \max_{d \in Z} R(d), \quad i = 1, \dots, n \quad (10.7)$$

де  $Z$  позначає безліч усіх дискримінантних функцій, які мають нульову внутрішньогрупову кореляцію  $d_1, \dots, d_{i-1}$ . Якщо є  $q$  груп, можна показати, що всяка канонічна послідовність довжиною  $q - 1$  повна.

Вводиться також групова функція, що класифікує  $d_k$ . Спостереження будуть класифіковані до такої групи  $g$ , для якої значення  $d_k$  найбільше. Видно, що ці функції  $d_1, \dots, d_q$  утворюють іншу безліч. Більш того, для кожних груп  $g$  і  $h$  різниця

$$d_{gh} = dg - dh \quad (10.8)$$

утворить гіперплоскість, яка відокремлює групу  $g$  від  $h$ . Усі  $q(q-1)/2$  таких різниць утворюють третю повну безліч.

Тут розглядається покроковий дискримінантний аналіз. Безліч класифікаційних змінних, що використовуються в остаточному аналізі, нерідко заздалегідь невідомі. Навіть коли вони відомі, може бути корисним аналіз, який використовує підмножину класифікаційних змінних. Покроковий дискримінантний аналіз є послідовністю методів аналізу, що переходять від одного з них до наступних додавань.

Найбільш широко використовуваний метод добору змінних із метою їхнього включення або виключення заснований на відношенні внутрішньої узагальненої дисперсії до узагальненої дисперсії для відбору змінних. Внутрішня узагальнена дисперсія є тільки визначником групової матриці перехресних добутків  $W(x)$  для змінних  $x = (x_1, \dots, x_p)$ , аналогічно узагальнена дисперсія є визначником загальної матриці перехресних добутків  $T(x)$  для цих змінних.

Відношення

$$\Lambda(x) = \det W(x) / \det T(x) \quad (10.9)$$

називається  $\Lambda$  – статистикою Уїлкса. Воно приймає значення між нулем і одиницею. Великі значення вказують на слабкий поділ між групами, малі значення – на суттєвий поділ.

Мультиплікативне збільшення

$$\Lambda(ux) = \Lambda(x, u) / \Lambda(x) \quad (10.10)$$

у  $\Lambda(x)$ , одержуване при додаванні змінної  $u$  до безлічі  $x = (x_1, \dots, x_p)$ , називається приватною  $\Lambda$ -статистикою. Відповідно  $F$ -статистика

$$F = \frac{n - q - p}{q - 1} \frac{1 - \Lambda(ux)}{\Lambda(ux)} \quad (10.11)$$

використовується для перевірки значущості змін в  $\Lambda(x)$  у результаті додавання  $U$ . У програмі вона використовується як засіб для добору змінних.  $F$ -статистика може називатися як  $F$ -статистикою включення (при включенні змінної  $u$  у безліч  $x$ ), так і  $F$ -статистикою вилучення (при вилученні  $u$  з безлічі  $x$ ).

Математичний апарат добору змінних, знаходження дискримінантної функції (з однієї на кожну групу) для класифікації спостережень на групи, визначення  $F$ -апроксимації статистики  $\Lambda$  описаний у [13]. На його основі складений алгоритм, схема якого наведена на рис. 10.9. Ця схема описує покроковий дискримінантний аналіз. Повна програма занадто довга для опису в деталях. Тому опущені деякі дії, включаючи блок для перетворення вхідних даних перед початком аналізу, блоки для читання параметрів і розподіли пам'яті, деталі графічного зображення канонічних змінних та ін.

В алгоритмі використовуються такі позначення:  $m$  – загальна кількість змінних;  $q$  – кількість груп;  $n$  – загальна кількість спостережень;  $n_g$  – кількість спостережень у групі;  $x_i$  –  $i$ -та змінна;  $x_{qi}$  – значення  $i$ -ї змінної в  $t$ -му спостереженні в групі  $g$ ;  $\bar{x}_{qi}$  – середнє значення  $i$ -ї змінної в групі  $g$ ;  $\bar{x}_{qi}$  – загальне середнє значення  $i$ -ї змінної;  $T(U, V)$  – загальна сума перехресних добутків для змінних  $U$  і  $V$ ;  $W(U, V)$  – внутрішньогрупова сума перехресних добутків для змінних  $U$  і  $V$ ;  $t_{ij} = T(x_i, x_j)$ ;  $\omega_{ij} = W(x_i, x_j)$ ;  $p$  – кількість змінних у даному аналізі;  $V_k$  – мультиплікативне збільшення  $\Lambda$  статистики Уїлкса в результаті включення або вилучення змінної  $x_k$ .

Поряд із покроковим дискримінантним аналізом існують інші альтернативні методи: метод опуклих оболонок, метод класифікації за координатами, метод коаліцій.

Завдання, розв'язувані за допомогою методів дискримінантного аналізу, найчастіше виникають під час діагностики захворювань; тому ці методи найчастіше використовуються в цій області.

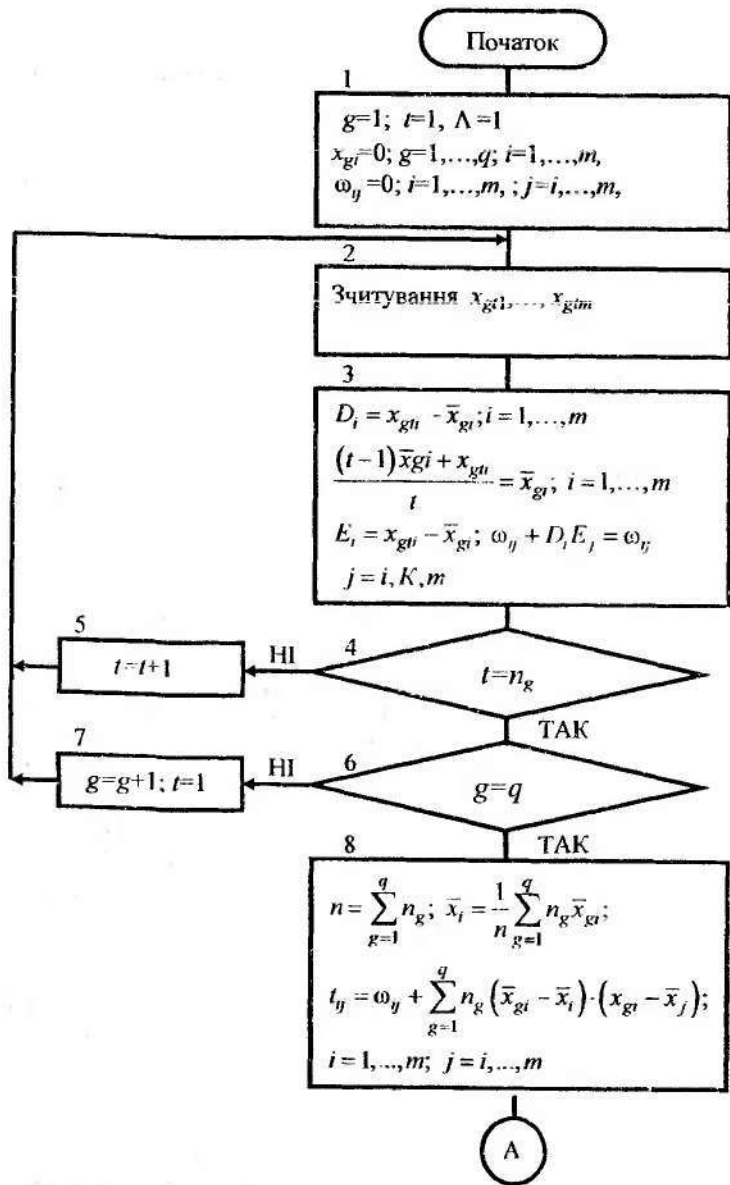
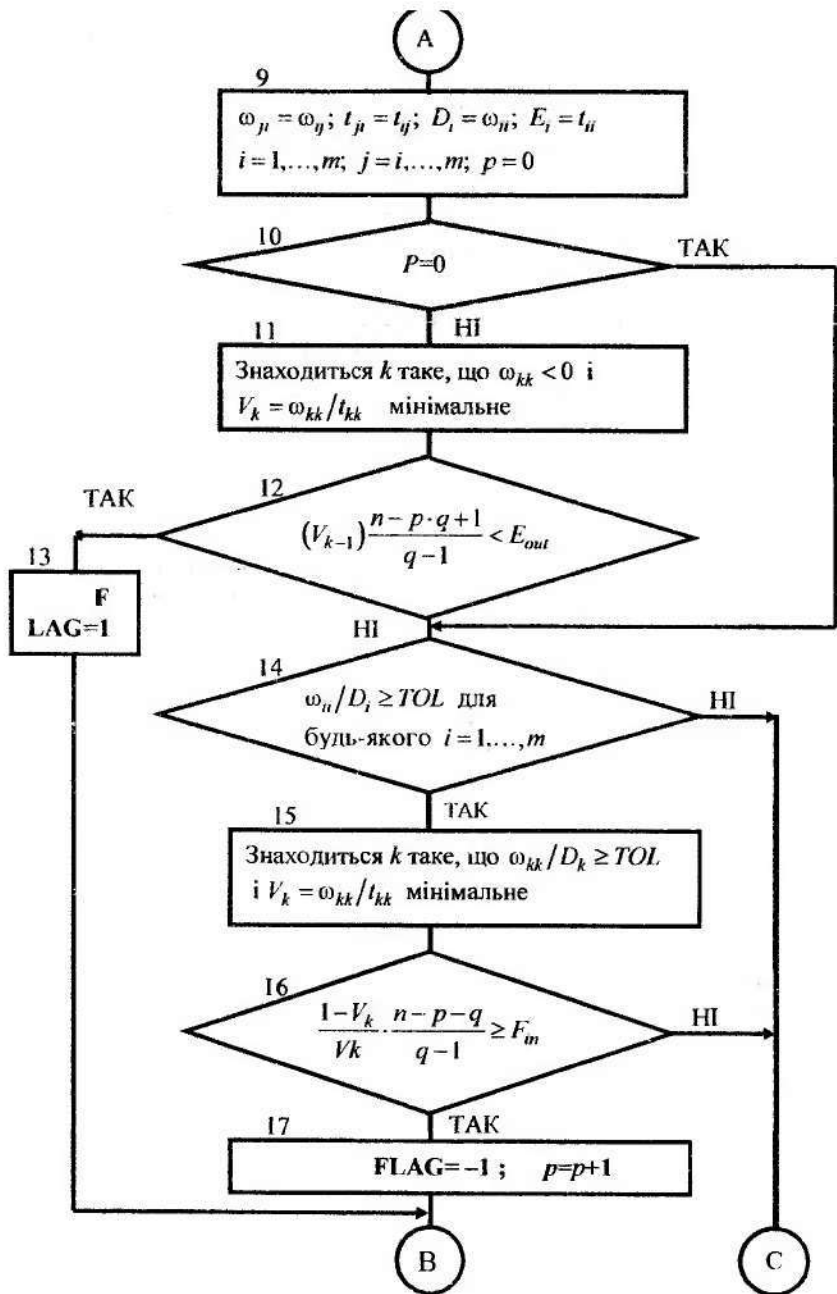


Рисунок 10.9 – Схема алгоритму дискримінантного аналізу ЕЕГ



Продовження рис. 10.9

В

С

18

$$SWP((\omega_{ij}), K, FLAG) = (\omega_{ij}), SWP((t_{ij}), K, FLAG) = (t_{ij})$$

$$\Lambda = \Lambda V_k$$

19

Для кожного  $i$  такого, що  $\omega_{ij} < 0$ , виводиться на друк значення статистики вилучення  $F$ :

$$F_i = \frac{\omega_{ii} - t_{ii}}{t_{ii}} \cdot \frac{n - p - q + 1}{q - 1},$$

а для кожного  $i$  такого, що  $\omega_{ij} < 0$ , - значення  $F$ -статистики включення:

$$F_i = \frac{t_{ij} - \omega_{ij}}{\omega_{ij}} \cdot \frac{n - p - q}{q - 1}$$

20

$$a = q - 1; b = n - 1 - \frac{1}{2}(p + q); df_1 = pa; df_2 = bc + 1 - pa/2;$$

$$c = \begin{cases} \left( \frac{p^2 a^2 - 4}{p^2 + a^2 - 5} \right)^{1/2}, & \text{якщо } p^2 + a^2 \neq 5 \\ 1, & \text{якщо } p^2 + a^2 = 5 \end{cases}$$

Виведення на друк:

$$\Lambda, (p_1 q - 1, n - q), F = \frac{1 - \Lambda^{1/2}}{\Lambda^{1/2}} \cdot \frac{df_2}{df}, (df, df_2)$$

21

$$big = -(n - q) \sum^{**} j \omega_{ij}^0 \cdot \bar{x}_{gi}; a_g = -(1/2) \sum^{**} j \bar{x}_{gi} big$$

для  $g = 1, \dots, q$  та  $i$  такого, що  $\omega_{ii} < 0$

22

$$Ph = \exp(dn) / \sum_{n=1}^q \exp(dh), \text{ де } dh = dn + \sum^{**} j x_{gn} b_{ih},$$

друк

D

Продовження рис. i0.9

D

23

для  $r = 1, \dots, p$  і  $S = r, \dots, p$ :

$$\omega_{rs} = \omega_{isir}; t_{rs} = t_{isir}; \omega_{sr} = \omega_{rs}; t_{sr} = t_{rs}; \\ \omega_{rr} = D_r; t_{rr} = E_r, \text{ де } i_r - r\text{-й індекс } i \text{ (} \omega_{ii} < 0 \text{)}$$

24

Нехай  $W$  і  $T$  – підматриці  $\omega_{ij}$  матриць  $i(ij)$ , побудовані по їх перших  $p$  рядках і стовпчиках, і нехай вирішується задача власних значень:

$$T b_i = \lambda W b_i; b_i^T W b_i = \delta_{ij}.$$

Для власних значень  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p$  і власних векторів  $b_1, \dots, b_p$

25

Друк  $b_j^T = (b_{j1}, \dots, b_{jp})$ ;  $E_j / E_p$ , де  $E_j = \sum_{i=1}^j (\lambda_i - 1)$

26

Для  $g = 1, \dots, q$  і  $t = 1, \dots, nq$  обчислюються і зображуються графічно

$$d_{gt} = \sum_{r=1}^p x_{gr} b_k; i = 1, 2$$

КІНЕЦЬ

Продовження рис. 10.9

## ОПИС АЛГОРИТМУ

БЛОК 1: індекс групи  $g$ , індекс спостереження  $t$  і поточне значення  $\Lambda$ -статистики вважаються рівними одиниці. Поточні групові середні  $x_{gt}$  і попередні внутрішньогрупові твори вважаються рівними нулю.

БЛОК 2: зчитує  $t$ -е спостереження в  $g$ -й групі.

БЛОК 3: послідовно обчислюються поточні групові середні  $\bar{x}_{gt}$  і поточні внутрішньогрупові добутки  $\omega_{ij}$ .

БЛОК 4: якщо індекс  $t$  номера спостереження не збігається з номером  $n_g$  у  $g$ -й групі, то відбувається повернення до читання наступного спостереження. В протилежному випадку управління передається в блок 6, де відбувається спроба введення іншої групи.

БЛОК 6: якщо індекс групи  $g$  не дорівнює загальному числу груп  $q$ , то відбувається перехід до введення спостережень із наступної групи. В протилежному випадку обчислення групових середніх  $\bar{x}_{gt}$  і внутрішньогрупових добутків  $\omega_{ij}$  закінчується і управління передається в блок 8.

БЛОК 8: обчислюються загальна кількість спостережень  $n$ , загальне середнє  $\bar{x}$ , і загальний добуток  $t_{ij}$ .

БЛОК 9: за верхніми трикутними частинами матриць  $(\omega_{ij})$  і  $(t_{ij})$  визначаються їхні нижні трикутні частини, запам'ятовуються діагоналі матриць  $(\omega_{ij})$  і  $(t_{ij})$ , а поточне число  $p$  відібраних класифікаційних змінних вважаються рівним нулю.

БЛОК 10: якщо  $p = 0$ , то жодної змінної ще не відібрано, і управління передається в блок 14, де відбувається спроба включити змінну. В протилежному випадку здійснюється перехід у блок 11, де відбувається спроба виключити змінну.

БЛОК 11: якщо  $\omega_{kk} < 0$ , то  $k$ -а змінна входить у кількість відібраних;  $V_k = \omega_{kk}/t_{kk}$  – мультиплікативне збільшення  $\Lambda$ -статистики Уїлкса, одержуване в результаті її вилучення. Знаходиться  $k$ -й індекс змінної, для якої відповідне значення  $V_k$  приймає найменше значення з усіх включених змінних.

БЛОК 12: якщо значення  $F$ -статистики виключення для змінної, знайденої в блоці 11, менше порога  $F_{crit}$ , управління передається в блок 13, де виконується виключення. В протилежному випадку здійснюється спроба включити змінну в блок 14.

БЛОК 13: присвоєння  $FLAG=1$  призводить до виконання оператора оберненого вирахування в блоці 18 і вилученню  $k$ -й змінної.

БЛОК 14: якщо  $i$ -а змінна включена, то розмір  $\omega_{ij}/D_i < 0$ . З іншого боку, це значення є толерантністю  $i$ -ї змінної. Якщо хоча б один з цих розмірів перевищує поріг толерантності  $TOL$ , то управління передається в блок 15, де відбувається спроба додати нову змінну. В протилежному випадку покрокова процедура завершується і управління передається в блок 21.

БЛОК 15: якщо  $\omega_k/D_k \geq \text{TOL}$ , то  $k$ -а змінна не входить до кількості включених, але задовольняє критерію толерантності для включення. Серед усіх таких змінних знаходиться змінна з індексом  $k$ , що має мультиплікативне збільшення  $V_k = k k / t k k$  – статистики Уїлкса.

БЛОК 16: якщо значення  $F$ -статистики включення для змінної, знайденої в блоці 15, не менше, ніж межове значення  $F$ -статистики включення, то управління передається в блок 17, де виконується включення. В протилежному випадку покрокова процедура закінчується і здійснюється перехід у блок 21.

БЛОК 17: присвоювання  $\text{FLAG} = -1$  приводить у блок 18 до прямого вирахування і включення  $k$ -ї змінної.

БЛОК 18: оператор вирахування, описаний у блоці 15, застосовується до матриць  $(\omega_{ij})$  і  $(t_{ij})$  внутрішніх і зовнішніх перехресних добутоків. Пряме вирахування на  $k$ -му діагональному елементі виконується, якщо  $\text{FLAG} = -1$ , а обернене –  $\text{FLAG} = 1$ . Обчислюється нове значення  $\Lambda$ -статистики Уїлкса.

БЛОК 19: якщо  $\omega_{ii} < 0$ , то  $i$ -а змінна входить у кількість включених. Для кожної включеної змінної друкується значення  $F$ -статистики виключення, а для кожної не включеної – значення  $F$ -статистики включення.

БЛОК 20: друкуються значення  $\Lambda$ -статистики Уїлкса і її ступеня свободи  $(p, q-1, n-g)$ , а також значення наближеної  $P$ -статистики  $F$  і її ступеня свободи  $(df_1, df_2)$ .

БЛОК 21: обчислюються і виводяться на друк коефіцієнти групової функції, що класифікує. Коефіцієнт  $b_{ij}$  є коефіцієнтом при змінній  $i$  в функції, що класифікує, для групи  $g$ , а  $ag$  – постійний член, який входить у цю функцію. Оскільки обчислюється тільки частина матриці станів, розташована вище діагоналі, то під час обчислення коефіцієнтів  $b_{ij}$  використовується тільки ця частина.

БЛОК 22: з використанням коефіцієнтів із блока 21 обчислюються значення  $d_1, \dots, d_q$  групової функції, що класифікує, і для кожного спостереження в кожній групі друкуються відповідні імовірності.

БЛОК 23: внутрішня і загальні матриці перехресних добутоків відображених змінних подаються на роздрукуванні верхніми лівими кутами матриць  $(\omega_{ij})$  і  $(t_{ij})$ . Компоненти матриць, розташовані вище діагоналей, знаходяться через елементи, розташовані нижче діагоналей матриць  $(\omega_{ij})$  і  $(t_{ij})$ , які в цьому випадку не модифікуються. Діагональні елементи знаходяться з масивів  $(D_i)$  і  $(E_i)$ .

БЛОК 24: Вирішується задача для власних значень  $T_{ei} = \lambda_i \cdot W_{ei}$

БЛОК 25: друкуються коефіцієнти канонічних функцій. Значення  $b_{ij}$  є  $i$ -ю компонентою  $j$ -го власного вектора, обчисленого в блоці 24, а також навантаженням  $j$ -ї канонічної функції  $i$ -ї відібраної класифікаційної змінної. Значення  $\lambda_{i-1}$  є взаємною (загальна мінус внутрішня) сумою квадратів для  $i$ -ї канонічної функції.

БЛОК 26: початкові дані читаються знову за одним спостереженням ( $x_{g1}, \dots, x_{gm}$ ) у будь-який момент часу. Значення, що відповідають відібраним змінним, використовуються для обчислення перших двох канонічних дискримінантних функцій. Ці значення ( $d_{g1}, d_{g2}$ ) запам'ятовуються і зображуються на діаграмі після того, як закінчується зчитування.

## 10.5 Алгоритми кореляційно-спектрального аналізу ЕЕГ

Сучасний стан науки дозволяє використовувати велику кількість методів спектральної оцінки для аналізу різного роду сигналів [10]. Однак в електрофізіології і, зокрема, електроенцефалографії застосовуються в основному класичні методи спектрального оцінювання. Кореляційно-спектральний аналіз дозволяє охарактеризувати частотний склад досліджуваного сигналу. Перетворення Фур'є є математичною основою, що пов'язує тимчасовий сигнал із його поданням у частотній області.

Для аналізу ЕЕГ використовують два основних методи оцінки спектра: періодограмний і корелограмний. Корелограмний метод оцінки спектра заснований на обчисленні автокореляційних або взаємкореляційних послідовностей і їхніх перетворень Фур'є. Оскільки перед обробкою на ЕОМ безупинний ЕЕГ-сигнал оцифровується, всі формули, необхідні для укладання алгоритмів і програм, будуть наведені в дискретній формі.

Автокореляційна послідовність  $R_{xx}[m]$  на практиці оцінюється за наявним кінцевим записом даних. Якщо є  $N$  відліків даних  $x[n]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , формула для дискретно-тимчасової оцінки автокореляції має такий вигляд

$$\bar{R}_{xx}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n] \cdot x[n+m]. \quad (10.12)$$

Вираз (10.12) застосовується тільки при додатних значеннях індексу тимчасового зсуву  $0 \leq m \leq N-1$  (ці зсуви дорівнюють  $mT$ -секунд, де  $T$  – інтервал дискретизації). Автокореляційні оцінки при часових зсувах, великих  $(N-1)T$ , неможливі через кінцевий запис наявних даних. При від'ємних значеннях індексу кореляційного зсуву  $N-1 \leq m \leq 0$  у виразі для цієї оцінки використовується модуль значення індексу  $|m|$ .

Дискретна послідовність  $\bar{R}_{xx}[m]$  формує незсунуті оцінки автокореляції

$$R_{xx} = E\{\bar{R}_{xx}[m]\} = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} E\{x[n] \cdot x[n+m]\}, \quad (10.13)$$

де символ  $E$  позначає математичне очікування.

Альтернативна оцінка автокореляції має такий вигляд:

$$\bar{R}_{xx}[m] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n] \cdot x[n+m], & 0 \leq m \leq N-1; \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n] \cdot x[n+|m|], & -(N-1) \leq m \leq 0. \end{cases} \quad (10.14)$$

Ця оцінка відрізняється від оцінки  $\bar{R}_{xx}[m]$  тільки множником, який нормує, тобто

$$\bar{R}_{xx}[m] = \frac{N-|m|}{N} \bar{R}_{xx}[m].$$

При кінцевому  $N$  оцінка (10.14) є зсунутою, оскільки

$$E\{\bar{R}_{xx}[m]\} = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R_{xx}[m],$$

однак при  $N \rightarrow \infty$  вона буде асимптотично незсунутою оцінкою. Середній квадрат буде, як правило, більше для оцінки  $\bar{R}_{xx}[m]$ , ніж для оцінки  $\bar{R}_{xx}[m]$ . Особливо в тих випадках, коли максимальне значення тимчасового індексу наблизатиметься до кількості звітів даних. Перевага частіше надається зсунутій оцінці автокореляції.

При нульовому часовому зсуві обидві оцінки мають однакові значення

$$\bar{R}_{xx}[0] = \bar{R}_{xx}[0] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2.$$

Ця величина характеризує повну потужність сигналу, що вимірюється. Вираз для визначення зсунутої оцінки взаємної кореляції має такий вигляд:

$$\bar{R}_{xy}[m] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n] \cdot y[n+m], & 0 \leq m \leq N-1; \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n] \cdot y[n+|m|], & -(N-1) \leq m \leq 0. \end{cases}$$

На відміну від оцінки автокореляції значення оцінки взаємної кореляції мають обчислюватися і при від'ємних значеннях тимчасового індексу  $m$ , оскільки  $\bar{R}_{xy}[m] \neq \bar{R}_{xy}[-m]$ .

Спектральна щільність потужності (СЩП) являє собою дискретно-тимчасове перетворення Фур'є автокореляційної послідовності

$$\bar{W}_{xx}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT). \quad (10.15)$$

Корелограмний метод оцінки СПМ – це підставлення у вираз (10.15) кінцевої послідовності невідомих значень автокореляції. Так, для індексів

часового зсуву з максимальними значеннями  $\pm L$  для зсунутої оцінки автокореляції  $\bar{R}_{xx}[m]$  можна сформулювати оцінку СЦП

$$\bar{W}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^L \bar{R}_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT).$$

Через те, що вибірковий спектр не є статистично стійким, необхідно обирати  $L \leq N$ , при якому утворюється статистично надійна оцінка.

Для зменшення ефекту просочування через неявно присутнє прямокутне або трикутне вікно, а, отже, і для зменшення зсуву оцінки використовують  $(2L + 1)$  – точкове кореляційне вікно  $\omega[m]$  непарної довжини на інтервалі  $-L \leq m \leq L$ . Тоді найбільш загальна форма корелограмного методу оцінки СЦП приймає вигляд

$$W_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^L \omega[m] \bar{R}_{xx}[m] \exp(-j2\pi fmT).$$

Ця форма оцінки СЦП була запропонована Блекманом і Тьюкі. Корелограмний метод Блекмана-Тьюкі для оцінки взаємної СЦП має вигляд

$$\bar{W}_{xy}(f) = T \sum_{m=-L}^L \omega[m] \bar{R}_{xy}[m] \exp(-j2\pi fmT).$$

Іншим методом оцінки СЦП є періодограмний метод. У цьому випадку вибірковий спектр має таку форму:

$$\bar{W}_{xx}(f) = \frac{T}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi fmT) \right|^2.$$

Це – вихідна форма періодограмної оцінки СЦП. Такий вибірковий спектр даватиме статистично нестійкі оцінки СЦП. Тому необхідно застосовувати загладжування періодограм.

Наприклад, для загладжування швидких флуктуацій вибіркового спектра можна використовувати усереднення за сусідніми спектральними частотами. Якщо для обчислення вибіркового спектра  $\bar{W}_{xx}(f)$  на сітці частот  $f_R = R/KT$ ,  $0 \leq R \leq K-1$  використовувати алгоритм швидкого перетворення Фур'є (ШПФ), то модифікована оцінка періодограми на частоті може бути отримана за допомогою усереднення в  $P$  точках значень із кожного боку від цієї частоти

$$\bar{W}_D[f_i] = \frac{1}{2P+1} \sum_{n=i-P}^{i+P} \bar{W}_{xx}[f_n]$$

Усі методи періодограмної оцінки СЦП засновані на застосуванні ШПФ.

Аналіз методів дослідження електроенцефалограм свідчить, що найбільш інформативними і "корисними" є методи кореляційно-спектрального аналізу.

визначення його структурних властивостей (амплітуди, площі кривої та ін.) мають у собі специфічну інформацію; такі методи використовуються в діагностиці чітко виражених захворювань, однак не придатні для дослідницьких цілей. Методи, що використовують сферичну систему координат для подання мозку у вигляді багаточислової електролітичної сфери, дають значно більшу погрішність (мозок не є ідеальною півсферою) і потребують розробки складних алгоритмів для обліку цих погрішностей. Більшість статичних методів обробки ЕЕГ-сигналів: дискримінантний, кластерний і факторний аналіз, як вхідні дані використовують вже отримані результати кореляційного або спектрального аналізу, отже кореляційно-спектральний аналіз є необхідним проміжним етапом для цих методів. Цей неповний перелік недоліків деяких методів аналізу ЕЕГ у порівнянні з кореляційно-спектральним (КСА) показує необхідність і важливість роботи в галузі розробки алгоритмічного і програмного забезпечення КСА.

Структурна схема алгоритму для спектрально-кореляційного аналізу ЕЕГ за двома відведеннями сигналів  $U(t)$  і  $V(t)$  наведена на рис. 10.10.

В алгоритмі використовуються такі позначення:

- 1)  $nT_a$  – поточне значення дискретного часу;
- 2)  $T_a = \Delta t$  – інтервал дискретизації;
- 3)  $m$  – кількість відліків зсуву;
- 4)  $mT_a$  – часовий зсув;
- 5)  $N$  – кількість відліків;
- 6)  $U(nT_a), V(nT_a)$  – поточні дискретні значення електроенцефалограми у відведеннях;

7)  $\omega(m)$  – функція вікна;

8)  $\bar{U}, \bar{V}$  – математичні очікування процесів ЕЕГ  $U(nT_a)$  і  $V(nT_a)$ ;

9)  $U_u(nT_a), V_u(nT_a)$  – центровані значення процесів

$$U_u(nT_a) = U(nT_a) - \bar{U}; \quad V_u(nT_a) = V(nT_a) - \bar{V}.$$

Енергетичні спектри обчислюються згідно з такими виразами:

$$W_u(f) = T \cdot \sum_{m=1}^{N-m-1} \omega(m) \cdot R_u(m) \cdot \cos(2\pi f m T_a);$$

$$W_v(f) = T \cdot \sum_{m=1}^{N-m-1} \omega(m) \cdot R_v(m) \cdot \cos(2\pi f m T_a);$$

$$W_{u,v}(f) = T \cdot \sum_{m=1}^{N-m-1} \omega(m) \cdot R_{u,v}(m) \cdot \cos(2\pi f m T_a).$$

Функція когерентності є оцінкою кореляції процесів  $U(nT_a)$  і  $V(nT_a)$  для

$$\text{кожної частотної складової } Coh(\omega) = \frac{|W_{u,v}(f)|^2}{W_u(f) \cdot W_v(f)}.$$



Рисунок 10.10 – Схема алгоритму кореляційно-спектрального аналізу електроенцефалограми

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

### 1 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

- 1.1 У чому полягає обробка й аналіз МБІ?
- 1.2 На які групи можна поділити МБ дані?
- 1.3 Назвіть види МБС.
- 1.4 Як можна провести класифікацію МБІ?
- 1.5 Які типові сигнали використовуються в функціональній діагностиці?
- 1.6 З яких фрагментів складається ЕКГ? Які процеси в серцевому м'язі вони відображають?
- 1.7 Поясніть структуру ФКГ. Що характеризують тони? Який зв'язок між елементами ФКГ і ЕКГ?
- 1.8 Що являють собою клацання і шуми ФКГ?
- 1.9 Поясніть структуру векторелектрокардіограми.
- 1.10 Який вигляд має реограма? Поясніть характерні точки на реограмі.
- 1.11 Поясніть структуру сфігмограми. Що відображають її складові елементи?
- 1.12 З яких ритмів складається ЕЕГ? Що вони характеризують?
- 1.13 Яку інформацію дає ЕМГ? Поясніть основні типи електроміосигналів?
- 1.14 Які методи застосовуються для аналізу ЕМС і ЕЕГ?

### 2 СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ СИГНАЛІВ

- 2.1 Що таке спектральне подання сигналу?
- 2.2 Які особливості спектрів періодичних і неперіодичних сигналів?
- 2.3 Як визначаються амплітуди і початкові фази окремих гармонік?
- 2.4 Як побудувати спектральні діаграми?
- 2.5 Визначте спектр послідовності прямокутних однополярних імпульсів. Який вигляд має її спектральна діаграма?
- 2.6 Як залежить спектр послідовності імпульсів від її часових параметрів?
- 2.7 Як розподіляється потужність в спектрі періодичного сигналу?
- 2.8 Яка функція визначає спектр неперіодичного сигналу? Поясніть її фізичний смисл.
- 2.9 Дайте характеристику узагальненому ряду Фур'є.
- 2.10 Які спеціальні функції застосовують для розкладання сигналів?
- 2.11 Наведіть приклади розкладання сигналів за спеціальними функціями.
- 2.12 Які функції Уолша вам відомі? Як можна розкласти сигнал за цими функціями?

- 2.13 Як перетворити аналоговий сигнал в цифровий?
- 2.14 Як визначити інтервал дискретизації?
- 2.15 Як формулюється теорема Котельникова-Шеннона?

### 3 ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

- 3.1 Як визначається ДПФ?
- 3.2 Як пов'язані перетворення Фур'є для аналогового і дискретного сигналів?
- 3.3 Які особливості має ДПФ?
- 3.4 Як залежить ДПФ від частоти дискретизації?
- 3.5 На якій відстані розташовані дискретні значення частоти?
- 3.6 Як обчислити модуль  $|F_d(j\omega_k)|$  і аргумент  $Arg F_d(j\omega_k)$  для дискретних частот?
- 3.7 Які особливості має ДПФ необмеженого в часі сигналу?
- 3.8 На яких частотах ДПФ постійного сигналу дорівнює нулю?
- 3.9 На якій відстані знаходяться амплітуди спектральних складових дискретизованого періодичного сигналу?
- 3.10 Який спектр має синусоїдальний сигнал при цілому і нецілому числі періодів?
- 3.11 Що являє собою "розмивання" спектра?
- 3.12 Що являють собою спектральні вікна?
- 3.13 Які вікна застосовуються для обробки сигналів?
- 3.14 Який вигляд мають часові та спектральні функції вікон?
- 3.15 Які особливості мають спектральні функції вікон?
- 3.16 Які основні критерії застосовуються для оцінки вікон?
- 3.17 Поясніть, як скласти алгоритм швидкого перетворення Фур'є?
- 3.18 Нарисуйте схему обчислювання 8-точкового ДПФ.

### 4 ЦИФРОВІ ФІЛЬТРИ

- 4.1 Які переваги мають цифрові фільтри у порівнянні з аналоговими?
- 4.2 Як можна реалізувати ЦФ?
- 4.3 Наведіть алгоритми рекурсивного і нерекурсивного ЦФ.
- 4.4 Поясніть поняття порядку ЦФ?
- 4.5 Наведіть схеми рекурсивного і нерекурсивного ЦФ.
- 4.6 Поясніть принцип обробки дискретизованих сигналів в ЦФ кожного типу.
- 4.7 Наведіть у розгорнутому вигляді алгоритм цифрової фільтрації в нерекурсивному ЦФ 5-го порядку.
- 4.8 Що являє собою передатна функція нерекурсивного ЦФ? Яку вона має особливість?
- 4.9 Як визначаються вагові коефіцієнти ЦФ нижніх частот?

- 4.10 Який вигляд має передатна функція ЦФ НЧ?
- 4.11 Як визначається передатна функція ЦФ з урахуванням функції вікна?
- 4.12 За якими правилами визначаються вагові коефіцієнти фільтра верхніх частот, смугового та режекторного?
- 4.13 Поясніть Z-перетворення дискретних сигналів.
- 4.14 Що являє собою системна функція рекурсивного ЦФ?
- 4.15 Як визначити АЧХ і ФЧХ рекурсивного ЦФ?
- 4.16 З якою метою під час розрахунку РЦФ застосовується білінійне перетворення?
- 4.17 За якими правилами реалізуються РЦФ вищих порядків?
- 4.18 Наведіть алгоритм розрахунку РЦФ.
- 4.19 Як перейти від системної функції до алгоритму вихідного сигналу?

## 5 ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

- 5.1 Наведіть основні числові оцінки статистичних характеристик.
- 5.2 Як визначається довірчий інтервал для середнього?
- 5.3 Що характеризують коефіцієнти асиметрії й ексцесу?
- 5.4 Як визначити коваріацію?
- 5.5 Як можна поєднати коефіцієнти парної взаємної кореляції?
- 5.6 Назвіть основні дискретні та безперервні розподіли імовірностей.
- 5.7 Поясніть принцип побудови гістограми вибірки.
- 5.8 Поясніть нормальний розподіл імовірностей випадкової величини.
- 5.9 Які розподіли пов'язані з нормальним? З якою метою вони застосовуються?
- 5.10 Що відображає теорема Байєса під час діагностики захворювань?
- 5.11 У чому смисл кореляційного аналізу?
- 5.12 Як визначити авто- і взаємкореляційні функції безперервних і дискретних сигналів?
- 5.13 Які перетворення мають місце між кореляційними функціями й енергетичними спектрами?
- 5.14 В чому полягає рівність Парсеваля?
- 5.15 Що являє собою енергетична ширина спектра?
- 5.16 Як визначити інтервал кореляції?

## 6 УЗАГАЛЬНЕНІ АЛГОРИТМИ АВТОМАТИЗОВАНОЇ ОБРОБКИ Й АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРОКАРДІОГРАМ

- 6.1 Дайте визначення основних етапів автоматизованого аналізу ЕКГ.
- 6.2 За яким принципом будується ідентифікація комплексів ЕКС?
- 6.3 Які основні процедури виконує алгоритм виділення елементів ЕКС?

6.4 Які операції необхідно виконати під час групування QRS-комплексів?

6.5 Як здійснюється ідентифікація зубця Р?

6.6 Як знаходяться характерні точки ЕКС – локальні екстремуми?

6.7 Як здійснюється пошук точок ЕКС, які відповідають початкам, кінцям і вершинам окремих зубців?

6.8 Які особливості має пошук зубців Р?

6.9 Поясніть алгоритми вимірювання комплексу параметрів ЕКС.

6.10 Як визначаються лікарські ознаки окремих складових ЕКС?

6.11 Поясніть принцип побудови синдромального алгоритму ЕКС.

6.12 З яких етапів складається алгоритм синдромального аналізу ЕКС?

## 7 КЛАСИФІКАЦІЯ АРИТМІЙ І ЛІКАРСЬКІ АЛГОРИТМИ ЇХНЬОГО АНАЛІЗУ

7.1 Які ознаки характерні для аритмій?

7.2 В чому полягає механізм появи аритмій?

7.3 Порівняйте ознаки синусних тахікардії і брадикардії.

7.4 Назвіть причини появи екстрасистолій.

7.5 Що являють собою бігемінія та тригемінія?

7.6 Поясніть основні види екстрасистол і їх електрокардіографічні ознаки.

7.7 За якими ЕКГ-ознаками можна розмежувати форми пароксизмальної тахікардії?

7.8 Що являють собою тріпотіння і мерехтіння передсердь?

7.9 Які ЕКГ-ознаки мають фібриляції передсердь?

7.10 Назвіть причини і ознаки фібриляції шлуночків.

7.11 Які аритмії пов'язані з порушенням провідності імпульсу?

7.12 Поясніть ЕКГ-ознаки атріовентрикулярної блокади?

7.13 Поясніть причини і ЕКГ-ознаки блокад правої і лівої ніжок пучка

Гіса.

7.14 Що являє собою асистолія?

7.15 Які аритмії виявляються найбільш небезпечними для життя людини?

## 8 АЛГОРИТМИ ОПЕРАТИВНОЇ ОБРОБКИ ЕЛЕКТРО-КАРДІОСИГНАЛІВ

8.1 Поясніть основні етапи обробки ЕКС.

8.2 Які складові містить у собі узагальнений алгоритм обробки ЕКС?

8.3 У чому полягає адаптивна цифрова фільтрація під час аналізу ЕКС?

8.4 Поясніть алгоритм цифрової фільтрації мережного наведення.

8.5 У чому полягає принцип двопараметричної апроксимації під час стиснення ЕКС?

8.6 Наведіть і поясніть етапи стиснення сигналу.

8.7 Наведіть опис алгоритму пошуку QRS-комплексу.

8.8 Поясніть основні етапи алгоритму пошуку QRS-комплексу за структурною схемою.

8.9 Які параметри визначають форму QRS-комплексу?

8.10 Як здійснюється аналіз форми шлуночкового комплексу для автоматичного аналізу ритму серця?

8.11 Який показник дає аналітичну інтерпретацію змін інтервалів при аритміях?

8.12 Поясніть принцип формування логічних рівнянь для окремих аритмій.

8.13 Поясніть графічну інтерпретацію логічних рівнянь для екстрасистол.

8.14 Як формуються діагностичні висновки з урахуванням морфології QRS-комплексу?

8.15 Як формується алгоритм розпізнавання небезпечних для життя аритмій?

8.16 Поясніть особливості обробки ЕКС за наявності електростимуляції.

8.17 За яких умов і за якими діагностичними критеріями виявляють перші ознаки ішемічної хвороби серця?

8.18 Поясніть діагностичні параметри ST-сегмента.

8.19 Наведіть кроки узагальненого алгоритму обробки навантаженої ЕКГ.

8.20 У чому полягає принцип побудови алгоритму аналізу форми ST-сегмента?

## 9 АЛГОРИТМИ ОЦІНКИ СТАНУ ПЕРИФЕРИЧНОГО КРОВООБІГУ

9.1 Які показники використовують для оцінки системи кровообігу?

9.2 Які фізіологічні сигнали визначають стан кровоносних судин?

9.3 Що характеризує упругий стан судин?

9.4 Які фактори впливають на швидкість поширення пульсової хвилі?

9.5 За яким принципом побудований алгоритм формування висновків про стан кровоносних судин?

9.6 Що визначає артеріальний тонус в різних фізіологічних умовах?

9.7 Наведіть фрагмент алгоритму оцінки стану кровоносних судин.

9.8 Наведіть варіанти можливих висновків про стан кровоносних судин.

9.9 Що враховує якісна оцінка реограми?

9.10 Які показники визначають тонус артеріальних судин?

9.11 Поясніть принцип побудови синдромального алгоритму оцінки характеру кровообігу.

9.12 Поясніть алгоритм оцінки параметрів реовазограми.

## 10 АЛГОРИТМИ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРОЕНЦЕФАЛОГРАМ

- 10.1 Які методи застосовуються для аналізу ЕЕГ?
- 10.2 Які параметри визначає алгоритм аналізу структурних властивостей ЕЕГ?
- 10.3 Наведіть фрагмент алгоритму аналізу структури ЕЕГ.
- 10.4 У чому полягає аналіз викликаних потенціалів мозку?
- 10.5 Поясніть параметри, що визначають властивості ВП.
- 10.6 Поясніть алгоритм розпізнавання форми викликаних потенціалів.
- 10.7 Поясніть пряму і обернену задачі електроенцефалографії.
- 10.8 Як обчислюється потенціал на поверхні багат шарової сфери?
- 10.9 У чому суть дискримінантного аналізу?
- 10.10 Поясніть схему алгоритму покрокового дискримінантного аналізу.
- 10.11 Що визначає дискримінантна функція?
- 10.12 Поясніть основні методи оцінки спектра ЕЕГ. Які функції визначають оцінку спектра?
- 10.13 Поясніть схему спектрально-кореляційного аналізу ЕЕГ.
- 10.14 Що визначає функція коваріації?
- 10.15 В чому принцип періодограмної оцінки спектральної щільності потужності?

1. Абакумов В.Г., Геранін В.О., Рибін О.І., Святаш Й., Синєкоп Ю. С. Біомедичні сигнали та їх обробка. – К.: ВЕК+, 1997. – 352 с.
2. Бондарев В.Н., Трестер Г., Чернега В. С. Цифровая обработка сигналов: методы и средства: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд. – Харьков.: Конус, 2001. – 398 с.
3. Волощук Ю.Г. Сигнали та процеси у радіотехніці: Підручник для вищ. навч. закладів. Ч.І. – Харків.: ХНУРЕ, 2003. – 648 с.
4. Шрюффер Э. Обработка сигналов: цифровая обработка дискретизированных сигналов – К.: Либідь, 1995. – 320 с.
5. Нарушения ритма сердца и их лечение. – М.: Медицина, 1987. – 68 с.
6. Наумов Л.Б. Распознавание болезней сердечно-сосудистой системы. Диагностические и тактические алгоритмы. (Программированное руководство). – Ташкент, 1979. – 344 с
7. Микрокомпьютерные медицинские системы: Проектирование и применения / Под ред. У. Томпкинса, Дж. Уэбстера. – М.: Мир, 1983. – 544 с.
8. Кардиомониторы. Аппаратура непрерывного контроля электрокардиограмм. / Под ред. Л.П. Барановского и А.П. Немирко – М.: Радио и связь, 1993. – 245 с.
9. Вальвачев Н.И. Статистический метод в медицинской практике с применением микро-ЭВМ и персональных компьютеров. – М.: Медицина, 1989. – 112 с.
10. Марпл-мл. С.А. Цифровой спектральный анализ. – М.: Наука, 1990. – 584 с.
11. Дюк В. Обработка данных на ПК в примерах. – СПб.: ПИТЕР, 1997. – 240 с.
12. Бурлеш Я. Применение ЭВМ в нейрофизиологических исследованиях. – Л.: Наука, 1984. – 283 с.
13. Статистический анализ данных на компьютерах / Под ред. В.Э. Фигурнова – М.: ИФРА-М, 1998. – 528 с.
14. Лапач С. Н., Чубенко А. В., Бабич П. Н. Статистические методы в медико-биологических исследованиях с использованием Excel. – К.: МОРИОН, 2001. – 408.
15. Статистические методы для ЭВМ: Пер. с англ. / Под ред. К. Эйслина, Э. Релстона, Г. С. Уилфа. – М.: Наука, 1986. – 464 с.

Навчальне видання

ЖУК Микола Ілліч  
СЕМЕНЕЦЬ Валерій Васильович

МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ ОБРОБКИ ТА АНАЛІЗУ  
МЕДИКО-БІОЛОГІЧНИХ СИГНАЛІВ

Навчальний посібник

За загальною редакцією проф. А.І. Биха

Відповідальний випусковий А. І. Бих

Редактор В.І. Заславська

Комп'ютерна верстка Г.М. Голоднікова

План 2006, поз. 79

Підп. до друку 20.06.06. Формат 60x84 1/16. Спосіб друку – ризографія.  
Умов. друк. арк. 15,6. Облік.вид. арк. 13,9. Тираж 200 прим.  
Зам. № 1-93. Ціна договірна.

---

ХНУРЕ. Україна 61166, Харків, просп. Леніна, 14

---

Віддруковано в навчально-науковому  
видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ  
61166, Харків, просп. Леніна, 14