

А. И. СПИЦЫН, канд. физ.-мат. наук,
В. М. ВАНЦАН, канд. физ.-мат. наук

СВЕРХПРОВОДЯЩИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ПОДВЕС В ПОЛЕ КАТУШКИ С ТОКОМ, ПОМЕЩЕННОЙ ВНУТРИ ЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Сверхпроводящие подвесы имеют широкое применение в различных областях науки и техники. Особую актуальность они приобретают в настоящее время, когда после открытия высокотемпературной сверхпроводимости появилась возможность изготовления сверхпроводящих подвесов, работающих при азотных температурах.

Проводится расчет для одного из типов подвесов в виде полого цилиндра, изготовленного из сверхпроводящего материала, в полость которого помещена катушка (рис. 1). Между основа-

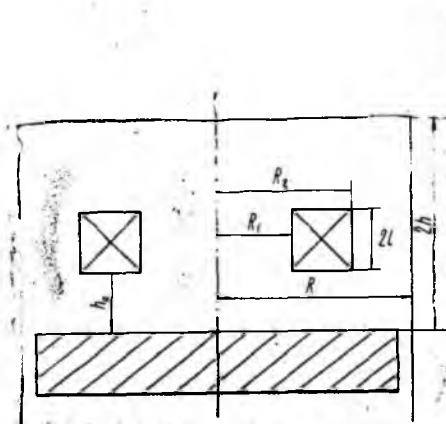


Рис. 1

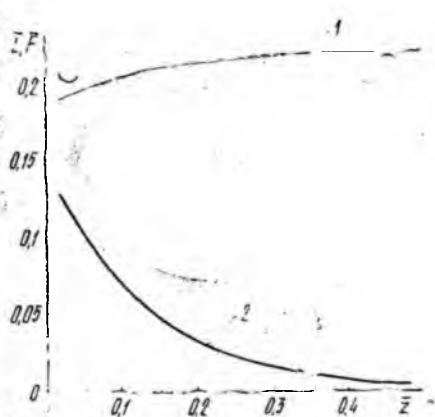


Рис. 2

нием и цилиндрической поверхностью подвеса имеется небольшой зазор, что дает возможность свободного перемещения верхней части относительно катушки и неподвижного основания. По-

лучим аналитическое соотношение для силы, действующей на подвес, коэффициент жесткости и механических частот колебаний для двух режимов работы подвеса. Первый режим характеризуется пропусканием постоянного тока через витки катушки, а второй постоянством замороженного магнитного потока в катушке $\Phi = \text{const}$ (сверхпроводящая катушка, концы которой замкнуты между собой). В работе [1] приведены некоторые результаты для такого подвеса, однако аналитические соотношения для силовых характеристик такого подвеса в литературе отсутствуют. Пусть катушка, обладающая прямоугольным сечением и равномерным распределением тока по нему, отстоит на расстоянии h_0 от основания (рис. 1). Радиус подвеса, обозначим через R , его длину $2h$, длину соленоида $2l$, а его внутренний и внешний радиусы через R_1 и R_2 , соответственно. Начало цилиндрической системы координат поместим на оси симметрии системы на расстоянии h_0 от нижнего основания цилиндра.

Не нарушая общности, векторный потенциал A на поверхностях внутренней полости сверхпроводящего цилиндра в случае осесимметричной системы можно положить равным нулю. Уравнение Пуассона для векторного потенциала имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{A}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\mu_0 i \quad (1)$$

с граничными условиями

$$A|_{r=R} = A|_{z=-h_0} = A|_{z=2h-h_0} = 0. \quad (2)$$

Здесь $i = \frac{I_b W}{2l(R_2 - R_1)}$ — плотность тока по сечению соленоида,

I_b — ток, текущий по виткам соленоида; W — количество витков в нем; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума или среды, заполняющей полость.

Уравнение (1) с граничным условием (2) можно решить с помощью интегрального преобразования Лапласа [2] или как это сделано в работе [3]. В случае соленоида конечных размеров соотношения для векторного потенциала в области значений $0 \leq z \leq 2l$ имеет вид

$$A = \frac{2\mu_0 i}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_1(\lambda_k r)(U_{k2} - U_{k1})}{\lambda_k^4 I_0^2(x_k) \text{sh } 2\lambda_k h} [\text{sh } 2\lambda_k h - \text{sh } \lambda_k (2h - h_0 - z)] \times \\ \times \text{ch } \lambda_k h_0 - \text{sh } \lambda_k (z + h_0) \text{ch } \lambda_k [2(h - l) - h_0] \quad (3)$$

Здесь

$$U_{kn} = \int_0^{\lambda_k R_n} t I_1(t) dt, \quad n = 1, 2; \quad \lambda_k = \frac{x_k}{R}; \quad x_k - k\text{-й корень функ-}$$

ции Бесселя первого порядка $I_1(x_k) = 0$, I_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Энергия, запасенная в магнитном поле соленоида

$$\omega = \frac{1}{2} LI_b^2 = \frac{1}{2} \int A i dV, \quad (4)$$

где L — индуктивность катушки, а интегрирование ведется по объему, где протекает ток. Из соотношений (3) и (4) для индуктивности катушки, размещенной внутри цилиндрической полости, непосредственно следует

$$L = \frac{2\pi\mu_0 W^2}{R^2 (R_2 - R_1)^2 l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(U_{k2} - U_{k1})^2}{\lambda_k^6 I_0^2(x_k) \operatorname{sh} 2\lambda_k h} \left\{ \operatorname{sh} 2\lambda_k h - \frac{\operatorname{sh} \lambda_k l}{\lambda_k l} [\operatorname{sh} \lambda_k (2h - l) + \operatorname{sh} \lambda_k l \cdot \operatorname{ch} 2(h - h_0 - l) \lambda_k] \right\}, \quad (5)$$

При перемещении подвеса вдоль оси z на элемент dz при $I_b = \text{const}$, из закона сохранения энергии получаем

$$F dz + \frac{1}{2} I_b^2 dL = I_b d\Phi; \quad d\Phi = I_b dL;$$

$$F = \frac{1}{2} I_b^2 \frac{dL}{dz} = \frac{1}{4} I_b^2 \frac{dL}{dh}, \quad (6)$$

где $d\Phi$ — изменение потока магнитного поля через катушку, а F — сила, действующая на подвес в точке z . Продифференцировав (5) по h , найдем

$$F = \frac{2\pi\mu_0 W^2 I_b^2}{R^2 (R_2 - R_1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(u_{k2} - u_{k1})^2 \operatorname{sh}^2 \lambda_k (l + h_0) \operatorname{sh}^2 \lambda_k l}{\lambda_k^4 I_0^2(x_k) \operatorname{sh}^2 2\lambda_k h (\lambda_k l)^2}. \quad (7)$$

Продифференцировав (7) по h , найдем коэффициент осевой жесткости подвеса в состояниях устойчивого равновесия в режиме работы соленоида $I_b = \text{const}$:

$$K_I = -\frac{1}{2} \frac{dF}{dh} = \frac{4\pi\mu_0 W^2 I_b^2}{R^2 (R_2 - R_1)^2} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(U_{k2} - U_{k1})^2 \operatorname{sh}^2 \lambda_k (l + h_0) \cdot \operatorname{ch} 2\lambda_k h \operatorname{sh}^2 \lambda_k l}{\lambda_k^3 I_0^2(x_k) \operatorname{sh}^3 2\lambda_k h (\lambda_k l)^2}, \quad (8)$$

а в случае сверхпроводящей обмотки катушки, когда ее концы замкнуты на себя, т. е. в режиме работы соленоида $\Phi = LI_b = \text{const}$:

$$K_{\Phi} = K_I + \frac{2}{L} \left(\frac{dL}{dz} \right)^2 I_b^2. \quad (9)$$

Собственные частоты осевых механических колебаний подвеса с весом $P=mg$ (эти величины определяются только точкой положения равновесия и явно не зависят от величины равновесного тока и массы тела) для одного и другого режимов работы соленоидов есть

$$f_I = \sqrt{\frac{K_I}{m}} = \frac{\sqrt{g}}{2\pi} \sqrt{\frac{K_I}{F}}; \quad f_\Phi = \sqrt{\frac{K_\Phi}{m}} = \frac{\sqrt{g}}{2\pi} \sqrt{\frac{K_I}{F} + \frac{4F}{LI_b^2}}. \quad (10)$$

По соотношениям (5), (7) — (10) можно рассчитать все основные силовые характеристики цилиндрического подвеса в поле катушек с прямоугольным поперечным сечением.

Для случая дисковой катушки из соотношений (5), (7), (8) при $l \rightarrow 0$ получаем

$$L = \frac{4\pi\mu_0 W^2}{R^2 (R_2 - R_1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(U_{k2} - U_{k1})^2 \cdot \text{sh } \lambda_k h_0 \cdot \text{sh } \lambda_k (2h - h_0)}{\lambda_k^5 I_0^2(x_k) \text{sh } 2\lambda_k h};$$

$$F = \frac{2\pi\mu_0 W^2 I_b^2}{R^2 (R_2 - R_1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(U_{k2} - U_{k1})^2 \text{sh}^2 \lambda_k h_0}{\lambda_k^4 I_0^2(x_k) \text{sh}^2 2\lambda_k h}; \quad (11)$$

$$K_I = \frac{4\pi\mu_0 W^2 I_b^2}{R^2 (R_2 - R_1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(U_{k2} - U_{k1})^2 \text{sh}^2 \lambda_k h_0 \cdot \text{ch } 2\lambda_k h}{\lambda_k^3 I_0^2(x_k) \text{sh}^3 2\lambda_k h}.$$

Соответствующие соотношения для величин L , F и K_I в случае бесконечно тонкой катушки $R_1 = R_2 = R_0$ получаются из (5), (7), (8), заменой выражения $\frac{(U_{k2} - U_{k1})^2}{(R_2 - R_1)^2}$, входящего в эти соотношения, на $\lambda_k^4 R_0^2 I_0^2(\lambda_k R_0)$. Соотношения (9), (10) для K_Φ , f_I и f_Φ при этом остаются теми же.

Предельные соотношения для величин F , K_I и f при больших расстояниях подвеса от катушки можно легко найти, если в суммах (7) и (8) ограничиться первым членом при $k=1$ и заменить $\text{sh}^2 2\lambda_k h$ на $\frac{1}{2} \exp(4\lambda_k h)$.

Соотношения для f_I и f_Φ в этом случае особенно просты

$$f_I = f_\Phi = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{g x_1}{2R}}. \quad (12)$$

Таким образом, величины $f_I \sqrt{\frac{R}{g}}$ и $f_\Phi \sqrt{\frac{R}{g}}$ при больших значениях h не зависят ни от размеров источников поля, ни от размеров полости, где размещена катушка. Эта величина равна

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x_1}{2}} \approx 0,4406.$$

Отметим следующее обстоятельство. При вычислении интеграла $U_{k1} - U_{k2} = \int_{R_2}^{R_1} t I_1(t) dt$ при значениях пределов интегрирования меньших 20 можно воспользоваться таблицами интегралов $\int_0^a t I_1(t) dt$, приведенными в работе [4], или соотношением для интеграла через специальные функции

$$\int_0^a t I_1(t) dt = \frac{\pi a}{2} [I_1(a) H_0(a) - I_0(a) H_1(a)],$$

где H_0, H_1 — функции Струве, затабулированные, например, в работе [5]. Для больших значений a, b можно использовать предельное соотношение

$$\int_a^b t I_1(t) dt \approx -\sqrt{\frac{t}{\pi}} (\sin t + \cos t)|_a^b.$$

Характерные зависимости безразмерных величин $\bar{L} = \frac{F}{\mu_0 R W^2}$ (1)

и $\bar{F} = \frac{F}{\mu_0 W^2 l_b^2}$ (2) от $\bar{z} = \frac{z}{R}$, где $z = 2h - 2l - h_0$ — расстояния от верхнего торца катушки до горизонтальной грани сверхпроводящего подвеса, приведены на рис. 2 для $\frac{h_0}{R} = 0,2; \frac{l}{R}$

$= 0,5; \frac{R_1}{R} = 0,2; \frac{R_2}{R} = 0,7$. С возрастанием координаты z индуктивность монотонно возрастает, стремясь к своему предельному значению, а сила монотонно убывает, асимптотически приближаясь к нулю в соответствии с экспоненциальным законом $\exp\left(-\frac{2x_1 z}{R}\right)$. Характер зависимости этих величин при различных значениях h_0, R, R_1, R_2 и l не изменяется.

Расчетные зависимости $\bar{f}_l = f_l \sqrt{\frac{R}{g}}$ (пунктирные кривые) и $\bar{f}_\Phi = f_\Phi \sqrt{\frac{R}{g}}$ (сплошные кривые) от z для значений параметров $\frac{h_0}{R} = 0,2; \frac{l}{R} = 0,1; \frac{R_1}{R} = 0,2$ и двух значений внешнего радиуса $\frac{R_2}{R} = 0,3$ (1) и 0,8 (2) показаны на рис. 3. Величина f_Φ , в соответствии с соотношением (10), всегда больше, чем со-

ответствующие значения величины f_1 . Эти величины с возрастанием z монотонно убывают, приближаясь к одной и той же величине 0,4405.

Таким образом, используя приведенные соотношения, можно точно рассчитать параметры подвеса рассматриваемого типа при

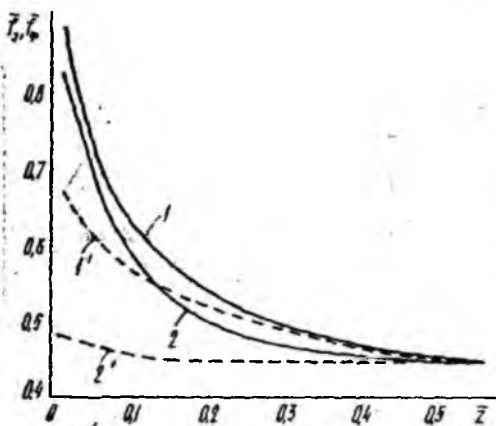


Рис. 3

любом его положении относительно катушки как в режиме $I_b = \text{const}$, так и в случае $\Phi = LI_b = \text{const}$. Одним из преимуществ такого подвеса является то, что он устойчив как в вертикальном, так и в радиальном направлениях в отличие от других типов подвесов, для которых существуют интервалы устойчивости [6].

Список литературы: 1. Менде Ф. Ф., Дубров Н. Н., Спицын А. И. К вопросу расчета цилиндрического сверхпроводящего электромагнитного подвеса // Журн. техн. физики, 1981. Вып. 51. С. 666—669. 2. Алиевский Л. А., Шерстюк А. Г. Плоскомеридианное поле областей с идеализированным ферро- и диамагнитными экранами // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1974. № 2. С. 86—93. 3. Цейтлин Л. А. Влияние электромагнитного экрана на параметры экранируемой катушки // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1972. № 6. С. 86—95. 4. Калантаров П. Л., Цейтлин Л. А. Расчет индуктивностей. Л., 1986. 488 с. 5. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций. М., 1959. 420 с. 6. Спицын А. И., Личман Е. А. Сверхпроводящий сферический подвес в поле соленоида с током // Журн. техн. физики, 1989. Вып. 52, № 2. С. 193—196.

Поступила в редколлегию 29.05.89