

УДК 681.5

А. Д. ПОЛОНСКИЙ

ОБУЧЕНИЕ КЛАССИФИКАТОРОВ НЕЙРОПОДОБНЫХ СЕТЕЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Введение.

В основу синтеза нейроподобных сетей (НПС) положена детекторная теория [1]. В рамках этой теории НПС рассматриваются как классификаторы, построенные на аналоговых логических элементах (АЛЭ) – электрические модели нейронов. Каждый АЛЭ воспроизводит на рабочем участке амплитудной характеристики (аналог функции активации) скалярное произведение вектора весовых коэффициентов (аналог синаптических связей) и вектора наблюдений (аналог возбуждающих воздействий).

Величины весовых коэффициентов определяют специализацию НПС. Поэтому задача синтеза НПС состоит в нахождении значений весовых коэффициентов, обеспечивающих требуемое поведение классификатора. В основу решения этой задачи положены методы обучения НПС. На практике, когда наблюдениями являются случайные аналоговые сигналы, остается актуальной проблема обучения НПС в условиях неопределенности. Суть этой проблемы состоит в том, что полного объема априорных сведений о распределениях наблюдений, требуемого классической теорией искусственных нейронных сетей [3], как правило, нет. В связи с этим возникает задача синтеза таких классификаторов, которые обладают свойством инвариантности к распределениям случайных аналоговых сигналов.

В настоящей работе для синтеза инвариантных классификаторов предложен метод обучения распознавания отношений (ОРО) и элементный (электрический) базис, которые полностью адекватны детекторной теории НПС. Приведены результаты, подтверждающие эффективность применения метода ОРО.

1. Метод ОРО.

В основе детекторной теории НПС лежит принцип пространственного кодирования параметра (возбуждающего воздействия) номером канала (местом возникновения возбуждения на множестве нервных клеток головного мозга) [2].

Далее будем рассматривать классификаторы с кодированием номером канала как идентифицирующие системы вида

$$\begin{cases} z_1 = y_1; z_k = 0 \forall k \neq 1 | U \in R_1 \notin Y; \\ z_2 = y_2; z_k = 0 \forall k \neq 2 | U \in R_2 \notin Y; \\ \vdots \\ z_m = y_m; z_k = 0 \forall k \neq m | U \in R_m \notin Y, \end{cases} \quad (1)$$

где $z_i, i = \overline{1, m}$, есть m -местные (n -арные) функции, заданные на множестве идентифицирующих переменных $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ (возбуждающих воздействий) со значениями в двухэлементном множестве $\{0, y_i \in Y\}$

$Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ – множество идентифицируемых переменных;

$R_i \in U^n$ – заданное на множестве U отношение, для которого $z_i = y_i, z_k = 0 \forall k \neq i$;

U^n – n -я декартова степень множества U . В дальнейшем изложении под идентифицирующими переменными понимаются случайные аналоговые сигналы с произвольными распределениями мгновенных значений напряжений.

Выражения (1) при $R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_m = U^n$ определяют класс алгоритмов идентификации одной y_i из m переменных y_1, \dots, y_m по признаку, заданному отношением

$$R_i = \{u_{i_1} \text{ или } u_{i_2} \text{ или } \dots \text{ или } u_{i_{n-1}} \text{ или } u_{i_n}\} \in \{R_1, \dots, R_m\}. \quad (2)$$

Здесь u_{i_p} или u_{i_q} есть либо $u_{i_p} > u_{i_q}$, либо $u_{i_p} < u_{i_q}$; $\{i_1, \dots, i_n\}$ – i -я перестановка целых чисел от 1 до n .

Функции (1) представим в виде скалярных произведений одномерных векторов:

$$z_i = a_i y_i; \quad a_i = \begin{cases} 0 & \{u_{i_1}, \dots, u_{i_n}\} \notin R_i; \\ 1 & \{u_{i_1}, \dots, u_{i_n}\} \in R_i; \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где a_i – весовые коэффициенты, подлежащие определению.

Предположим, что при заданных отношениях (2) алгоритм определения весовых коэффициентов заранее не ограничивается, а рассматривается задача синтеза преобразования вида (3), инвариантного к распределению идентифицирующих переменных.

Утверждение 1. Свойством инвариантности обладают преобразования вида

$$\pi(u_{i_p} - u_{i_q}) = \begin{cases} 0 & (u_{i_p} - u_{i_q}) < 0; \\ 1 & (u_{i_p} - u_{i_q}) \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Доказательство. События $\{\pi(u_{i_p} - u_{i_q}) = 0\}$, $\{\pi(u_{i_p} - u_{i_q}) = 1\}$ являются случайными и составляют полную группу

$$P\{\pi(u_{i_p} - u_{i_q}) = 0\} = 1 - P\{\pi(u_{i_p} - u_{i_q}) = 1\} = 1 - \int_0^1 F(u) dF(u) = 0,5. \quad (5)$$

Здесь $P\{x\}$ есть вероятность события x ; $F(u)$ – одномерная интегральная функция распределения (ИФР) идентифицирующих переменных.

Из (5) следует, что появление событий $\{\pi(u_{i_p} - u_{i_q}) = 0\}$, $\{\pi(u_{i_p} - u_{i_q}) = 1\}$ равновероятно независимо от конкретного закона распределения идентифицирующих переменных. Это позволяет утверждать что преобразования (4) обладают свойством инвариантности.

Пусть весовые коэффициенты в (3) заданы на множестве инвариантных преобразований (4) следующим образом:

$$a_i = \prod_{p=1}^n \prod_{q=p+1}^{n-1} \tilde{\pi}(u_{i_p} - u_{i_q}), \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

$$\tilde{\pi}(v) = \begin{cases} 1 - \pi(v) & | v < 0; \\ \pi(v) & | v > 0. \end{cases}$$

Утверждение 2. Преобразования вида (6) обладают свойством инвариантности к распределению идентифицирующих переменных.

Доказательство. Пусть $V = \{v = (v_1, \dots, v_m)^T\}$ – пространство всех векторов v таких, что $v_i = 0 \vee 1 \forall i = \overline{1, m}$. Очевидно, пространство V содержит 2^m точек. Тогда, исходя из (5), имеем

$$P\{a_i = v_i, i = \overline{1, m}\} = \prod_{i=1}^m P\left\{\prod_{p=1}^n \prod_{q=p+1}^{n-1} \pi(u_{i_p} - u_{i_q}) = v_i\right\} = \left[\int_0^1 F(v_i) dF(v_i)\right]^m = 0,5^m.$$

Отсюда следует, что совместное распределение весовых коэффициентов является равномерным независимо от вида ИФР идентифицирующих переменных. В этом проявляется свойство инвариантности преобразований (6).

Каждая перестановка идентифицирующих переменных в (6) порождает соответствующий вектор инвариантных весовых коэффициентов (ВИВК). При этом для всех простых ВИВК каждая компонента a_i является минтермом (произведением) нескольких инвариантных преобразований (4). В сложных ВИВК часть или все компоненты являются суммой нескольких минтермов. Множество всех ВИВК образует класс алгоритмов ОРО.

2. Элементный базис.

Алгоритмам ОРО можно поставить в соответствие топологические модели – сигнальные графы. Для таких моделей инвариантные преобразования (4) есть передачи соответствующих ветвей графа. В частности, при $n=2$ и $m>n$ в (3) получается сигнальный граф вида

$$\begin{aligned} y_i &\circ \xrightarrow{\pi_{12}} \circ z_i, i = \overline{1, m}; \\ y_j &\circ \xrightarrow{\bar{\pi}_{12}} \circ z_j, j = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\pi_{12} = \pi(u_1 - u_2)$; $\bar{\pi}_{12} = \pi(u_2 - u_1)$ есть инвариантные преобразования вида (4).

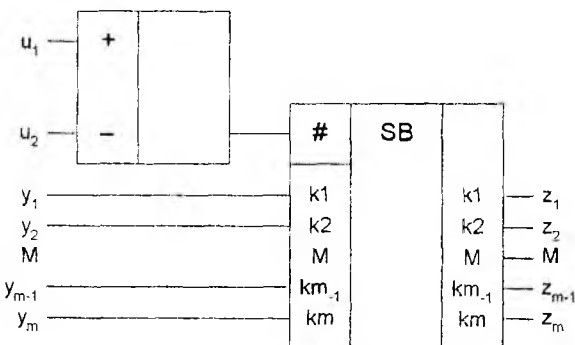


Рис. 1

Сигнальному графу вида (7) соответствует функциональная схема АЛЭ, которая содержит (рис. 1) последовательно соединенные компаратор СА и коммутатор СВ. Принцип действия схемы АЛЭ основан на управлении состоянием группы каналов ($k_i \rightarrow k_i, i = \overline{1, m}$) коммутатора и заключается в следующем. Пусть сигналы на неинвертирующем (+) и инвертирующем (-) компараторных входах схемы АЛЭ связаны отношением $R_1 = \{u_1 > u_2\}$.

В этой ситуации на управляющем входе # коммутатора напряжение соответствует уровню логической единицы. Каналы ($k_p \rightarrow k_p, p=1, 3, \dots, m-1$) и ($k_q \rightarrow k_q, q=2, 4, \dots, m$) коммутатора переводятся соответственно в состояние низкого и высокого выходного сопротивления. При этом выходные напряжения схемы АЛЭ определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} z_p &= \pi(u_1 - u_2)y_p = \pi_{12}y_p = y_p, p = 1, 3, \dots, m-1; \\ z_q &= \pi(u_2 - u_1)y_q = \bar{\pi}_{12}y_q = 0, q = 2, 4, \dots, m \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

где y_p и y_q есть сигналы, поданные на переключательные входы k_p и k_q схемы АЛЭ.

Если имеет место отношение $R_2 = \{u_1 < u_2\}$, то выходные напряжения схемы АЛЭ определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} z_p &= \pi(u_1 - u_2)y_p = \pi_{12}y_p = 0, \quad p = 1, 3, K, m - 1; \\ z_q &= \pi(u_2 - u_1)y_q = \bar{\pi}_{12}y_q = y_q, \quad q = 2, 4, K, m. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Инвариантные преобразования (8) и (9) описывают алгоритм классификации отношений $R_r \in \{R_1 = \{u_1 > u_2\}, R_2 = \{u_1 < u_2\}\}$, которым соответствуют идентифицируемые переменные $u_i = u_i^{(r)} \in \{u_1, u_2\}$ ранга $r \in \{1, 2\}$. Классификация осуществляется по двум информационным признакам: по номеру возбужденного канала ($z_i \neq 0$) и по уровню идентифицируемых переменных y_i . При этом осуществляется кодирование ранга идентифицирующей переменной значением идентифицируемой переменной, что адекватно детекторной теории НПС. Схема по рис. 1, которая осуществляет кодирование ранга идентифицирующей переменной значением идентифицируемой переменной, называется рангер. На рис. 2 показано условное графическое обозначение схемы рангера.

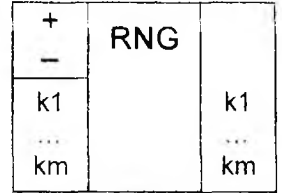


Рис. 2

Рангом идентифицирующей переменной u_i называется ее порядковый номер r_i в статистическом (вариационном) ряду $u^{(1)} < K < u^{(r_i)} < K < u^{(n)}$. Здесь $u^{(r)}$ есть r -й по величине элемент множества идентифицирующих переменных. Формально процедуру вычисления ранга можно представить в виде

$$r_i = \sum_{j=1}^n \pi(u_i - u_j), \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Совокупность рангов всех идентифицирующих переменных образуют некоторую перестановку целых чисел от 1 до n . Все такие перестановки, согласно (5), равновероятны независимо от вида распределения идентифицирующих переменных. Это позволяет утверждать, что преобразования (10) обладают свойством инвариантности к распределениям идентифицирующих переменных. Между инвариантными преобразованиями (6) и (10) существует функциональная связь: все ВВК являются кодами рангов идентифицирующих переменных. Таким образом, наличие элементного базиса рангеров, адекватного методу ОРО, позволяет синтезировать электрические схемы инвариантных классификаторов.

3. Синтез классификатора последетекторных сигналов.

Для исследования эффективности применения метода ОРО рассмотрим задачу классификации последетекторных случайных аналоговых сигналов $s_k, k = \overline{0, 1}$. Исходной информацией для решения рассматриваемой задачи являются выборки мгновенных значений напряжений сигналов

$$U = \{u(i) = u(i\tau), i = \overline{1, n}\}.$$

Здесь i – есть номер реализации;

τ – интервал квантования по времени, удовлетворяющий теореме Котельникова [4].

Мгновенные значения напряжений сигналов распределены по закону

$$\mathbf{a}^T \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \pi[u(i) - u(j)] u_i = u^{(n)}. \quad (16)$$

Здесь $u^{(n)}$ есть n -я порядковая статистика (максимальный по величине элемент) выборки $\{u(1), \dots, u(n)\}$.

Утверждение 3. Преобразование (16) обладает свойством инвариантности к распределению выборки.

Доказательство. Одномерные условные распределения случайной величины $u^{(n)}$ определяются выражениями

$$F(u^{(n)}|H_k) = \prod_{i=1}^n F_i(u|s_k); \quad W(u^{(n)}|H_k) = \frac{dF(u^{(n)}|H_k)}{du^{(n)}} = \frac{d}{du} \prod_{i=1}^n F_i(u|s_k), \quad k = \overline{0, 1},$$

где $F_i(u|s_k)$ – одномерные ИФР для i -х элементов выборок мгновенных значений напряжений сигналов s_k , $k = \overline{0, 1}$.

Из (12) следует, что элементы наблюдаемой выборки распределены одинаково: $F_i(u|s_k) = F(u(i)|s_k) \quad \forall i = \overline{1, n}$, поэтому

$$F(u^{(n)}|H_k) = [F(u|s_k)]^n; \quad W(u^{(n)}|H_k) = n[F(u|s_k)]^{n-1} W(u|s_k), \quad k = \overline{0, 1}. \quad (17)$$

Отметим, что $F(u(i)|s_k)$ есть случайная величина, для которой одномерная ПРВ определяется выражением

$$W[F(u(i)|s_k)] = \begin{cases} 0 & F(u(i)|s_k) \notin [0; 1] \\ 1 & F(u(i)|s_k) \in [0; 1] \end{cases}$$

Математическое ожидание условных одномерных ИФР n -х порядковых статистик выборок размера n независимых мгновенных значений напряжений сигналов s_k , $k = \overline{0, 1}$, определяется выражением

$$\begin{aligned} M[F(u^{(n)}|H_k)] &= \sum_{i=1}^n M\left\{[F(u(i)|s_k)]^n\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 [F(u(i)|s_k)]^n W[F(u(i)|s_k)] dF(u(i)|s_k) = \frac{n}{n+1}, \quad k = \overline{0, 1}. \end{aligned}$$

Инвариантность преобразования (16) проявляется в том, что статистические свойства случайной величины $u^{(n)}$ характеризуются квантилем уровня $n/(n+1)$ независимо от вида и параметров распределения выборки.

На множестве $\{u^{(n)}, U_0\}$ зададим отношения (2) в виде

$$R_{n+1=m-1} = \{u^{(n)} < U_0\}; \quad R_{n+2=m} = \{u^{(n)} > U_0\}. \quad (18)$$

Выражению (18) соответствует алгоритм ОРО:

$$\alpha_{m-1} = \pi[U_0 - u^{(n)}]; \alpha_m = \pi[u^{(n)} - U_0]. \quad (19)$$

Пусть в (1) идентифицируемые переменные отождествлены следующим образом:

$$y_i = 0, \quad i = 1, m-1, \quad y_m = E. \quad (20)$$

Здесь E – напряжение, соответствующее уровню логической единицы.

Подстановка (16), (19) и (20) в (3) приводит к инвариантному преобразованию

$$z = \pi \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \pi[u(i) - u(j)] u(i) \right] - U_0 \right\} E. \quad (21)$$

На рис. 3 приведена схема классификатора, синтезированная по алгоритму (21) в элементном базисе n рангеров RNG. Выходные напряжения рангеров в схеме классификатора определяются выражениями

$$u^{(2)} = \pi[u(1) - u(2)]u(1) + \pi[u(2) - u(1)]u(2) = \max\{u(1), u(2)\};$$

$$u^{(3)} = \pi[u^{(2)} - u(3)]u^{(2)} + \pi[u(3) - u^{(2)}]u(3) = \max\{u^{(2)}, u(3)\};$$

М

$$u^{(n)} = \pi[u^{(n-1)} - u(n)]u^{(n-1)} + \pi[u(n) - u^{(n-1)}]u(n) = \max\{u^{(n-1)}, u(n)\};$$

$$z = \pi[u^{(n)} - U_0]E.$$

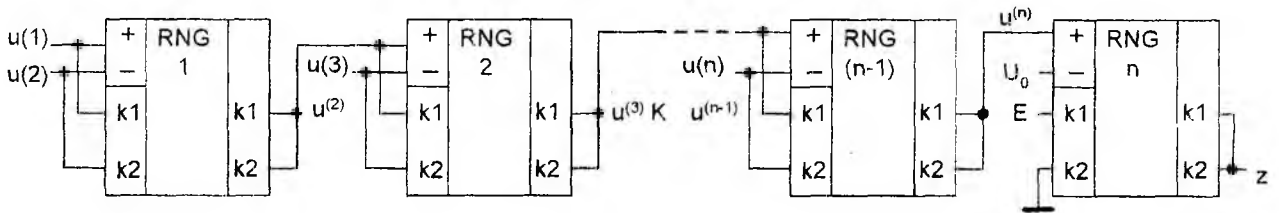


Рис. 3

Если напряжение z на выходе схемы классификатора равно нулевому потенциалу (1), то принимается гипотеза H_0 , а при $z=E$ – гипотеза H_1 . Таким образом классификатор реализует решающее правило (РП) вида

$$\begin{matrix} H_1 \\ u^{(n)} > U_0 \\ H_0 \end{matrix} \quad (22)$$

Вероятности ошибок первого и второго рода для РП (22) определяются выражениями

$$\alpha = P\{U_0 > u^{(n)} | H_1\} = \int_{-\infty}^{U_0} W(u^{(n)} | H_1) du^{(n)}; \quad (23)$$

$$\beta = P\{u^{(n)} > U_0 | H_0\} = \int_{U_0}^{\infty} W(u^{(n)} | H_0) du^{(n)}. \quad (24)$$

Учитывая (11) и (17), уравнения (23) и (24) имеют следующие решения:

$$\alpha = [1 - \exp(-1/y)]^n; \beta = [1 - \exp(-1)]^n - [1 - \exp(-1)]^n = 0.$$

Поскольку вероятность ошибки второго рода равна нулю, мощность РП (22) (вероятность правильной классификации сигналов) равна единице независимо от размера выборки, вида и параметров распределений мгновенных значений напряжений сигналов $s_k, k = 0, 1$. В этом проявляется свойство инвариантности РП (22).

В работе [4] для проверки рассматриваемых гипотез предложен алгоритм классификации, синтезированный по методу максимального правдоподобия (МП). Алгоритм МП является оптимальным в смысле критерия Неймана-Пирсона и представляет собой РП вида

$$\sum_{i=1}^n u_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} U_0 \chi_{1-\varepsilon}^2. \quad (25)$$

Здесь $\chi_{1-\varepsilon}^2$ есть процентная точка хи-квадрат распределения с $2n$ степенями свободы. Вероятности ошибок первого и второго рода для РП (25) определяются выражениями

$$\alpha = \Gamma(n, \chi_{1-\varepsilon}^2) / \Gamma(n); \quad (26)$$

$$\beta = 1 - \left[\Gamma(n, y \chi_{1-\varepsilon}^2) / \Gamma(n) \right]. \quad (27)$$

Здесь $\Gamma(n)$ и $\Gamma(n, x)$ есть полная и неполная гамма-функция.

Для ряда значений ε, y и n результаты расчетов по формулам (23), (24), (26) и (27) приведены в таблице. Здесь n есть размеры выборок, при которых РП (22) позволяет различать рассматриваемые гипотезы с вероятностью ошибки первого рода $\alpha < \varepsilon$. Видно, что РП (22) является более мощным, чем РП (25).

Таблица

ε	y	n	(23)	(24)	(26)	(27)
0,001	1,01	15	0,0009		0,1918	0,7981
	1,1	14	0,0007		0,1657	0,7398
	1,9	8	0,0008		0,0478	0,5261
0,005	1,01	12	0,0038		0,2903	0,6985
	1,1	11	0,0034	0	0,2526	0,6444
	1,9	6	0,0047		0,0916	0,4716
0,01	1,01	10	0,0096		0,3161	0,6733
	1,1	9	0,0096		0,2729	0,6321
	1,9	6	0,0047		0,1519	0,3289

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что метод ОРО является эффективным и простым в реализации, чем метод МП. Этот вывод справедлив не только для распределений вида (11), но и при использовании других вероятностных моделей случайных сигналов. Такие модели могут быть получены из гауссовского распределения путем нелинейных безынерционных преобразований, амплитудные характеристики которых не нарушают отношений порядка между элементами выборок мгновенных значений напряжений случайных сигналов.

Заключение.

В отличие от теории искусственных нейронных сетей [3] предложенный метод ОРО базируется на множествах идентифицируемых Y и идентифицирующих U переменных. Элементы множеств Y и U являются соответственно носителями информации о структуре соединений и структуре управления в нейронных сетях. Такая отличительная особенность метода ОРО согласуется с коннекционистским подходом [5] к моделированию нейронных сетей. Достоинством метода ОРО является существенное расширение функциональных возможностей адаптивного статистического подхода [4] к синтезу инвариантных классификаторов в условиях неопределенности.

Список литературы: 1. Позин Н. В. Моделирование нейронных структур. М.: Наука, 1970. 264 с. 2. Соколов Е. Н., Вайткявичус Г. Г. Нейроинтеллект: от нейрона к нейрокомпьютеру. М.: Наука, 1989. 238 с. 3. Руденко О. Г., Бодянский Е. В. Основы теории искусственных нейронных сетей. Харьков: ТЕЛЕТЕХ, 2002. 317 с. 4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Советское радио, 1968. 504 с. 5. Галушкин А. И. Нейронные системы памяти. М.: Изд-во МАИ, 1991. 179 с.

Поступила в редколлегию 22.05.2003