раметров штатных и аварийных процессов в энергетических объектах. Цифровые аварийные осциллографы вместе с программным обеспечением могут стать основой систем поддержки принятия решений при авариях в электросетях.

Управление восстановительными операциями. В энергосистеме могут происходить крупные аварии. То обстоятельство, что аварии происходят редко, только усложняет работу оператора, поскольку его опыт в решении вопросов восстановления нормального режима энергосистемы ограничен. Вследствие этого во многих центрах управления имеются планы проведения восстановительных действий.

В развитых зарубежных странах огромное внимание уделяется применению ГИС-технологий для управления инженерными коммуникациями.

Компания Boston Edison – это одна из старейших электрических и телекоммуникационных компаний в США, существующая более 100 лет и обслуживающая сегодня более 650000 клиентов на площади более 600 кв. миль. Инфраструктура электрических сетей компании Boston Edison включает 210000 электрических столбов, 52000 трансформаторов, 7500 миль подземного кабеля и 14500 миль воздушных линий. Boston Edison разработала и использует профессиональную AM/FM ГИС, предназначенную для улучшения обслуживания пользователей электросетями. Система CADIMAGE (Computer Aided Distribution Information Management and Grapgics Editor) построена с использованием программных продуктов фирмы ESRI и базируется на программе ARC/INFO. Компания разрабатывает ГИС управления энергосетью для обслуживания пользователей коммуникаций, для облегчения обслуживания, ремонта и диспетчеризации электрических сетей. Уже имеется подсистема, ответственная за отображение нарушений на электролиниях и реагирование на запросы пользователей одновременно в главном центре приема вызовов, центре управления энергетическими сетями, а также во всех пунктах пользовательской службы на всей обслуживаемой компанией территории. Пользователи могут легко и быстро связаться с диспетчерами и ремонтными бригадами, а также получить исчерпывающую графическую, текстовую и сопутствующую информацию, что оптимизирует обслуживание и ремонт оборудования, значительно повышает эффективность обслуживания потребителей.

В настоящее время происходит переоценка и бурное развитие программно-аппаратных средств геоинформационных технологий, которые качественно изменят наши возможности по отображению явлений реального мира. Понятия пространства и времени в ГИС, использующиеся в качестве взаимосвязей, вместе с характеристиками и свойствами объектов, с процессами и событиями, происходящими на заданной территории, позволяют моделировать окружающий мир максимально правдоподобно.

Литература: 1. *ЭВМ* в управлении энергосистемами. Темат. вып.: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 173 с. (Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектронике; Т. 75, № 12). 2. *Kamstrup J.*, Klitko A. and others. Ukraine: Energy & Economy. EC Energy Centre in Kiev, 1996. 128 p. 3. *Уотермен Д.* Руководство по экспертным системам: Пер. с англ./ Под ред. В.Л. Стефанюка. М. 1989. 280 с. 4. *Программно-аппаратное* обеспечение, фонд цифрового материала, услуги и нормативно-правовая база геоинформатики. Ежегодный обзор. Вып.3. Том 1. (1996-1997). Приложение к “Информационному бюллетеню” ГИС-ассоциации. 1998. 206 с.

Поступила в редколлегию 10.02.99

Рецензент: д-р техн- наук Зацеркляный Н.М.

Чебатарев Станислав Иванович, канд. техн. наук, профессор кафедры геодезии и геоинформационных технологий Харьковской Государственной Академии городского хозяйства. Научные интересы: геоинформационные технологии. Увлечения и хобби: компьютерная графика. Адрес: Украина, Харьков, Пр. 50-летия СССР, 27, тел. 50-30-80, 40-94-46, 47-76-55.

Гриб Олег Герасимович, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой электроснабжения городов Харьковской Государственной Академии городского хозяйства. Научные интересы: управление в энергетике. Увлечения и хобби: охота, путешествия.Адрес: Украина, Харьков, Пр. 50-летия СССР, 27, тел. 50-30-80, 40-94-46,47-76-55.

Ерохин Андрей Леонидович, канд. техн. наук, доцент кафедры информатики Университета внутренних дел Украины. Научные интересы: системы принятия решений, современные компьютерные технологии. Увлечения и хобби: компьютер, радиолюбительство, музыка. Адрес: Украина, Харьков, Пр. 50-летия СССР, 27, тел. 50-30-80, 40-94-46, 47-76-55.

УДК 519.21

СТАБИЛИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРОЦЕССОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЯХ

РОДЗИНСКИЙ А. А.

Описывается несколько схем случайных блужданий с постоянным и изменяющимся числом состояний. Время перехода из одного состояния в другое предполагается дискретным; длительности переходов, вообще говоря, различны. Рассматривается случай, когда длительности переходов в совокупности образуют сходящийся ряд. Эта ситуация при определенных условиях позволяет произвести стабилизацию основных характеристик процесса блужданий за конечный промежуток времени. Приводятся примеры применения рассмотренных схем блужданий.

В настоящее время при рассмотрении многих процессов часто используют подход, основанный на теории марковских процессов. В ряде случаев решение задачи удается получить при рассмотрении соответствующим образом выбранного процесса случайных блужданий.

1. Рассмотрим простейший вариант случайного блуждания по целочисленным точкам числовой прямой. Пусть частица переходит из точки $x=i$ в $x=i+1$ с вероятностью p_i $(0<p_i<1)$ и с вероятностью $q_i=1-p_i$ попадает в точку $x=0$. Здесь состояниями являются целочисленные точки прямой $x=0, 1, 2, \ldots$; все состояния сообщающиеся.

Пусть в начальный момент времени частица находится в точке $x=0$. Вероятность цепочки переходов $0 \to 1 \to \ldots \to n \to \ldots$ равна

$$\lim_{n\to\infty} p_0 p_1 \cdots p_n . \qquad (1)$$

Если этот предел равен нулю, то состояние $x=0$ является возвратным (в этом случае и все остальные состояния возвратные). Если же предел (1) отличен от нуля, то все состояния невозвратны. В этом случае частица при $n\to\infty$ с вероятностью 1 будет неограниченно смещаться направо (стремиться к $+\infty$). Если же состояние возвратно, то частица с вероятностью 1 будет бесконечное число раз возвращаться в каждое из состояний $x=0, 1, \ldots$. Среднее время возвращения в исходное состояние $x=0$ равно

$$T=(1-p_0)+2(1-p_1)p_0+\ldots= \\ =1+p_0+p_0p_1+\ldots+p_0p_1\ldots p_{n-1}+\ldots. \qquad (2)$$

Если сумма (2) конечна и для всех i выполняется условие

$$q_i\ge\delta>0\ , \qquad (3)$$

то, как известно [5], существует единственное стационарное распределение $\left\{\pi_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ и для любого начального распределения вероятностей $\left\{p_j^0\right\}_{j=0}^{\infty}$ $\left(p_j^0=\mathsf{P}(x=j, t=0)\right)$

$$\lim_{t\to\infty}p_j(t)=\pi_j,\ \ j=0,1,2,\ldots\ . \qquad (4)$$

Здесь $p_j(t)$ ($j=0,1,2,\ldots$) – вероятности того, что частица находится в состоянии j в момент времени t. Нетрудно проверить, что

$$\pi_0=T^{-1}, \pi_1=T^{-1}p_0, \ldots, \pi_n=T^{-1}p_0p_1\ldots p_{n-1}.$$

Описанное случайное блуждание известно. Приведем некоторые его модификации.

2. Рассмотрим случайное блуждание с изменяющимся числом состояний. Пусть при $t=0$ число состояний $x=i$, $i\le n_0$ – конечно ($n_0<\infty$). Пусть, далее, в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_l, \ldots$ ($0<t_1<\ldots<t_l<\ldots$) число состояний процесса блужданий возрастает, принимая значения $n_1, n_2, \ldots, n_l, \ldots$ ($n_0<n_1<\ldots<n_l<\ldots$). Пусть, как и в рассмотренном выше варианте блужданий, переход из $x=i$ в $x=i+1$ происходит с вероятностью p_i, а "сброс" в нуль ($x=0$) происходит с вероятностью $q_i=1-p_i$. Однако теперь при $t_k\le t<t_{k+1}$ число состояний равно n_k. Вероятности p_i, q_i следовало бы метить помимо индекса i еще и индексом k. Мы не будем этого делать для простоты записи. При $t\in\left[t_k, t_{k+1}\right)$ начальное распределение вероятностей следует задавать в точках $x=0,1,\ldots,n_k$.

Пусть при $t\in\left[t_k, t_{k+1}\right)$ имеет место (3). Тогда если бы случайные блуждания происходили при всех $t>t_k$ (т.е. неограниченно долго), то предельное равенство (4) выполнялось бы. Ограничение $t<t_{k+1}$ приводит к тому, что в (4) $t\in\left[t_k, t_{k+1}\right)$, а за этот промежуток времени (4) может иметь место лишь для определенного класса начальных распределений вероятностей. Если разность $t_{k+1}-t_k$ достаточно велика, то величины $p_j(t)$ из (4) при t, близких к t_{k+1}, будут локализованы в окрестностях предельных точек π_j:

$$\pi_j-\sigma<p_j(t)<\pi_j+\sigma.$$

Таким образом, при t, близких к t_{k+1}, имеет место σ-фокусировка [3].

3. Опишем случайное блуждание, отличающееся от первого из рассмотренных числом точек "сброса". В первом блуждании точкой сброса являлось состояние $x=0$. Теперь число таких точек будет больше одной. Сначала рассмотрим блуждание с двумя точками сброса $x=0$ и $x=a$. Вероятностная схема блужданий здесь такова. При $x\in[0,a]$ частица переходит из $x=i$ в $x=i+1$ с вероятностью p_i и из $x=i$ в 0 с вероятностью $q_i=1-p_i$. Если же $x\in(a,\infty)$, то частица с вероятностью p_i переходит из $x=i$ в $x=i+1$, с вероятностью q_{0i} – в 0 и с вероятностью q_{ai} – в точку a ($p_i+q_{0i}+q_{ai}=1$). Если выполняется условие $q_{0i}\ge\delta>0$, то данное случайное блуждание имеет стационарное распределение. Если множество точек сброса $0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ равно n ($n>2$), то вероятностная картина блужданий выглядит так. При $x\in[0,a_2]$ схема блужданий та же, что и для двух точек сброса. При $x\in[a_2,a_3]$ частица с вероятностью p_i переходит из $x=i$ в $x=i+1$, с вероятностью q_{0i} – в точку 0 и с вероятностью q_{a_ji} – в точку a_j ($j=1,2$); $p_i+q_{0i}+q_{a_1i}+q_{a_2i}=1$. На полуинтервалах $(a_k, a_{k+1}]$ ($2<k\le n-2$), (a_{n-1},∞) схемы случайного блуждания вводятся аналогично. Если число точек сброса бесконечно, то схема случайных блужданий определяется так же, как и для конечного их числа.

4. Случайные блуждания с конечным или бесконечным числом точек сброса и изменяющимся числом состояний вводятся так же, как и для блуждания 2. В моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_l, \ldots$ ($0<t_1<\ldots<t_l<\ldots$) число состояний процесса принимает значения $n_1, n_2, \ldots, n_l, \ldots$ ($t_l\to\infty, n_l\to\infty$). На каждом множестве состояний из $[0,n_l]$ при $0\le t<t_{l+1}$ процесс блужданий определяется так же, как и для случая постоянного (бесконечного) числа состояний. Как и в рассмотренных выше случаях, условие существования стационарного распределения имеет вид

$$q_{0i}\ge\delta>0.$$

5. Опишем процесс блужданий на графе, представляющем собой дерево. Считаем, что ребра графа имеют целочисленные длины, вообще говоря, различные. Занумеруем вершины ветвей дерева, его ребра и точки на ребрах, отстоящие от его концов на целочисленные расстояния. Случайные блуждания происходят по этим точкам и они рассматриваются как состояния определяемого нами процесса. Координаты состояний теперь, в отличие от блуждания вдоль прямой, имеют вид (n_1, n_2, n_3). Здесь n_1 – номер вершины ветви, n_2 – номер ребра, которое из этой вершины исходит, n_3 – целочисленная координата на ребре с номером n_2. Существует много способов введения координат (n_1, n_2, n_3). В ряде случаев вершины ветвей разумно нумеровать в зависимости от их расстояний до вершины дерева, а нумерацию вершин ветвей, равноотстоящих от вершин дерева, нумеровать, скажем, слева направо. Ребра, исходящие из одной и той же вершины, также разумно нумеровать слева направо, целочисленные координаты точек на ребрах должны совпадать с расстояниями от этих точек до начала ребра. Пусть n_1, n_2, n_3 введены таким способом. Перейдем к описанию процесса блужданий на дереве. Вершины всех ветвей считаем точками сброса. Рассмотрим множество состояний (n_1, n_2, n_3) на графе, для которых n_1, n_2 фиксированы, а n_3 принимает значения целочисленных координат на ребре n_2. Пусть точка (n_1, n_2, n_3+1) принадлежит ребру (n_1, n_2) (т.е. ребру с номером n_2 с началом в n_1). Тогда обозначим через p_{n_1, n_2, n_3, n_3+1} вероятность перехода из (n_1, n_2, n_3) в (n_1, n_2, n_3+1). Если же точка (n_1, n_2, n_3) является концом ребра n_2, который совпадает с вершиной m_1, то следует задать вероятность перехода из (n_1, n_2, n_3) в $(m_1, m_2, 1)$. Здесь m_2 – номер ребра с началом в m_1. Кроме того, следует задать вероятности перехода в точки сброса (вершины ветвей). Описанный способ нумерации состояний удобен и для случая, когда блуждания на графе являются процессом с изменяющимися числом состояний. Такая нумерация удобна и тем, что дает возможность восстановить топологию графа. В ряде случаев можно прибегать к такой нумерации, при которой координатой состояния является одно число. Но и в этом случае целесообразно нумеровать состояния, начиная от вершины дерева, и производить нумерацию так, чтобы координаты состояний не убывали по мере их удаления от дерева.

Рассмотренные выше случайные блуждания можно изучать и при неодинаковых длительностях переходов из состояния в состояние. Если в этом случае последовательность длительностей переходов образует расходящийся ряд, то при выполнении некоторых условий [1, 2] будет иметь место фокусировка или σ-фокусировка. Описанные случайные блуждания можно рассматривать как дискретную цепь Маркова, порожденную марковским процессом с непрерывным временем [5]. В частности, этот процесс может быть и неоднородным, с переменными длительностями переходов.

Теперь при рассмотрении процесса блужданий на графе (см. п.5) не предполагается, что ребра графа имеют целочисленные длины, а состояния (точки на ребрах) – целочисленные координаты. Сформулируем условия фокусировки для этого случая [4]. При этом исследуемый процесс будем описывать его инфинитезимальной матрицей $\Lambda(t)$. Рассмотренные варианты случайных блужданий содержат некоторые ограничения (за один шаг процесс переходит из исходного состояния в ближайшее к нему, все вершины ветвей дерева являются точками сброса). Они были введены, чтобы имела место преемственность с известным и хорошо изученным блужданием 1. При исследовании процессов фокусировки и стабилизации от этих ограничений можно отказаться. Ниже состояния будем нумеровать одним индексом.

Пусть существует такая последовательность попарно непересекающихся интервалов

$$\left\{[s_k, t_k)\right\}_{k=1}^{\infty} \quad s_k < t_k < s_{k+1},\ s_k \uparrow t_0,\ t_0 \le \infty$$

и такая последовательность индексов $j_k,\ k = 1, 2, \ldots$ (j_k нумерует состояния), для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \inf_i \left| \int_{s_k}^{t_k} \lambda_{ij_k}(s)\,ds \right| = \infty\ , \qquad (5)$$

причем на множестве

$$[s_0, t_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} [s_k, t_k)$$

норма матрицы $\Lambda(s)$ ограничена одной и той же константой. Пусть, далее, $\Lambda(t)$ непрерывна на $[s_k, t_k)$ и существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \vec{p}(\tau_k) = \vec{p}\ , \qquad (6)$$

где $\tau_k \in [s_k, t_k)$, $\vec{p}(\tau_k)$ – нулевой собственный вектор матрицы $\Lambda^*(\tau_k)$. Тогда для любого j и любого начального распределения вероятностей, заданного в точке $s \in [s_1, t_0)$,

$$\lim_{t\uparrow t_0} p_j(s, t) = p_j.$$

Здесь p_j – j-я компонента вектора $\vec{p}$ из (6).

Если ряд (5) сходится, но его сумма достаточно велика, то t_0 является точкой σ-фокусировки.

Рассмотренные в статье схемы случайных блужданий могут быть использованы при изучении реальных процессов радиоэлектроники, экономики, экологии.

Литература: 1. *Герасин С.Н., Дикарев В.А, Числин Н.Н.* Существование предельных вероятностей для конечных процессов Маркова с убывающими к нулю временными промежутками переходов // Докл. Национальной Академии Наук Украины, 7, 1998. 2. *Дикарев В.А.* Точки фокусировки и стабилизация неоднородных марковских процессов. Х.: ХТУРЭ, 1995. 9 с. Рус. Деп. в ГТНБ Украины 28.02.95. № 533 – Ук. 95. 3. *Дикарев В.А.* Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей. Х.: ХТУРЭ, 1995. 11 с. Рус. Деп. в ГТНБ Украины 28.02.95. № 526 – Ук. 95. 4. *Дикарев В.А.* Условия фокусировки. Расщепление Марковского процесса на несвязные фрагменты. // Радиоэлектроника и информатика. 1998. № 3. 5. *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука. 1985. 320 с.

Поступила в редколлегию 05.02.99

Рецензент: д-р техн. наук Гиль Н.И.

Родзинский Анатолий Анатольевич, аспирант кафедры прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: случайный анализ и его приложения. Увлечения: иностранные языки, компьютеры. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-36.