

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ САМОЗАЙМАННЯ У ПІВКРУЗІ МЕТОДАМИ РОТЕ ТА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Калініченко А.С.

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
e-mail: anatolii.kalinichenko@nure.ua

This work is devoted to the use of the Rothe's method in combination with the method of two-sided approximations based on the use of the Green's function to solve the 2D initial-boundary value problem for the semilinear equation of thermal conductivity in half-circular domain. The power of the internal heat source is approximated by exponential dependence.

Моделювання процесів самозаймання у насипові матеріалу (вугілля, бавовни), переріз якого має форму півкола (рис. 1), приводить до розгляду початково-крайової задачі для функції зміни температури:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\Delta u + Be^u, \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, t_0], \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}, t) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, t_0], \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (3)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ на } \partial\Omega, t \in [0, t_0], \quad (4)$$

де Δ – оператор Лапласа, $A > 0$, $B > 0$ – параметри, що задають фізико-хімічні властивості процесу, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 2, x_2 \geq 0\}$ – півкруг радіуса $\sqrt{2}$, t_0 – час моделювання. Останній доданок в правій частині рівняння (1) позначає тепло, що виділяється при хімічній екзотермічній реакції окиснення матеріалу, отриманий апроксимацією з закону Арреніуса [3], при сталих A і B .

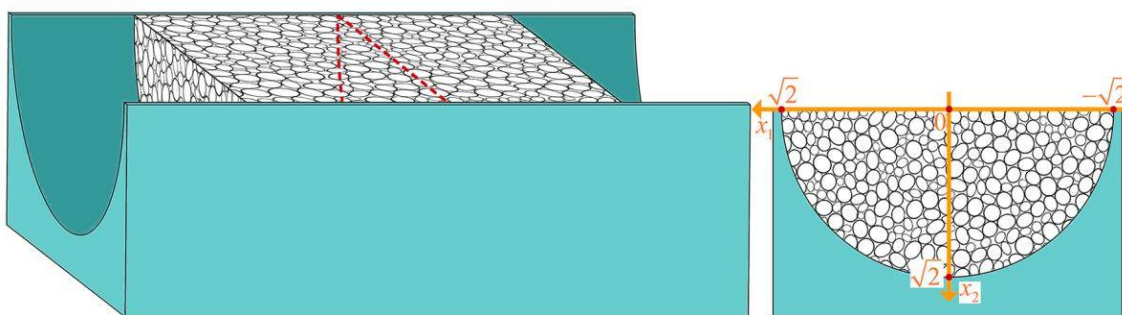


Рисунок 1 – Зображення насипу вугілля циліндричної форми та його перерізу, що описується областю Ω

Введемо на $[0, t_0]$ сітку з кроком τ $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, $m\tau = t_0$ та позначимо $U_j = U_j(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t_j)$. Згідно з методом Роте розв'язок задачі (1)–(4) шукатимемо вздовж прямих $t = \text{const}$. Для цього на кожній прямій $t = t_j$ ап-

роксимуємо похідну за часом відношенням скінченних різниць, що дозволяє перейти до послідовності крайових задач: $U_0(\mathbf{x}) = 0$,

$$-\Delta U_j + \frac{1}{A\tau} U_j = \frac{1}{A\tau} U_{j-1} + \frac{B}{A} e^{U_j}, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5)$$

$$U_j(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6)$$

$$U_j(\mathbf{x}) = 0 \text{ на } \partial\Omega, j = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

для знаходження наближеного розв'язку кожної з яких застосуємо метод двобічних наближень [2]. Для півкруга радіуса $\sqrt{2}$ функція Гріна крайової задачі (5)–(7) має вигляд:

$$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_n\left(\frac{r\mu_{np}}{2}\right) J_n\left(\frac{\rho\mu_{np}}{2}\right) \sin n\varphi \sin n\psi}{[J'_n(\mu_{np})]^2 \left(\mu_{np}^2 + \frac{2}{A\tau}\right)},$$

де $J_n(\mu)$ – функція Бесселя, μ_{np} – p -й додатний корінь $J_n(\mu) = 0$, декартові координати точок \mathbf{x} і \mathbf{s} пов'язані з полярними як $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, $s_1 = \rho \cos \psi$, $s_2 = \rho \sin \psi$.

Надалі вважатимемо j фіксованим. Оскільки при знаходженні функції U_j уже відома функція U_{j-1} , то крайова задача (5)–(7) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна:

$$U_j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left(\frac{1}{A\tau} U_{j-1}(\mathbf{s}) + \frac{B}{A} e^{U_j(\mathbf{s})} \right) ds,$$

яке далі розглянемо у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних у $\bar{\Omega}$, з конусом невід'ємних функцій $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$.

На j -му часовому шарі інваріантний конусний відрізок шукатимемо у вигляді $\langle 0, \beta_j \rangle$, де число $\beta_j > 0$ визначається з нерівності:

$$\frac{1}{A\tau} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) U_{j-1}(\mathbf{s}) ds + \frac{B}{A} e^{\beta} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \beta \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Отже, ітераційний процес методу двобічних наближень матиме вигляд:

$$v^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{A\tau} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) U_{j-1}(\mathbf{s}) ds + \frac{B}{A} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{v^{(k-1)}(\mathbf{s})} ds, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$w^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{A\tau} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) U_{j-1}(\mathbf{s}) ds + \frac{B}{A} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{w^{(k-1)}(\mathbf{s})} ds, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_j.$$

За наближений розв'язок вихідної задачі (1)–(4) на j -му часовому шарі на k -й ітерації з точністю $\varepsilon > 0$ приймаємо функцію

$$U_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x})}{2}$$

при виконанні умови

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon.$$

Застосовуючи до крайових задач методу Роте (5)–(7) на кожному часовому шарі запропонований ітераційний процес методу двобічних наближень, отримаємо набір функцій:

$$U_0(\mathbf{x}) = 0, U_1^{(k_1)}(\mathbf{x}), U_2^{(k_2)}(\mathbf{x}), \dots, U_m^{(k_m)}(\mathbf{x}),$$

за яким за допомогою апарату теорії інтерлінації [1] можна побудувати наближений розв'язок $u_m(\mathbf{x}, t)$, неперервний по часовій координаті.

Графіки наближень $U_j(\mathbf{x})$, $j = \overline{0,3}$, задачі (1)–(4) при $A = 1$, $B = 1,25$, $t_0 = 1$, $\tau = 1/3$, отриманих запропонованими методами, зображено на рис. 2.

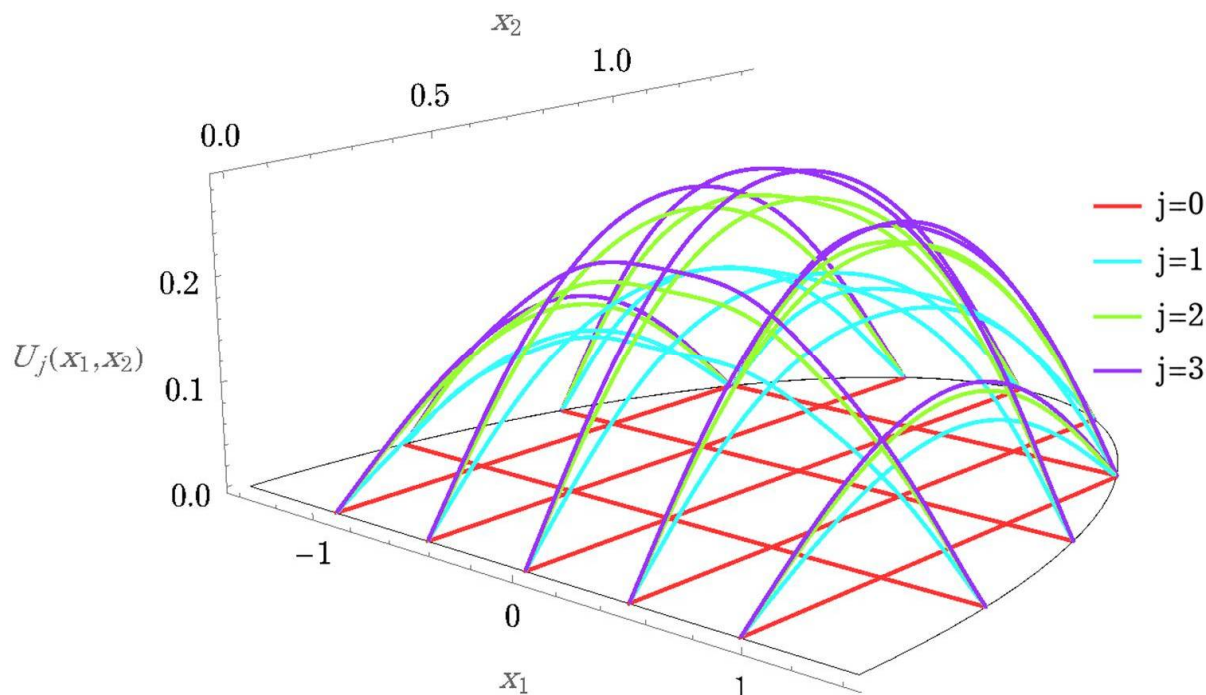


Рисунок 2 – Графіки наближених розв'язків $U_j(\mathbf{x})$ до розв'язку задачі (1)–(4) на часових шарах $t = \tau j$, $j = 0, 1, 2, 3$

Список використаних джерел:

1. Литвин О. М. Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В.Л. Рвачова. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Т. 50, № 4. С. 61–82.

2. Сидоров М. В. Метод Роте у комбінації з методом двобічних наближень розв'язання початково-крайових задач для напівлінійного рівняння теплопровідності. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 1. С. 108–127.

3. Франк-Каменецкий Д. А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Долгопрудный : Издательский Дом «Интеллект», 2008. 408 с.