

621.396(06)

P-15

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНСТИТУТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ ИМ. М. К. ЯНГЕЛЯ

# РАДИОТЕХНИКА

Республиканский  
межведомственный  
научно-технический  
сборник

Основан в 1965 г.

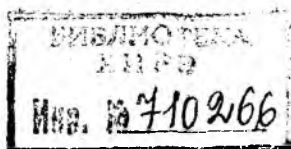
ВЫПУСК 91

2001

ХНУРЕ Radvotekhnika



710266



AG

ХАРЬКОВ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

1989

В сборнике представлены результаты исследований в области формирования, анализа и синтеза радиосигналов, помехоустойчивости систем связи. Рассмотрены теоретические проблемы работы электровакуумных приборов СВЧ с распределенным взаимодействием, некоторые вопросы измерений в диапазоне СВЧ.

Нормативные материалы приведены по состоянию на 1 января 1989 г.

Для преподавателей, научных работников, специалистов.

Редакционная коллегия: д-р техн. наук проф. *А. И. Терещенко* (отв. ред.), канд. техн. наук проф. *В. Д. Кукуш* (зам. отв. ред.), канд. техн. наук доц. *Ж. Ф. Пащенко* (отв. секр.), д-р техн. наук проф. *Ю. И. Волощук*, д-р техн. наук проф. *Б. Л. Кащеев*, д-р физ.-мат. наук проф. *В. М. Кузьмичев*, канд. техн. наук доц. *Е. М. Кулешов*, д-р техн. наук проф. *Н. Д. Колпаков*, д-р физ.-мат. наук проф. *О. А. Третьяков*, д-р физ.-мат. наук проф. *Н. А. Хижняк*, д-р техн. наук проф. *А. Г. Шейн*, д-р техн. наук проф. *Я. С. Шифрин*, д-р физ.-мат. наук акад. АН УССР *В. П. Шестопалов*

Ответственный за выпуск д-р техн. наук проф. *А. И. Терещенко*

Адрес редакционной коллегии: 310726, Харьков-726, просп. Ленина, 14, Институт радиоэлектроники, тел. 40-93-66

Редакция научно-технической литературы  
Зав. редакцией *Л. А. Гаврилова*

## СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

### РАДИОТЕХНИКА

Выпуск 91

Редактор *В. В. Арнаутова*  
Художественный редактор *Т. П. Короленко*  
Технический редактор *Г. П. Александрова*  
Корректор *Л. А. Емельянова*

ИБ 12568

Сдано в набор 25.09.89. Подписано в печать 15.12.89. БЦ 15858. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бум. тип № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 8,5. Усл. кр.-отт. 8,75. Уч.-изд. л. 10. Тираж 1000 экз., Изд. № 1788. Зак. 9-434. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете.  
310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16. 310003 Харьков, ул. Университетская, 16. Зак. 1817.

Р 2302020100 — 102  
М226 (04) — 89 — 460 — 89

© Харьковский институт ради-  
электроники, 1989

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ВЫДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ,  
ОТРАЖЕННЫХ ОТ МЕТЕОРНЫХ СЛЕДОВ, ИЗ ШУМА

Одна из важнейших характеристик комплекса метеорных тел в Солнечной системе — интегральная плотность потока частиц. В работе [1] по наиболее надежным экспериментальным результатам построена зависимость интегральной плотности потока  $N$  от массы частиц  $M$  вида  $\lg N = -14,5 - 1,25 \lg M$   $10^{-6} \text{ г} < M < 10^{-4} \text{ г}$  (1);  $\lg N = -9,8 - 0,55 \lg M$   $10^{-11} \text{ г} < M < 10^{-8} \text{ г}$  (2).

Зависимость (1) получена по наблюдениям ионизированных метеорных следов в атмосфере Земли радиолокационным методом, ее достоверность (обеспеченность измерениями) растет с уменьшением массы.

Выражение (2) построено по данным прямых регистраций столкновений частиц с датчиками, установленными на борту космических аппаратов. Достоверность модели (2) падает с ростом массы.

Диапазон масс  $M = (10^{-7} - 10^{-6}) \text{ г}$ , где происходит переход от (1) к (2), не исследован. Чтобы получить информацию о распределении частиц в этом диапазоне масс и тем самым увязать данные наземных и прямых наблюдений, необходимо повысить эффективную чувствительность метеорных радиолокационных станций (МРЛС).

Максимальное значение напряжения сигнала, рассеянного ненапыщенным метеорным следом, связано с параметрами аппаратуры и характеристиками следа соотношением [2]

$$U_m = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\lambda}{R} \right)^{3/2} (r_{\text{вх}} P G_1 G_2)^{1/2} \alpha_{\text{эфф}} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right). \quad (3)$$

Здесь  $P$  — мощность передатчика;  $G_1$  и  $G_2$  — коэффициенты направленности передающей и приемной антенн по отношению к изотропному излучателю;  $\lambda$  — длина волны МРЛС;  $R$  — наклонная дальность от МРЛС до точки зеркального отражения на следе;  $r_{\text{вх}}$  — входное сопротивление приемника;  $\alpha_{\text{эфф}}$  — эффективная линейная электронная плотность следа;  $e$ ,  $m$  — заряд и масса электрона;  $c$  — скорость света.

Рассеянный ионизированным следом сигнал будет зарегистрирован, если  $U_m > U_n$ , где  $U_n$  — пороговое напряжение обнаружителя.

Следовательно, повысить эффективную чувствительность МРЛС можно увеличением  $U_m$  или уменьшением  $U_n$ . Первое сопряжено со значительными техническими трудностями и затратами, поскольку, как следует из (3), требует увеличения мощности передатчика, размеров антенн и т. д. Так, самый мощный в Европе метеорный комплекс [3] уже включает передающее устройство мощностью 1 МВт в импульсе и антенные системы размерами в сотни метров. Второй путь заключает-

повышении порогового уровня регистрации и извлечении информации о метеорах из-под шумов. Реализовать его можно алгоритмическими средствами без существенных технических переделок и экономических затрат.

Любой алгоритм обработки радиосигналов, маскированных шумами, должен обеспечить накопление энергии на интервале наблюдения  $(t_1, t_2)$ , а наилучший накопитель — оптимальный фильтр [4]. При импульсной локации задачу оптимального обнаружения сигнала в шумах можно решать либо для каждого отдельного отраженного импульса, либо для пакета отраженных импульсов.

В первом случае эффективность фильтрации тем выше, чем шире полоса зондирующих сигналов, во втором — чем точнее известна огибающая пакета импульсов. Специфика задачи радиолокации метеорных следов требует использования простых зондирующих сигналов (радиоимпульсов с прямоугольной огибающей и немодулированным заполнением), а огибающая пакета отраженных импульсов (амплитудно-временная характеристика (АВХ) отраженного сигнала) заранее неизвестна и зависит от параметров частицы и атмосферы на высоте образования следа, т. е. тех характеристик, которые необходимо оценить в результате измерений.

Таким образом, алгоритм решения задачи выделения отраженных сигналов из шума следует искать в рамках наиболее общего вероятностного подхода, основанного на различии статистических свойств истого шума  $n(t)$  и аддитивной смеси отраженного сигнала  $s(t)$  с шумом. В этой связи заслуживает внимания идея энергетического подхода к обнаружению и оцениванию уровней (амплитуд) полезных сигналов, замаскированных белым гауссовым шумом [5].

Предлагаемый подход базируется на возможности представления вынужденного значения  $X$  узкополосного случайного процесса в виде геометрической суммы синфазной  $X_s$  и квадратурной  $X_c$  составляющих  $\bar{X} = \bar{X}_c + \bar{X}_s$  (4), где  $|X_c|$  и  $|X_s|$  — нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и одинаковыми дисперсиями  $\sigma^2$ , если входное колебание узкополосного тракта — чистый шум  $y(t) = n(t)$ , или  $|X_c|$  и  $|X_s|$  — нормально распределенные случайные величины с ненулевым средним и одинаковыми дисперсиями  $\sigma^2$ , при  $y(t) = s(t) + n(t)$ .

Известно, что энергию конечной реализации случайного процесса можно приближенно выразить суммой квадратов статистически независимых случайных величин (отсчетов, взятых в моменты времени  $k\Delta t$ ) с равными дисперсиями

$$\xi_i = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^{N_c} |X_t|^2, \quad (5)$$

где

$$N_c = 2N'_c, \quad N'_c = 2T\Delta F, \quad T = t_2 - t_1;$$

$\Delta F$  — полоса пропускания узкополосного тракта приемного устройства (УПЧ).

Тогда численная оценка приведенной энергии процесса на интервале анализа  $(t_1, t_2)$  представляет собой реализацию случайной величины  $\xi$ , подчиняющейся  $\chi^2$ -распределению с  $N_c$  степенями свободы. Причем, когда сигнал  $s(t)$  отсутствует в реализации  $X(t)$ , статистика  $\xi$  имеет центральное распределение  $\chi^2$  с плотностью вероятностей [6]

$$P(\xi) = \frac{1}{2^{\alpha/2} \Gamma(\alpha/2)} \xi^{\alpha/2 - 1} \exp(-\xi/2). \quad (6)$$

Здесь  $\alpha = N_c$ ,  $\Gamma(\mu)$  — гамма-функция,  $\xi > 0$ .

При наличии полезного сигнала  $s(t)$  статистика  $\xi$  имеет нецентральное распределение  $\chi^2$  с тем же числом степеней свободы и параметром нецентральности  $\lambda$ :

$$P'(\xi) = \frac{\exp(-(\xi + \lambda)/2) \xi^{\alpha/2 + 1}}{2^{\alpha/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda \xi/4)^j}{j! \Gamma(j + \alpha/2)}, \quad (7)$$

$$\xi \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

Величина параметра  $\lambda$  может быть взята в качестве меры оценивания наличия или отсутствия сигнала  $s(t)$  в принятом колебании. Сравнив экспериментальную оценку параметра нецентральности  $\lambda$  с некоторым пороговым значением  $\lambda_n$ , можно принять решение в задаче обнаружения.

Если случайная величина  $\xi$  имеет нецентральное распределение  $\chi^2$  с  $N_c$  степенями свободы, то ее математическое ожидание и дисперсия равны [6]

$$M[\xi] = N_c + \lambda; \quad (8)$$

$$D[\xi] = 2N_c + 4\lambda. \quad (9)$$

Таким образом, решение задачи отыскания оценки параметра  $\lambda$  распределения  $\chi^2$  заключается в формировании по выборочным отсчетам  $(X_i, i = 1, N_c/2)$  узкополосного колебания  $X(t)$  реализаций случайной величины  $\xi$  ( $\xi_i, i = 1, N_c/2$ ) в соответствии с выражением (5) и вычислении оценки их математического ожидания  $M[\xi]$ . Тогда оценка параметра  $\hat{\lambda}$ :  $\hat{\lambda} = \hat{M}[\xi] - N_c$  (10). Вместе с тем в работе [5] показано, что параметр нецентральности  $\lambda$  численно равен отношению энергии сигнала  $E_c$  на интервале анализа  $(t_1, t_2)$  к двусторонней спектральной плотности шума  $N_{02}$ :  $\lambda = E_c/N_{02}$  (11).

Следовательно, зная энергетические характеристики шума  $\sigma^2$ ,  $N_{02}$  в полосе пропускания  $\Delta F$  узкополосного тракта, интервал анализа  $(t_1, t_2)$  (что равносильно заданию величины  $N_c$ ), оценку  $M[\xi]$ , можно рассчитать и оценку энергии полезного сигнала в заданном интервале

$$E_c = \hat{\lambda} N_{02} (\hat{\lambda} - \lambda_n) = (\hat{M}[\xi] - N_c) N_{02} (\hat{\lambda} - \lambda_n); \quad (12)$$

$$P_c = \hat{\lambda} P_{ш1} (\hat{\lambda} - \lambda_n) = (\hat{M}[\xi] - N_c) P_{ш1} (\hat{\lambda} - \lambda_n), \quad (13)$$

где  $1(r)$  — единичная функция включения:  $1(r) = 1, r > 0; 1(r) = 0, r \leq 0$ . Итак, энергетический подход с позиций анализа нецентраль-

...распределения  $\chi^2$  сумм нормированных  $\sigma^2$  выборочных значений  
...укопосного случайного процесса позволяет по единой методо-  
...логии решать задачи обнаружения и оценивания энергии полезного  
...сигнала, замаскированного белым гауссовым шумом.

**Список литературы:** 1. *Лебединец В. Н.* Аэрозоль в верхней атмосфере и космическая пыль. Л., 1981. 272 с. 2. *Кашцев Б. Л., Лебединец В. Н., Лагутин М. Ф.* Метеорные явления в атмосфере Земли. М., 1967. 260 с. 3. *Метеорная автоматизированная радиолокационная система* / Б. Л. Кашцев, Ю. И. Волощук, А. А. Ткачук и др. // Метеорные исследования. 1977. № 4. С. 11—61. 4. *Левин Ю. С.* Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. М., 1969. 446 с. 5. *Урковиц Х.* Обнаружение неизвестных детерминированных сигналов по энергии // Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектронике. 1967. Т. 55, № 4. С. 50—59. 6. *Справочник по теории вероятностей и математической статистике* / В. С. Корольок, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. М., 1985. 640 с.

Поступила в редколлегию 20.06.88

УДК 621.396

П. С. СМОРОДОВ

### ПОИСК ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОРРЕКТИРУЮЩИХ СВОЙСТВ МОДУЛИРУЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Псевдослучайные сигналы (ПСС) успешно используются в системах радиолокации, радионавигации и передачи информации. Для расширения спектра в ПСС в качестве модулирующих последовательностей применяются псевдослучайные последовательности (ПСП) с числом элементов 1000—10000 и более, наибольшее распространение среди которых получили линейные ПСП максимальной длины или  $M$ -последовательности. Широкое использование  $M$ -последовательностей обусловлено простотой их получения и хорошими корреляционными свойствами, что позволяет обеспечить высокую точность измерения параметров движения летательных аппаратов, быструю синхронизацию приемных и передающих устройств и т. д. [1; 2]. Один из наиболее эффективных методов поиска ПСС для средних отношений сигнал-шум на входе — рекуррентный поиск [3]. Однако данный метод поиска не учитывает корректирующих свойств  $M$ -последовательностей и их сегментов, что является его недостатком и приводит к увеличению времени поиска в результате введения интервала корреляционной проверки синхронизма между принимаемым и опорным сигналами.

В целях сокращения времени поиска предлагается анализировать ПСП сегментами длины  $n$  элементов, причем  $k < n \leq N$ , где  $k$  — степень образующего полинома;  $N = 2^k - 1$  — период ПСП. При этом сегмент из  $n$  элементов можно рассматривать как слово линейного помехоустойчивого  $(n, k)$  кода, обладающего некоторой избыточностью, которую можно применять для уменьшения времени поиска.

Поисковую процедуру представим следующим образом. Производится прием  $n$  элементов ПСП. Принятый вектор анализируется на

отсутствие в нем ошибок. Если ошибок нет, поиск считается законченным и  $k$  элементов принятого вектора используются для формирования опорной ПСП. В случае появления ошибок вектор сдвигается на один разряд, принимается очередной элемент и проверка повторяется. Возможные траектории поиска можно представить графом переходов (рис. 1). Производящая функция вероятности перехода из начального состояния в поглощающее, соответствующее успешному окончанию поиска, будет равна

$$H(s) = \frac{s^n p^n}{1 - s(1 - P_{\text{но}})(1 - p^n)}, \quad (1)$$

где  $p$  — вероятность правильной оценки элемента ПСП;

$P_{\text{но}}$  — вероятность необнаружения ошибки в  $n$ -разрядном сегменте ПСП.

Конечную вероятность успешного окончания поиска найдем из выражения (1) при  $s = 1$ :

$$P_k = \frac{p^n}{1 - (1 - P_{\text{но}})(1 - p^n)}. \quad (2)$$

Для определения вероятности успешного завершения поиска за заданное время представим  $H(s)$  в виде ряда

$$H(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p^n [(1 - P_{\text{но}})(1 - p^n)]^i s^{n+i},$$

откуда получим вероятность успеха на  $l$ -й попытке

$$P(l) = p^n [(1 - P_{\text{но}})(1 - p^n)]^l.$$

Тогда вероятность успеха за  $l$  попыток

$$P_l = \sum_{i=1}^l P(i) = p^n \frac{1 - [(1 - P_{\text{но}})(1 - p^n)]^{l+1}}{p^n (1 - P_{\text{но}}) + P_{\text{но}}}. \quad (3)$$

При  $l = \infty$  выражение (3) переходит в (2). Для установления моментов распределения времени поиска найдем первую и вторую производные от производящей функции при  $s = 1$ :

$$m_1 = \left[ \frac{\partial H(s)}{\partial s} \Big|_{s=1} \right] / P_k, \quad m_2 = \left[ \frac{\partial^2 H(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=1} \right] / P_k.$$

Математическое ожидание и дисперсия времени поиска будут равны [4]

$$M[L] = m_1 = \frac{n - (n - 1)(1 - P_{\text{но}})(1 - p^n)}{p^n (1 - P_{\text{но}}) + P_{\text{но}}}; \quad (4)$$

$$D[L] = m_2 - m_1^2 + m_1 = \frac{(1 - P_{\text{но}})(1 - p^n)}{[p^n (1 - P_{\text{но}}) + P_{\text{но}}]^2}. \quad (5)$$

В выражениях (4) и (5) проведена нормировка времени относительно длительности единичного элемента ПСС, т. е. время поиска опреде-

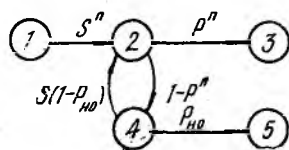


Рис. 1

ляется через количество элементов, которое необходимо принять до успеха. Анализ выражений (2) — (5) показывает, что с уменьшением отношения сигнал-шум величина  $P_k$  уменьшается, а среднее время поиска увеличивается. При этом конечная вероятность успеха может быть меньше 0,5. Для поддержания величины  $P_k$  на заданном уровне необходимо повышать длительность обрабатываемого сегмента. На рис. 2 показан график зависимости конечной вероятности успеха от отношения сигнал-шум для различных значений  $n$  при  $k = 10$ . Расчеты проводились для фазомодулированных ПСС длины 1023 элемента. Вероятность правильной оценки символа ПСП  $p$  и отношение сигнал-шум  $h^2$  для ФМ сигналов связаны известным соотношением:  $p = 0,5 [1 + \operatorname{erf}(h)]$ , где  $\operatorname{erf}(h)$  — функция ошибок,  $\operatorname{erf}(h) = 2/\sqrt{\pi} \times \int_0^h \exp(-t^2) dt$ .

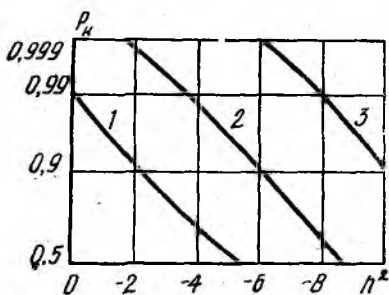


Рис. 2

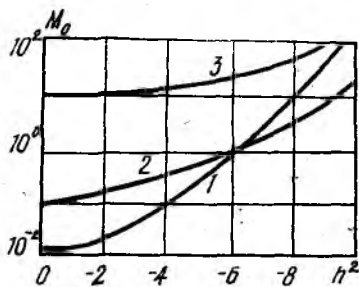


Рис. 3

Чтобы определить вероятность  $P_{\text{но}}$ , необходимо знать распределение весов соответствующих  $(n, k)$  кодов либо их минимальное кодовое расстояние  $d$ . Определить  $d$  намного легче, чем весовой спектр кода. При изменении  $n$  от 15 до 40  $d$  меняется от 3 до 14 для 1023-элементной ПСП. Зная  $d$ , вероятность необнаружения ошибки можно определить по формуле [5]:

$$P_{\text{но}} = 2^{-(n-k)} \sum_{i=d}^n \binom{i}{n} (1-p)^i p^{n-i}. \quad (6)$$

С увеличением  $n$  вероятность  $P_{\text{но}}$  уменьшается, что приводит к росту  $P_k$ . Однако увеличивать длину сегмента бесконечно нельзя, так как при этом резко возрастает среднее время поиска.

График зависимости величины  $M_0 = M[L]/N$  от отношения сигнал-шум при  $P_k = 0,99$ ,  $k = 10$  показан на рис. 3, кривая 1. Как видим, при  $h^2 > -6$  дБ данный метод поиска требует незначительных временных затрат, но при дальнейшем уменьшении  $h^2$  время поиска резко возрастает. Это объясняется тем, что для поддержания вероятности успешного завершения поиска не меньше 0,99 необходимо увели-

чивать длину обрабатываемого сегмента. Для сравнения приведена зависимость величины  $M_0$  от  $h^2$  для поиска с последовательной оценкой символов ПСП — кривая 2, и двухэтапного циклического поиска с идеальной второй ступенью обнаружения — кривая 3 [3]. При  $h^2 > -6$  дБ более предпочтительным оказывается предлагаемый метод: и в области малых шумов он позволяет получить значительный выигрыш во времени поиска по сравнению с известными методами.

Для успешного завершения поиска необходимо принять сегмент ПСП без ошибок. Анализатор сегмента можно построить на основе знания рекуррентной зависимости между символами ПСП [1]:

$$a_n = \sum_{j=1}^k a_{n-j} c_j; \quad k < n \leq 2^k - 1, \quad (7)$$

где  $c_j$  — коэффициенты порождающего полинома  $c(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i$ . Следовательно, для  $n$ -го принятого элемента ПСП должна выполняться проверка

$$a_n \oplus \sum_{j=1}^k a_{n-j} c_j = 0. \quad (8)$$

Для  $n$  принятых элементов ПСП можно построить  $n-k$  независимых проверок (8), которые будут выполняться только в том случае, если все элементы приняты без ошибок. Условие успешного завершения поиска с учетом (7), (8) запишем в виде

$$F = \bigwedge_{i=0}^{n-k-1} \left( \sum_{j=1}^k a_{n+i-j} c_j \oplus a_{n+i} \right) = 1. \quad (9)$$

Здесь знак  $\Lambda$  — логическое умножение (конъюнкция). Из выражения (9) следует, что анализатор сегмента легко построить на элементах цифровой техники без значительных аппаратных затрат.

Таким образом, анализ и учет корректирующих свойств сегментов ПСП позволяют уменьшить временные характеристики поиска при средних отношениях сигнал-шум в полосе спектра ПСС, а реализация данного метода достаточно проста и не требует сложных схемных решений.

Список литературы: 1. *Варакин Л. Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М. 1985. 384 с. 2. *Диксон Р. К.* Широкополосные системы / Пер. с англ.: Под ред. В. И. Журавлева. М. 1979. 302 с. 3. *Журавлев В. И.* Поиск и синхронизация в широкополосных системах. М. 1986. 240 с. 4. *Тихонов В. И., Миرونюк М. А.* Марковские процессы. М. 1977. 488 с. 5. *Протоколы и методы управления в сетях передачи данных* / Пер. с англ.: Под ред. Ф. Ф. Куо. М., 1985. 480 с.

Поступила в редколлегию 16.04.88

### МЕТОД ЭКСТРАПОЛЯЦИИ СИГНАЛОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ

Одна из важных задач теории случайных процессов, имеющая многочисленные практические применения, заключается в следующем: требуется наилучшим образом оценить значение случайной величины  $b$  через значения величины  $b_a$  ( $a \in A$ ). Речь идет об отыскании функции  $f(b_a/a \in A)$ , зависящей от  $b_a$ ,  $a \in A$ , с наименьшей ошибкой, удовлетворяющей приближенному равенству  $b \approx \hat{b} = f(b_a/a \in A)$  (1). В качестве примера можно рассмотреть прогноз (экстраполяцию) случайного процесса, когда необходимо оценить значение случайной величины в момент времени  $t$  по его значениям на некотором множестве моментов времени  $T$ , предшествовавших  $t$  [1]. При этом критерий оптимального наилучшего приближения зависит от практического характера рассматриваемой задачи. В теории линейного предсказания в качестве указанного критерия используют критерий минимальной среднеквадратической ошибки, заключающийся в выборе параметров (коэффициентов) предсказания, минимизирующих среднюю мощность сигнала ошибки экстраполяции  $\delta^2 = M[(b - \hat{b})^2]$  (2). Некоторые методы прогнозирования и предсказатели, обеспечивающие минимальное значение  $\delta^2$ , приведены в работе [2].

Рассматривается метод экстраполяции случайного сигнала, обладающего ограниченным спектром, который можно использовать при построении систем управления и связи, обладающих запаздыванием, и позволяет уменьшить значение среднеквадратической ошибки прогноза. Суть прогнозирования основана на выборе в качестве предсказателя устройства с передаточной функцией

$$K(j\omega) = \frac{2}{1 + e^{-j2\omega\tau}}, \quad (3)$$

где  $\tau$  — время прогноза. Выражение (3) запишем таким образом:

$$K(j\omega) = \frac{e^{+j\omega\tau}}{\cos \omega\tau}. \quad (4)$$

Числитель выражения (4) соответствует передаточной функции «идеального» экстраполятора, а знаменатель определяет ошибку прогноза, которая будет иметь периодический характер и явно выраженный максимум на критической частоте. Чтобы обеспечить минимальную ошибку прогноза в области эффективной ширины спектра случайного сигнала, время прогноза  $\tau$  надо выбирать достаточно малым (в этом случае знаменатель в выражении (4) близок к единице), что не всегда соответствует требуемому. В то же время выбор достаточно малого значения времени прогноза и использование  $n$  последовательно соединенных устройств с передаточной функцией (3) позволяют обеспечить

заданное время прогноза  $\tau_3 = n\tau$  и минимизировать ошибку прогноза в области эффективной ширины спектра прогнозируемого сигнала. Тогда передаточная функция устройства имеет вид

$$K(j\omega) = \frac{e^{+j\omega n\tau}}{\cos^n \omega\tau}. \quad (5)$$

Устройство с передаточной функцией (5) обеспечивает минимум ошибки прогноза в области низких частот, достигая на критической частоте большого значения. Теоретические расчеты показали, что наилучшие результаты достигаются при следующей передаточной функции (3):

$$K(j\omega) = \frac{2A(\omega)}{1 + A(\omega)e^{-j2\omega\tau}}, \quad (6)$$

где  $A(\omega)$  — некоторая периодическая функция, по своему значению не превышающая на периоде единицы. Один из вариантов определения  $A(\omega)$  можно представить как  $A(\omega) = a \cos 2\omega\tau + b$  (7). Однако устройство с передаточной функцией (6) в случае, когда  $A(\omega)$  определяется (7), не может быть реализовано физически.

Устройство с передаточной функцией (5) позволяет обеспечить минимум среднеквадратической ошибки прогноза в области эффективной ширины спектра случайного сигнала, может быть физически реализовано, но, как отмечалось, оно дает большое значение спектральной плотности ошибки прогноза на критической частоте. Максимум спектральной плотности ошибки прогноза при  $\tau_3 = \text{const}$  можно «сдвинуть» вправо в область более высоких частот путем увеличения параметра  $n$ . Такой «сдвиг» максимума спектральной плотности ошибки прогноза позволяет разнести его по частоте с максимумом спектральной плотности прогнозируемого сигнала и использовать их взаимнофильтрующие свойства. Как видно из выражения (4), взаимной фильтрации не будет на критической частоте, когда знаменатель равен нулю. Чтобы избежать этого, предлагается синтезировать устройство с передаточной функцией

$$K(j\omega) = \frac{d}{1 + B},$$

где

$$B = \begin{cases} e^{-j2\omega\tau}, & 0 < \omega < \omega_1; \\ D & \omega_1 < \omega < \omega_2; \end{cases} \quad (8)$$

$d, D$  — некоторые постоянные коэффициенты. Значение  $\omega_2$  должно быть больше эффективной ширины спектра прогнозируемого сигнала.

Возникает задача синтеза устройства, которое бы имело передаточную функцию (8). Решить ее можно с помощью метода наименьших квадратов, аппроксимируя передаточную функцию (8) выражением

$$K_1(j\omega) = \frac{\sum_{l=0}^N a_l e^{-j l \omega \tau}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-j k \omega \tau}}. \quad (9)$$

Тогда задачу синтеза устройства с передаточной функцией (8) сформулируем так: найти значения коэффициентов  $a_i$  и  $b_k$  выражения (9), которые бы минимизировали целевую функцию

$$F = \int_0^{\omega_1} \left| e^{-j2\omega\tau} - \frac{\sum_{i=0}^N a_i e^{-j\omega\tau}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-jk\omega\tau}} \right|^2 d\omega + \\ + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| D - \frac{\sum_{i=0}^N a_i e^{-j\omega\tau}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-jk\omega\tau}} \right|^2 d\omega. \quad (10)$$

Подынтегральное выражение в (10) представлено в виде дроби, в числителе и знаменателе которой стоят суммы по параметрам  $i$  и  $k$  соответственно. Минимизировать целевую функцию (10) достаточно сложно. Поэтому в некоторых случаях используют замену минимизации целевой функции (10) максимизацией другой функции:

$$F_1 = \int_0^{\omega_1} \left| (1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-jk\omega\tau})(1 - e^{-j2\omega\tau}) + \sum_{i=0}^N a_i e^{-j\omega\tau} \right|^2 d\omega + \\ + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| (1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-jk\omega\tau})(1 - D) + \sum_{i=0}^N a_i e^{-j\omega\tau} \right|^2 d\omega. \quad (11)$$

Проинтегрировав выражение (11) и взяв частные производные по  $a_i$  и  $b_k$ , получим

$$\frac{dF_1}{da_i} = D \frac{\sin i\omega_2\tau - \sin i\omega_1\tau}{i\tau} + \frac{\sin(i-2)\omega_1\tau}{(i-2)\tau} - \sum_{s=0}^N a_s \frac{\sin(i-s)\omega_2\tau}{(i-s)\tau} + \\ + \sum_{k=1}^M b_k \left( \frac{\sin(i-k-2)\omega_1\tau}{(i-k-2)\tau} + D \frac{\sin(i-k)\omega_2\tau - \sin(i-k)\omega_1\tau}{(i-k)\tau} \right); \\ \frac{dF_1}{db_k} = (1 - D^2) \left( \frac{\sin k\omega_2\tau - \sin k\omega_1\tau}{k\tau} + \sum_{n=1}^M b_n \frac{\sin(k-n)\omega_2\tau - \sin(k-n)\omega_1\tau}{(k-n)\tau} \right) + \\ + \sum_{i=0}^N a_i \left( \frac{\sin(i-k-2)\omega_1\tau}{(i-k-2)\tau} + D \frac{\sin(i-k)\omega_2\tau - \sin(i-k)\omega_1\tau}{(i-k)\tau} \right).$$

Коэффициенты  $a_i$ ,  $b_k$  найдем, решив систему линейных уравнений

$$\frac{dF_1}{da_i} = 0; \quad \frac{dF_1}{db_k} = 0. \quad (12)$$

Тогда выражение для передаточной функции экстраполятора представим как

$$K(j\omega) = \frac{d}{1 + \frac{\sum_{i=0}^N a_i e^{-j i \omega \tau}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-j k \omega \tau}}}. \quad (13)$$

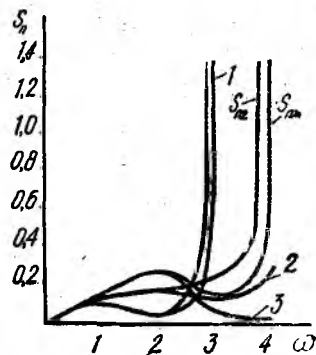
Проанализируем, как изменяется значение среднеквадратической ошибки прогноза, которая определяется выражением

$$\delta^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| e^{+j\omega\tau} - \left( \frac{d^n}{1 + \frac{\sum_{i=0}^N a_i e^{-j i \omega \tau}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-j k \omega \tau}}} \right)^n \right|^2 S(\omega) d\omega, \quad (14)$$

где  $S(\omega)$  — спектральная плотность прогнозируемого сигнала. Квадрат модуля подынтегрального выражения однозначно определяет ошибку прогноза синтезированного устройства в сравнении с «идеальным» экстраполятором. Для нахождения зависимости среднеквадратической ошибки прогноза исследуем квадрат модуля подынтегрального выражения, обозначив его как спектральную плотность ошибки прогноза  $S_n(\omega)$ . После несложных преобразований выражение для спектральной плотности ошибки прогноза в формуле (14) представим как

$$S_n(\omega) = \left| \frac{(1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-j k \omega \tau} + \sum_{i=0}^N a_i e^{-j i \omega \tau}) e^{+j\omega\tau} - d^n (1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-j k \omega \tau})^n}{(1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-j k \omega \tau} + \sum_{i=0}^N a_i e^{-j i \omega \tau})^n} \right|^2. \quad (15)$$

Чтобы привести выражение (15) к виду, удобному для решения, необходимо воспользоваться формулой бинома Ньютона. Дальнейшие преобразования выражения для спектральной плотности ошибки прогноза из-за их громоздкости опустим. Результаты вычислений спектральной плотности ошибки прогноза представлены в виде графиков на рисунке для случаев  $n = 4$ ,  $n = 5$ ,  $n = 6$  (16). Как видно из графиков, максимум спектральной плотности ошибки прогноза с ростом параметра  $n$  сдвигается вправо по оси частот, что позволяет обес-



печить эффективное прогнозирование сигналов со спектральной плотностью, определяемой выражением:

$$S(\omega) = \begin{cases} B, & 0 < \omega < \omega_0; \\ \frac{B}{B + (\omega - \omega_0)^n}, & \omega_0 < \omega < \omega_1, \end{cases} \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (17)$$

При этом значения среднеквадратической ошибки прогноза для сигналов со спектральной плотностью (17) и условий (16) при  $B = 1$ ,  $n = 6$ ,  $\omega_0 = 2$  определяются площадями под кривыми 1, 2, 3 соответственно. На максимум спектральной плотности и ошибки прогноза влияет параметр  $D$  выражения (8). Его значения лежат в пределах от нуля до единицы. С ростом  $D$  максимальное значение спектральной плотности ошибки прогноза уменьшается. Выбирать значения параметра необходимо с учетом характера спектральной плотности прогнозируемого сигнала, так как одновременно с уменьшением максимального значения спектральной плотности ошибки прогноза происходит увеличение его значений в области низких частот. Это можно увидеть, проанализировав значения спектральной плотности ошибки прогноза, представленные в таблице для случая  $N = M = 5$ ,  $T = 1$  с при различных значениях параметра  $D$ .

$D$	Значения спектральной плотности ошибки прогноза $S(\omega)$							
	$\omega = 0$	$\omega = 1$	$\omega = 2$	$\omega = 3$	$\omega = 4$	$\omega = 5$	$\omega = 6$	$\omega = 7$
0,1	0,00	0,10	0,04	4,71	385	6316	4555	505
0,3	0,02	0,09	0,10	4,06	356	2519	1338	183
0,5	0,03	0,29	0,21	3,46	280	927	476	89
0,6	0,04	0,36	0,29	3,20	232	563	300	69
0,7	0,05	0,44	0,38	3,01	185	346	195	58
0,8	0,06	0,53	0,48	2,91	143	216	129	50

Таким образом, предложенный метод прогнозирования непрерывного случайного сигнала с ограниченным спектром позволяет уменьшить значение среднеквадратической ошибки прогноза в результате разнесения максимумов спектральной плотности сигнала и ошибки прогноза.

**Список литературы:** 1. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965. 654 с. 2. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов. Справочник. М., 1985. 311 с. 3. Гольденберг Л. М., Поляк М. Н., Берестецкий А. А. Проектирование цифрового корректора АЧХ на основе метода наименьших квадратов // Изв. вузов МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника. 1986. Т. 29, № 1. С. 8—12.

Поступила в редколлегию 15.04.88

УДК 621.391

Ю. В. СТАСЕВ, канд. техн. наук

### СОСТАВНЫЕ ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ С МАЛЫМИ ПЕРВЫМИ ПИКАМИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИИ

При построении синхронных адресных систем связи (САСС) для кодового разделения каналов применяются ортогональные системы

сигналов [1]. Вследствие нестабильности системы синхронизации интервал слежения за сверткой сигнала приходится увеличивать, что предопределяет необходимость использования сигналов с минимальным уровнем первых боковых пиков периодических функций авто-(ПФАК) и взаимокорреляции (ПФВК). В работе [2] предложен способ получения сигналов с малым уровнем первых боковых пиков апериодической функции корреляции. Данный способ основан на поэлементном умножении ортогонального сигнала на сигнал, обладающий заданными свойствами. В результате получают сигналы с минимальным уровнем первых боковых пиков АФК. В то же время в режиме приема информации (слежения) следует учитывать ПФАК и ПФВК принимаемых сигналов. Кроме того, получение сигнала с заданными свойствами требует решения задачи перебора сигналов, что весьма затруднительно для получения сигналов с числом элементов  $L \geq 64$ .

В статье обсуждается способ построения составных сигналов с малым уровнем первых боковых пиков ПФАК, ПФВК для длительностей  $L > 64$ .

Пусть составной сигнал  $W^l$ , состоящий из  $d$  сложных элементов  $S, A, B, \dots, K$ , образован по правилу чередования [3]:

$$s_1, a_1, b_1, \dots, k_1, s_2, a_2, b_2, \dots, k_2, \dots, s_N, a_N, b_N, \dots, k_N,$$

где  $s_i, a_i, b_i, \dots, k_i$  — символы сложных элементов;  $s_i, a_i, b_i, \dots, k_i \in \{1, -1\}$ ;  $i = 1, N$ ;  $N$  — число символов в сложном элементе. Тогда значения реализации ПФАК  $R^{ll}(j)$   $l$ -го составного сигнала в зависимости от сдвига  $j$  можно вычислить с использованием системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} R^{ll}(0) = s_1s_1 + a_1a_1 + b_1b_1 + \dots + k_1k_1 + s_2s_2 + a_2a_2 + b_2b_2 + \dots + \\ + k_2k_2 + \dots + s_Ns_N + a_Na_N + b_Nb_N + \dots + k_Nk_N; \\ R^{ll}(1) = s_1a_1 + a_1b_1 + \dots + k_1s_2 + s_2a_2 + a_2b_2 + \dots + k_2s_3 + \\ + s_Na_N + a_Nb_N + \dots + k_Ns_1; \\ R^{ll}(j) = \left\{ \begin{array}{l} s_1s_r + a_1a_r + b_1b_r + \dots + k_1k_r + s_2s_{r+1} + a_2a_{r+1} + \dots + \\ + s_Ns_{r-1} + a_Na_{r-1} + \dots + k_Nk_{r-1}, \text{ если } j/d - \text{ целое; } r = \frac{j}{d}; \\ s_1a_r + a_1b_r + \dots + k_1s_{r+1} + \dots + s_Na_{r-1} + a_Nb_{r-1} + \dots + \\ + k_Ns_r, \text{ если } (j-1)/d - \text{ целое, } r = (j-1)/d; \\ s_1b_r + \dots + k_1a_{r+1} + s_2b_{r+1} + \dots + k_2a_{r+2} + \dots + \\ + s_Nb_{r-1} + \dots + k_Na_r, \text{ если } (j-2)/d - \text{ целое; } r = (j-2)/d; \\ \dots \\ s_1k_r + a_1s_{r+1} + b_1a_{r+1} + \dots + s_Nk_{r-1} + a_Ns_r + b_Na_r, \text{ если } \\ (j+1)/d - \text{ целое; } r = [(j+1)/d] - 1; \end{array} \right. \\ R^{ll}(l-2) = s_1(k-1)_{N-1} + a_1k_N + \dots + k_Ns_1; \\ R^{ll}(L-1) = s_1k_N + a_1s_1 + b_1a_1 + \dots + k_N(k-1)_1. \end{array} \right.$$

Запишем систему уравнений, описывающую ПФВК составных сигналов,

$$\begin{cases}
 R^{ln}(0) = s_1^l c_1^n + a_1^l m_1^n + b_1^l f_1^n + \dots + k_1^l p_1^n + s_2^l c_2^n + a_2^l m_2^n + \dots + s_N^l \times \\
 \times c_N^n + a_N^l m_N^n + b_N^l f_N^n + \dots + k_N^l p_N^n; \\
 R^{ln}(1) = s_1^l m_1^n + a_1^l f_1^n + \dots + s_N^l m_N^n + a_N^l f_N^n + \dots + k_N^l v_1^n; \\
 \dots \\
 R^{ln}(j) = \begin{cases}
 s_1^l c_r^n + a_1^l m_r^n + b_1^l f_r^n + \dots + k_1^l p_r^n + s_2^l c_{r+1}^n + \dots + s_N^l c_{r-1}^n + \\
 + \dots + k_N^l p_{r-1}^n, \text{ если } j/d - \text{целое; } r = j/d; \\
 s_1^l m_r^n + a_1^l f_r^n + \dots + k_1^l c_{r+1}^n + s_2^l m_{r+1}^n + \dots + s_N^l m_{r-1}^n + \dots + \\
 + k_N^l c_r^n, \text{ если } (j-1)/d - \text{целое; } r = (j-1)/d; \\
 \dots \\
 s_1^l p_r^n + a_1^l c_{r+1}^n + b_1^l m_{r+1}^n + \dots + s_N^l p_{r-1}^n + a_N^l c_r^n + b_N^l m_r^n, \text{ если} \\
 (j+1)/d - \text{целое; } r = [(j+1)/d] - 1; \\
 \dots
 \end{cases} \\
 R^{ln}(L-2) = s_1^l (p-1)_N^n + a_1^l p_N^n + b_1^l c_N^n + \dots; \\
 R^{ln}(L-1) = s_1^l p_N^n + a_1^l p_N^n + b_1^l m_N^n + \dots + k_N^l (p-1)_N,
 \end{cases}$$

где  $a_i, m_i, f_i, \dots, p_i$  — символы сложных элементов  $C, M, F, \dots, P$ , образующих составной сигнал  $\omega^n$ ,  $a_i, m_i, f_i, \dots, p_i \in \{1; -1\}$ .  $i = \overline{1, N}$ .

Для определения требований к корреляционным свойствам сложных элементов, образующих составные сигналы, приведем системы (1), (2) к виду

$$\begin{cases}
 R^{ll}(0) = R^{ss}(0) + R^{aa}(0) + R^{bb}(0) + \dots + R^{kk}(0); \\
 R^{ll}(1) = R^{sa}(0) + R^{ab}(0) + \dots + R^{ks}(1); \\
 \dots \\
 R^{ll}(j) = \begin{cases}
 R^{ss}(r) + R^{aa}(r) + R^{bb}(r) + \dots + R^{kk}(r), \text{ если} \\
 j/d - \text{целое; } r = j/d; \\
 R^{sa}(r) + R^{ab}(r) + \dots + R^{ks}(r+1), \text{ если } (j- \\
 -1)/d - \text{целое; } r = \frac{j-1}{d}; \\
 R^{sb}(r) + \dots + R^{ka}(r+1), \text{ если } (j-2)/d - \\
 \text{целое; } r = (j-2)/d; \\
 \dots \\
 R^{sk}(r) + R^{as}(r+1) + R^{ba}(r+1) + \dots, \text{ если} \\
 (j+1)/d - \text{целое; } \\
 r = [(j+1)/d] - 1;
 \end{cases} \\
 \dots \\
 R^{ll}(L-2) = R^{s(k-1)}(N-1) + R^{ak}(N-1) + R^{bs}(0) + \dots; \\
 R^{ll}(L-1) = R^{sk}(N-1) + R^{as}(0) + \dots;
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 R^{ln}(0) = R^{sc}(0) + R^{am}(0) + R^{bf}(0) + \dots + R^{kp}(0); \\
 R^{ln}(1) = R^{sm}(0) + R^{aj}(0) + \dots + R^{kc}(1); \\
 \dots \\
 R^{ln}(j) = \begin{cases}
 R^{sc}(r) + R^{am}(r) + \dots + R^{kp}(r), \text{ если } j/d - \text{це-} \\
 \text{лое; } r = j/d; \\
 R^{sm}(r) + R^{aj}(r) + \dots + R^{ks}(r+1), \text{ если } (j- \\
 -1)/d - \text{целое, } r = (j-1)/d; \\
 \dots \\
 R^{sp}(r) + R^{ac}(r+1) + R^{bm}(r+1), \dots, \text{ если} \\
 (j+1)/d - \text{целое;} \\
 r = [(j+1)/d] - 1;
 \end{cases} \\
 R^{ln}(L-2) = R^{s(p-1)}(N-1) + R^{ap}(N-1) + R^{bc}(0) + \dots; \\
 R^{ln}(L-1) = R^{sp}(N-1) + R^{ac}(0) + R^{bm}(0) + \dots
 \end{cases}$$

Анализ систем (3), (4) показывает, что уровни боковых пиков ПФАК и ПФВК составных сигналов зависят от значений уровней боковых пиков ПФАК и ПФВК сложных элементов, образующих составной сигнал, а уровень первых от основного выброса боковых пиков ПФАК и ПФВК составных сигналов зависит от значений ПФВК  $R(0)$ ,  $R(1)$ ,  $R(N-1)$  сложных элементов. Следовательно, для минимизации уровней первых боковых пиков ПФАК и ПФВК составных сигналов целесообразно использовать сложные элементы  $|R(0)|$ ,  $|R(1)|$ ,  $|R(N-1)|$ , ПФВК которых минимальны.

В качестве сложных элементов, как показали исследования [1], могут быть использованы производные системы сигналов, с ПФВК  $R(0) = 0$ .

Необходимо отметить, что использование в качестве сложных элементов производных систем сигналов приводит к уменьшению ансамбля ортогональных сигналов в  $Ld/N$  раз. Однако при небольших значениях  $d$ , например при  $d = 2$ , объем ансамбля сигналов в два раза больше объема, определяемого границей Чернова [1] (граница, определяющая минимальный объем сигналов с заданными корреляционными свойствами), и в четыре раза меньше объема, определяемого границей Грея — Рэнкина [4] (граница, определяющая максимальный объем сигналов с заданными корреляционными свойствами). Например, при  $d = 2$ ,  $L = 512$ ,  $N = 256$  можно построить 128 различных сигналов с минимальным уровнем первых боковых пиков.

Предложенный алгоритм построения сигналов с минимальным уровнем первых боковых пиков ПФАК и ПФВК позволяет получить большое число ансамблей сигналов за счет применения различных алгоритмов построения матриц Адамара.

Проведем оценку достигаемых значений первых пиков функций корреляции.

В табл. 1 приведены результаты расчетов значения  $R(i)$  ПФАК и ПФВК при  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ,  $N = 32, 60, 256$ . Задающими выбраны первые четыре строки матриц Адамара, производящими — сигналы

N	Номер сигнала																											
	1				2				3				4															
	сдвига																											
1	-3	-2	-1	0	1	2	3	-3	-2	-1	0	1	2	3	-3	-2	-1	0	1	2	3							
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
32	0	0	0	32	0	0	0	4	0	4	0	-4	0	-4	-8	-4	-4	0	0	4	-4	4	-4	0	0	4	4	-8
	-4	0	-4	0	4	0	4	0	0	0	32	0	0	0	-4	-4	0	0	-4	4	8	-4	4	0	0	4	4	4
	-4	4	0	0	-4	-4	8	4	-4	0	0	-4	-4	-4	4	0	4	32	4	0	4	-4	0	4	0	0	0	0
	4	4	-8	0	0	-4	4	0	4	4	0	-4	-4	8	0	0	0	0	0	0	4	0	-4	32	-4	0	4	4
60	4	-12	8	60	8	-12	4	-4	4	0	0	-12	0	-16	0	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-16	0	-12	0	0	4	-4	4	4	0	60	0	4	4	0	-8	0	0	4	0	4	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	4	4	0	4	0	4	0	0	-8	0	12	-8	4	60	4	-8	12	0	4	4	0	-4	12	-8
	0	-4	-8	0	4	-8	-4	12	-4	4	0	0	0	4	-8	12	-4	0	0	-12	4	-4	8	-20	60	-20	8	-4
64	0	0	0	64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16	0	0	0	-16	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	64	0	0	0	0	16	0	0	0	-16	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	-16	0	0	0	16	0	0	-16	0	0	0	16	0	0	0	0	64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-16	0	0	0	0	16	0	0	-16	0	0	0	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	64	0	0
256	0	0	0	256	0	0	0	24	0	0	0	0	0	-24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-24	0	0	0	0	0	24	0	0	0	256	0	0	0	-24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-24	-24	0	256	0	0	-24	0	-8	-8	-16	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	-24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-16	-8	-8	-24	0	0	256	0	0	-24

квадратичных вычетов с добавлением единицы ( $N = 32$ ), нелинейная последовательность ( $N = 64$ ) и характеристические сигналы ( $N = 60, N = 256$ ).

В табл. 2 представлены результаты расчетов ПФАК (числитель), когда составной сигнал образован из первой и второй строк матриц Адамара, умноженных на производящий сигнал, и ПФВК (знаменатель) составных сигналов, образованных из первой, второй и третьей, четвертой строк производной матрицы.

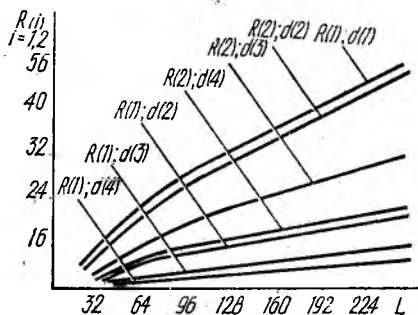
Таблица 2

Номер сдвига	$2 \times 32$	$2 \times 60$	$2 \times 64$	$2 \times 256$
-3	-4/-4	0/-4	0/16	0/0
-2	0/0	8/4	0/0	0/0
-1	-4/0	-12/0	0/0	0/0
0	64/0	120/0	128/0	512/0
1	-4/4	-12/-8	0/0	0/0
2	0/0	8/4	0/0	0/0
3	-4/0	0/0	0/0	0/0

На рисунке показаны зависимости уровня первого бокового пика  $R(1)$  ПФАК и ПФВК и уровня второго бокового пика  $R(2)$  от числа элементов в сигнале  $L$ , полученные в результате большого числа расчетов ПФАК и ПФВК производных ( $d = 1$ ) и составных систем сигналов ( $d > 1$ ).

Из анализа таблиц и рисунка видно, что максимально достигаемый уровень первых боковых пиков ПФАК и ПФВК составных систем сигналов в  $d/i$  ( $i \neq 0$ ) раз меньше, чем у систем сигналов, предложенных в работе [2]. Последнее приводит к уменьшению вероятности ошибки в СССС [1].

Таким образом, составные сигналы, построенные по правилу чередования, имеют малый уровень первых боковых пиков ПФАК и ПФВК, что позволяет использовать их в СССС, где подстройка системы синхронизации в режиме слежения осуществляется по принимаемым сигналам.



Список литературы: 1. Варакин Л. Е. Теория систем сигналов. М., 1978. 304 с. 2. Варакин Л. Е., Сидорова Т. В. Системы ортогональных ФМ сигналов с малыми первыми пиками корреляционных функций. Радиотехника. 1985. № 2. С. 45—48. 3. Варакин Л. Е. Теория сложных сигналов. М., 1970. 375 с. 4. Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн. Теория кодов, исправляющих ошибки: Пер. с англ. М., 1979. 744 с.

Поступила в редколлегию 06.01.88

Ю. И. НИКОЛАЕВ, канд. техн. наук, С. И. ПРИХОДЬКО, канд. техн. наук,  
И. В. ЧИСТЯКОВ, канд. техн. наук, А. Г. СНИСАРЕНКО

### ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕДУР СИНХРОНИЗАЦИИ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

Сверточные коды (СК) как эффективное средство улучшения характеристик систем передачи информации по радиоканалам различных типов привлекают все большее внимание разработчиков. Однако их практическое использование во многом определяется характеристиками вспомогательных устройств, в частности схемой ветвевой (фазовой) синхронизации (ФС) [1; 5].

Основные принципы построения и описания ряда конкретных устройств ФС СК приведены в работах [1—4]. Одна из наиболее помехоустойчивых среди относительно простых схем ФС — схема синхронизации по методу неединогласия, частный случай которой — устройство на базе индикатора достоверности, производящего сравнение последовательности, восстановленной на входе декодера, с декодированной последовательностью. Структурная схема такого устройства включает коммутатор, схему формирования сигналов ошибки (СФСО) и решающую схему. С ее помощью анализируется последовательность сигналов ошибки (СО), поступающих с выхода СФСО, и решается задача статистического различения гипотез в условиях шума.

В работе [4] описан алгоритм работы устройства ФС, применяющего синдромный декодер, в котором в качестве сигналов ошибки используются значения символов синдрома (синдромная СФСО).

Пусть  $G(D)$  — порождающий полином систематического сверточного кода скорости  $1/2$ ;  $I(D)$  — последовательность передаваемых информационных символов;  $T(D) = I(D) \cdot G(D)$  — проверочная последовательность. В процессе передачи по каналу связи передаваемая последовательность символов  $F(D)$  подвергается воздействию шума. На приемном конце в режиме установления ФС синдромный декодер работает на каждом такте и по одному кратно формирует синдром  $S_1(D) = G(D) * NA(D) \oplus NB(D) (1)$ , а по другому, через такт, — синдром

$$S_2(D) = G(D) * [G(D) * I(D)] \oplus I'(D) \oplus G(D) * \\ * NB(D) \oplus N'A(D), \quad (2)$$

где  $NA(D)$ ,  $NB(D)$  — шумовые последовательности, имитирующие искажения символов последовательностей  $I(D)$  и  $T(D)$ ;  $I'(D)$ ,  $N'A(D)$  — сдвинутые на один символ последовательности  $I(D)$  и  $NA(D)$ . Соотношение (1) соответствует кратно синхронной работы. В этом случае символы синдрома и, следовательно, символы соответствующей последовательности сигналов ошибки  $C_1(D) \equiv S_1(D)$  зависят только от символов шума.

При биномиальном потоке ошибок в канале связи с параметром  $P$

$$P(C_1(d) = 0) = P \left[ \sum_{i=1}^{N_G} C_{N_G}^{2i-1} p^{2i-1} (1-p)^{N_G-(2i-1)} \right] + \\ + (1-p) \left[ \sum_{i=1}^{\hat{N}'_G} C_{N_G}^{2i} p^{2i} (1-p)^{N_G-2i} \right]. \quad (3)$$

Здесь  $N_G$  — количество ненулевых коэффициентов в  $G(D)$ ,

$$\hat{N}_G = \text{entier} \frac{N_G + 1}{2}; \quad \hat{N}'_G = \text{entier} \frac{N_G}{2}.$$

Значения  $P(C_1(d) = 0)$  для систематического СК с порождающим полиномом  $G(D) = 1 + D^2 + D^6 + D^{14}$  (4) приведены в таблице.

Соотношение (2) соответствует крату несинхронной работы, и в этом случае формирования символов синдрома и, следовательно, последовательности сигналов ошибок  $C_2(D) \equiv S_2(D)$ . Кроме символов шума участвуют еще и символы передаваемой информации.

Пусть двоичные символы последовательности статистически независимы и с равной вероятностью принимают значение 0 или 1. Тогда  $P(C_2(d) = 0) = 0,5$ .

Помехоустойчивость устройства ФС для СК, допускающего пороговое декодирование, может быть улучшена, если в процессе установления синхронизации на каждом крате реализовывать процедуру дефицитного порогового декодирования и в качестве сигнала ошибки использовать значение сигнала коррекции с выхода схемы мажоритарного голосования (мажоритарная СФСО). Тогда на каждом такте работы схемы ФС формируются символы проверок, которые подаются на схему мажоритарного голосования. При использовании самоортогонального СК на вход пороговой схемы в каждом такте подается  $J$  символов синдрома. Значение символа коррекции равно 1, когда более  $J/2$  ( $J$  — четное) используемых символов синдрома равно 1. При биномиальном потоке ошибок в дискретном канале согласно [5]

$$P(C_1(d) = 0) = \sum_{i=0}^{J/2} C_J^i [1/2(1 - (1-2p)^{N_G})]^i [1 - 1/2(1 - 2p)^{N_G}]^{J-i}.$$

Значения  $P(C_1(d) = 0)$  для систематического СК с порождающим полиномом (4) приведены в таблице.

Для краты несинхронной работы при сделанных предположениях о характере  $I(D)$

$$P(C_2(d) = 0) = 0,5 + \frac{1}{2^{J+1}} \frac{J!}{(J/2)! (J/2)!}.$$

При больших  $J$   $P(C_2(d) = 0) \rightarrow 0,5$ , однако для малых  $J$  значение  $P(C_2(d) = 0)$  может существенно отличаться от 0,5 (например, если

$J = 4$ ,  $P(C_2(d) = 0) = 0,6875$ ), что важно учитывать, анализируя характеристики устройства ФС такого типа.

Сравнительный анализ характеристик рассмотренных вариантов СФСО не позволяет сделать окончательный вывод о преимуществе одного из них, так как мажоритарная СФСО обеспечивает лучшие характеристики на крате синхронной работы, а синдромная СФСО — на крате несинхронной. Поэтому необходимо провести сравнительный анализ вероятностно-временных характеристик (ВВХ) устройств ФС на базе этих СФСО.

Одна из наиболее простых решающих схем ФССК с одновременной проверкой всех возможных положений начала ЭБ и последовательным тестом реализуется с помощью набора счетчиков СО. С каждым кратом  $i$  ( $i = 1, \dots, n_0$ ) сопоставляется два счетчика  $C_{r1i}$  и  $C_{r2i}$ . Значения счетчиков изменяются следующим образом:

если

$$C_i(k) = 0, C_{r1,i}(k) = C_{r1,i}(k-1) + \gamma_1;$$

если

$$C_i(k) = 1, C_{r2,i}(k) = C_{r2,i}(k-1) + \gamma_2;$$

если

$$C_{r2,i}(k) \geq k_0, C_{r1,i}(k) = C_{r2,i}(k) = 0.$$

Синхронизация считается установленной на том шаге, где в этот момент найдется крат  $J$  такой, что

$$C_{r1,j}(k) \geq N_0 \text{ и } \max_{\substack{1 \leq i \leq n_0 \\ i \neq j}} C_{r1,i}(k) \leq N_1.$$

Здесь  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $k_0$ ,  $N_0$ ,  $N_1$  — заданные константы-параметры решающей схемы.

Для решающих схем с данным алгоритмом

$$P_{\text{пс}} = \sum_{j=N_0}^{\infty} f_{\text{пс}}(j) \left[ 1 - \sum_{l=N_0}^{j-1} P_{\text{лс}}(l) - \frac{1}{2} P_{\text{лс}}(j) \right];$$

$$f_{\text{пс}}(j) = F_{\text{пс}}(j) - F_{\text{пс}}(j-1);$$

$$F_{\text{пс}}(j) = \sum_{n=1}^{\text{entier } j/N_0} F_{\text{пс}}^{n*}(j),$$

где  $P_{\text{пс}}(j)$  — вероятность правильной синхронизации декодера СК;  $P_{\text{лс}}(j)$  — вероятность ложного фазирования декодера СК;  $F_{\text{пс}}(j)$  — распределение времени вхождения в синхронизм без учета ложного фазирования;  $P_{\text{лс}}(j)$  определяется характеристиками последовательности сигналов ошибки для краты несинхронной работы. Общее аналитическое выражение для  $P_{\text{лс}}(j)$  получить не удалось, однако его вывод для конкретных значений  $k_0$  не сложен.

**Пример.** Для синхронизации СК скорости  $R = 1/2$  используется устройство ФС со следующими значениями параметров решающей схемы:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ,

$k_0 = 1, N_1 = N_0 - 1$ . За крат синхронной работы принимается крат, в котором первым появится  $N_0$  нулевых символов подряд. Используя известное выражение из теории серий успехов [8], имеем

$$P_{лс}(j) = \frac{(\kappa - 1)(1 - P(C_2 = 0))}{(N_0 + 1 - N_0 \kappa)(1 - P(C_2 = 0))} \frac{1}{\kappa^{j+1}}; \quad (5)$$

$$\kappa = 1 - (1 - P(C_2 = 0)) P^{N_0}(C_2 = 0) +$$

$$+ (N_0 + 1)(1 - P(C_2 = 0))^2 P^{2N_0}(C_2 = 0) + \dots$$

Выражения для распределения  $F_{лс}(i)$  найти сложно даже для самого простого случая — биномиального потока ошибок ввиду коррелированности значений символов в последовательности  $G, (D)$  для крат синхронной работы.

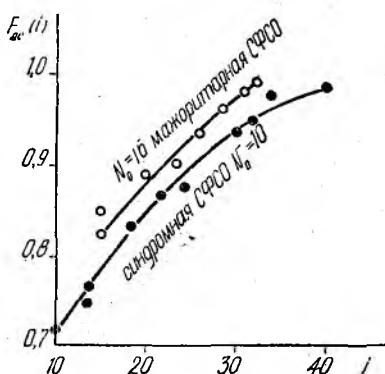
Распределения  $F_{лс}(i)$ , полученные путем имитационного моделирования работы анализируемых вариантов устройства ФС СК с порождающим полиномом (4) на ДСК при следующих значениях параметров решающей схемы:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1; N_0 = 16; N_1 = 15; \quad (6)$$

$$k_0 = 1;$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1; N_0 = 10; N_1 = 9; \quad (7)$$

$$k_0 = 1$$



приведены на рисунке.

Для сравнения эффективности вариантов устройств ФС в режиме установления синхронизации необходимо обеспечить равенство значений  $P_{лс} = 1 - P_{лс}$ . На ДСК с  $p = 10^{-2}$  УФС с синдромной СФСО при значениях параметров решающей схемы (6) обеспечивает  $P_{лс} \approx 2,4 \times 10^{-2}$ , а УФС с мажоритарной СФСО при значениях параметров решающей схемы (7) —  $P_{лс} \approx 2,6 \cdot 10^{-2}$ . Так как значения  $P_{лс}(i)$  доста-

точно малы, то  $\sum_{j=N_0}^i P_{лс}(j) \approx F_{лс}(i)$ . Как видно из рисунка, УФС с мажоритарной СФСО практически везде имеет преимущество по сравнению с УФС с синдромной СФСО. Так, на уровне квантиля 0,99 выигрыш в необходимом объеме выборки составляет почти 1,4 раза.

**Список литературы:** 1. Банкет В. Л., Ляхов А. И. Применение сверточных кодов в системах связи с фазовой манипуляцией // Зарубеж. радиоэлектроника. 1981. № 8. С. 3—23. 2. Банкет В. Л., Ляхов А. И. Техника декодирования сверточных кодов // Зарубеж. радиоэлектроника. 1983. № 2. С. 3—27. 3. Воронов Е. В. Синхронизация при сверточном кодировании // Изв. вузов. Радиотехника. 1972. Т. 15, № 4. С. 499—506. 4. А. с. 1252944 (СССР), МКИ<sup>3</sup> НОЗМ 13/12. Пороговый декодер сверточного кода / В. И. Ключко, Г. Е. Березняков, С. И. Приходько и др. // Открытия. Изобретения. 1986. № 31. С. 246. 5. Мессис Дж. Пороговое декодирование. М., 1966. 207 с.

Поступила в редколлегию 29.01.88

Для вычисления функций  $I_n(x)$  предварительно заносим «1» в  $R_0, R_4, R_7, R_8$ ; значение « $x$ » — в  $R_1$ , а величины  $m$  и  $4n^2$  — в  $R_2$  и  $R_3$  соответственно. Тогда Программа 1<sup>0</sup> расчета модифицированной функции Бесселя  $I_n(x)$   $n$ -го порядка запишется, как показано в табл. 1.

Таблица 1

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИП1	61	17	ИП5	65	34	+	10
01	$F\pi$	20	18	ПП4	64	35	П4	44
02	$\times$	12	19	$Fx^2$	22	36	ИПО	60
03	2	02	20	—	11	37	!	01
04	$\times$	12	21	ИПО	60	38	+	10
05	$FV$	21	22	$\div$	13	39	ПО	40
06	ПЗ	43	23	ИП6	66	40	ИП2	62
07	ИП1	61	24	$\times$	12	41	!	01
08	$Fe^x$	16	25	ИП7	67	42	—	11
09	ИПЗ	63	26	$\times$	12	43	П2	42
10	$\div$	13	27	$1 - 1$	0L	44	$Fx=0$	5E
11	ПЗ	43	28	П7	47	45	17	17
12	ИП1	61	29	ИП8	68	46	ИП8	68
13	8	08	30	+	10	47	ИПЗ	63
14	$\times$	12	31	П8	48	48	$\times$	12
15	$F \frac{1}{x}$	23	32	ИП4	64	49	с/п	50
16	П6	46	33	2	02			

**Инструкция.** После ввода исходных данных и занесения программы нажимаем В/о, с/п. Для контроля можно проверить, в частности, величины модифицированных функций Бесселя нулевого, первого и второго порядков при значениях аргумента  $x = 10$  и коэффициента  $m = 4$ :  $I_0(10) = 2815,7078$ ;  $I_1(10) = 2670,9698$  и  $I_2(10) = 2281,5046$  (табличные данные [4]: 2815,7; 2671,0 и 2281,5 соответственно). Полная продолжительность расчетов функций Бесселя для  $x \geq 10$  не превышает обычно 35 с.

Для вычисления функций Маркума  $Q(x, y)$  в области достаточно больших значений ее аргументов  $x$  и (или)  $y$ , т. е. при  $xy > 10$  лучше использовать следующее разложение в ряд [1]:

$$Q(x, y) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n I_n(xy). \quad (3)$$

В указанной области значений аргументов  $xy > 10$  сначала находятся величины  $I_0(xy)$  и  $I_1(xy)$  с помощью асимптотического разложения (1), а затем используется рекуррентная формула [1; 4; 5]

$$I_{n+1}(z) = \frac{2}{z} I_{n-1}(z) - I_n(z) \quad (4)$$

для определения модифицированных функций Бесселя остальных порядков, необходимых для расчетов  $Q(x, y)$  с требуемой точностью.

М. А. ИВАНОВ, канд. техн. наук, Б. И. МАКАРЕНКО, д-р техн. наук,  
И. А. ЯКОВЛЕВ, канд. физ.-мат. наук

### РАСЧЕТ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ СИСТЕМ ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ НА ПРОГРАММИРУЕМЫХ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

Дальнейшее совершенствование средств связи обуславливает актуальность проблемы повышения удельных скоростей передачи цифровой информации [1; 2] и, следовательно, увеличения кратности фазовой (ФМ), относительной (ОФМ), узкополосной частотной (ЧМ) и других полосно-эффективных методов модуляции дискретных сигналов [2; 3]. Однако разработка и внедрение высокоскоростных систем цифровой связи осложняются значительными, прежде всего вычислительными, трудностями анализа их реальной помехоустойчивости [1—3].

Цель работы — описание программ оценки помехоустойчивости наиболее распространенных на практике когерентных и оптимальных некогерентных систем цифровой передачи, эффективных в указанной области значений  $h$  и предназначенных для современных микрокалькуляторов типа БЗ-34, МК-54 и МК-56.

При использовании известных методик количественного исследования верности когерентной или некогерентной передачи дискретных сигналов методами их цифровой модуляции (Приложение 3 справочника [2]) наиболее сложен расчет модифицированных функций Бесселя  $I_n(x)$ , функции Маркума  $Q(x, y)$  и функции Никольсона  $V(x, y)$  для средних и больших значений их аргументов  $x$  и (или)  $y$ . Поэтому при  $x \geq 10$  целесообразно использовать следующее асимптотическое соотношение для определения модифицированной функции Бесселя  $I_n(x)$   $n$ -го порядка [4]:

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left\{ 1 - \frac{4n^2 - 1^2}{11 \cdot 8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8x)^2} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3! (8x)^3} + \dots + (-1)^m \times \right. \\ \left. \times \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2) \dots [4n^2 - (2m-1)^2]}{m! (8x)^m} + \dots + O(|x|^{-2m-2}) \right\}, \quad \forall h \in N_0, \quad (1)$$

где  $V$  — квантор общности;  $N_0$  — расширенное множество натуральных чисел, включающее в себя обычное множество натуральных чисел  $N$  и нуль;  $O(|x|^{-2m-2})$  — обозначение остатка, характеризующего погрешность приближения функции  $I_n(x)$  рядом (1) и не превышающего абсолютного значения  $C|x|^{-(2m+2)}$ ;  $C = \text{const}$ . Очевидно, что коэффициенты  $a_m$  формулы (1) можно вычислить последовательно с помощью рекуррентного выражения [4; 5]

$$a_m = -a_{m-1} \frac{4n^2 - (2m-1)^2}{m \cdot 8x}, \quad (2)$$

причем  $a_0 \stackrel{\circ}{=} 1$ .

С учетом соотношений (1), (2), (4), формулу (3) можно привести к виду

$$Q(x, y) \cong e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^l \left(\frac{x}{y}\right)^n \frac{e^{xy}}{\sqrt{2\pi xy}} \left\{ 1 - \frac{4n^2 - 1^2}{8xy} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8xy)^2} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3! (8xy)^3} + \dots + (-1)^m \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2) \dots [4n^2 - (2m - 1)^2]}{m! (8xy)^m} \right\}. \quad (5)$$

Здесь при вычислении  $I_0(\cdot)$   $m = 4$ , а для расчета  $I_1(\cdot)$   $m = 5$ . Для вычисления функции  $Q(x, y)$  предварительно заносим «1» в  $R_0$ ,  $R_4$ ,  $R_7$ ,  $R_8$ ; «0» — в  $R_5$ ; а значения  $xy$  — в  $R_1$ ;  $m = 4$  — в  $R_2$ ;  $\frac{x}{y}$  — в  $R_6$  и  $\left[xy - \frac{x^2}{2}\right]$  — в  $R_a$ . Кроме того, в Программе 1<sup>0</sup> для вычисления  $I_n(x)$  команду 07 заменяем на ИПа и после Программы 1<sup>0</sup> вводим Подпрограмму 2<sup>0</sup> — 1 (табл. 2).

Таблица 2

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
50	1	01	55	5	05
51	ПО	40	56	П2	42
52	П4	44	57	4	04
53	П7	47	58	П5	45
54	П8	48	59	с/п	50

Данная Подпрограмма 2<sup>0</sup> — 1 вводится для подготовки к вычислению величины  $e^{-\frac{x^2}{2}} I_1(x, y)$ . После этого нажимаются кнопки БП 17, с/п и вычисляется значение  $e^{-\frac{x^2}{2}} I_1(xy)$ . Затем в  $R_3$  вводится величина  $e^{-\frac{x^2}{2}} \left[ I_0(xy) + \frac{x}{y} I_1(xy) \right]$ , для чего записывается Подпрограмма 2<sup>0</sup> — 2 (табл. 3). Следующие значения  $e^{-\frac{x^2}{2}} I_k(xy)$  включают в себя модифицированные функции Бесселя  $I_k(\cdot)$  высших порядков  $k \geq 2$ , и поэтому вычисляются с использованием рекуррентной формулы (4) с помощью Подпрограммы 2<sup>0</sup> — 3 (табл. 4).

Таблица 3

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
60	ИП8	68	64	+	10
61	ППв	6L	65	П5	45
62	×	12	66	с/п	50
63	ИП9	69			

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
67	↑	OE	76	ИП8	68	85	ИП5	65
68	ИП1	61	77	П9	49	86	+	10
69	÷	13	78	ИПС	61	87	П5	45
70	ИП8	68	79	П8	48	88	ИПd	6Г
71	×	12	80	ИПd	6Г	89	I	01
72	ИП9	69	81	ИПв	6L	90	+	10
73	—	11	82	Fxy	24	91	Пd	4Г
74	I—I	OL	83	ИП8	68	92	ИП5	65
75	ПС	4I	84	×	12	93	с/п	50

**Инструкция.** После ввода программы вычислений и исходных данных нажимаем кнопки В/о, с/п и рассчитываем значение  $e^{-\frac{x^2}{2}} I_0(xy)$ .

Затем вводим полученное значение  $e^{-\frac{x^2}{2}} I_0(xy)$  в  $R_8$ , нажимая П8 и нажав потом с/п, подготавливаемся для вычисления величины  $e^{-\frac{x^2}{2}} \times \times I_1(xy)$ . После этого нажимаем БП 17, с/п и рассчитываем  $e^{-\frac{x^2}{2}} \times \times I_1(xy)$ . Нажимая затем ПУ, БП 17, с/п, вычисляем значение  $e^{-\frac{x^2}{2}} \times \times \left[ I_0(xy) + \frac{x}{2} I_1(xy) \right]$  и вводим его в  $R_5$ . Набрав после этого 2,

БП 66, с/п, рассчитываем величину  $e^{-\frac{x^2}{2}} \sum \left( \frac{x}{y} \right)^n I_n(x, y)$ . Следующие

приближения осуществляются таким образом: нажимают последовательно 4, БП 66, с/п, затем — 6, БП 66, с/п и т. д., увеличивая каждый раз на два число, набираемое перед БП 66, с/п. Нетрудно убедиться в том, что полное время расчета одного значения  $Q$ -функции Маркума после набора вычислительной программы составляет  $(300 + 20l)$  с, где  $l$  — количество итераций, необходимых для получения требуемого числа достоверных разрядов искомой величины. В частности, при значении произведения аргументов данной  $Q$ -функции  $xy = 10$  указанные временные затраты в три-четыре раза меньше общей длительности вычислений с помощью известной программы [2], а в случае больших значений этого произведения полная продолжительность расчетов с использованием предлагаемой программы сокращается в десятки раз — при одинаковой точности и достоверности получаемых количественных оценок.

Указанная  $Q$ -функция Маркума используется для вычисления вероятности ошибки при некогерентном приеме дискретных сигналов [1; 2]. В частности, выражение для определения вероятности ошибки  $p_2(n/k)$  при оптимальном некогерентном приеме неортогональных двоичных равномоощных сигналов в гауссовских каналах цифровой связи имеет вид

$$p_2^{(n/k)} = Q \left[ \sqrt{\frac{h^2}{2}(1-\rho^2)}, \sqrt{\frac{h^2}{2}(1+\sqrt{1-\rho^2})} \right] - \frac{1}{2} e^{-\frac{h^2}{2}} I_0 \left( \rho \frac{h^2}{2} \right), \quad (6)$$

где  $\rho$  — коэффициент неортогональности передаваемых сигналов (повышение полосной эффективности связи сопряжено с нарушением ортогональности используемых сигналов, поэтому в последнем случае имеем  $0 < \rho \leq 1$  [1]).

Программу 2<sup>0</sup> вычислений  $Q$ -функции необходимо изменить таким образом, чтобы учесть вычитаемый член  $\frac{1}{2} e^{-\frac{h^2}{2}} I_0 \left( \rho \frac{h^2}{2} \right)$ . С этой целью Подпрограмму 2<sup>0</sup> — 2 преобразуем, как указано в табл. 5.

Таблица 5

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
60	ИПУ	69	63	ИП8	68	66	+	10
61	2	02	64	ИПв	6L	67	П5	45
62	÷	13	65	x	12	68	с/п	50

При использовании Подпрограммы 2<sup>0</sup> — 3 вместо команды 2n БП 66, с/п нужно набирать 2n, БП 68, с/п. Необходимо учитывать также, что для выполнения расчетов по формуле (6) под  $xy$  следует понимать  $\rho \frac{h^2}{2}$ , т. е.  $xy \stackrel{\circ}{=} \rho \frac{h^2}{2}$ ,

$$а \quad xy - \frac{x^2}{2} = (\rho - 1) \frac{h^2}{2} \quad и \quad \frac{x}{y} \stackrel{\circ}{=} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \rho^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho}.$$

Аналогично рассчитывается [1; 3] или оценивается [2] вероятность ошибки некогерентного приема и многопозиционных (в общем случае — неортогональных) дискретных сигналов.

Для вычисления функции Никольсона [1—3]

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x \int_0^{\frac{y}{x}t} e^{-\frac{t^2+u^2}{2}} dt du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{t^2}{2}} \hat{\Phi} \left( \frac{y}{x} t \right) dt \quad (7)$$

целесообразно использовать следующее соотношение для оценки значения интеграла вероятностей:

$$\hat{\Phi}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\beta e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cong \frac{1}{2} [1 - (1 + 10^{-6}\beta(C_6 + \beta(C_5 + \beta(C_4 + \beta(C_3 + \beta(C_2 + C_1\beta))))))^{-16}], \quad (8)$$

имеющее при  $C_1=5,383$ ;  $C_2=48,891$ ;  $C_3=38,004$ ;  $C_4=3227,626$ ;  $C_5=21141,006$  и  $C_6=49867,347$  абсолютную погрешность, не превы-

шающую  $5 \cdot 10^{-7}$ . Итак, решение поставленной задачи с помощью лемного интегрирования (7). Сравнительный анализ известных методов интегрирования в настоящее время методов численного интегрирования показывает, что одним из наиболее точных является, по-видимому, метод Гаусса (погрешность  $\sigma$  интегрирования убывает пропорционально седьмой степени «длины»  $\sigma$  шага интегрирования). Несколько уступают ему по точности приблизительно эквивалентные между собой метод Чебышева и метод Боде (для них  $\sigma \sim \sigma^6$ ). Затем следует метод Симпсона ( $\sigma \sim \sigma^5$ ). Далее — метод так называемых открытых формул Гаусса ( $\sigma \sim \sigma^3$ ) и, наконец, точный метод средних прямоугольников ( $\sigma \sim \sigma^2$ ). Однако методы Гаусса, Чебышева и Боде не обладают свойством робастности, т. е. их корректное использование требует, как правило, применения достаточно сложной процедуры регуляризации [1; 4; 6], что неизбежно сопровождается заметным снижением вычислений [1; 2]. Поэтому с прикладной точки зрения эффективен точный метод Симпсона, практическое использование которого обеспечивает также и существенную экономию времени вычислений (для заданной погрешности численного интегрирования).

Чтобы обеспечить возможность использования рассматриваемых типов программируемых микрокалькуляторов при вычислении функции Никольсона методом Симпсона по формулам (7), (8), необходимо применять так называемую составную разновидность формулы Симпсона [4]:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{q-1} \int_{a+2i\sigma}^{a+2(i+1)\sigma} f(x) dx \cong \\
 &\cong \frac{\sigma}{3} \sum_{i=0}^{q-1} \{f(a+2i\sigma) + 4f[a+(2i+1)\sigma] + \\
 &\quad + f[a+2(i+1)\sigma]\},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где  $\sigma = \frac{b-a}{2q}$ .

Составленная при этом Программа 3<sup>0</sup> расчета V-функции Никольсона составным методом Симпсона приведена в табл. 6.

**Инструкция.** Предварительно заносим значения:  $a$  — в  $R_a$  (в рассматриваемом случае  $a = 0$ );  $\sigma = \frac{x}{2q}$  — в  $R_b$ ;  $2q$  — в  $R_0$ ;  $C_1$  — в  $R_6$ ;  $C_2$  — в  $R_5$ ;  $C_3$  — в  $R_4$ ;  $C_4$  — в  $R_3$ ;  $C_5$  — в  $R_2$ ;  $C_6$  — в  $R_1$ ;  $\frac{y}{x}$  — в  $R_d$ .

Затем нажимаем В/о, с/п. При этом полное время вычислений ( $35 \times 2q$ ) с. Если требуется обеспечить не менее трех верных рядов, то при  $x \sim 10$  необходимо брать  $2q = 20$  и, следовательно, продолжительность расчетов составляет около 700 с или менее 11 мин 40 с. Выигрыш в длительности расчетов по Программе 3<sup>0</sup> по сравнению с применением метода средних прямоугольников составляет для данного случая 8 мин 20 с [4]. Легко убедиться в том, что указанный выигрыш в скорости вычислений по Программе 3<sup>0</sup> по сравнению с применением метода средних прямоугольников будет быстро возрастать при

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИПа	6.	33	3	03	66	×	12
01	ПП	53	34	÷	13	67	ИПЗ	63
02	38	38	35	ИПС	6[	68	+	10
03	ИПС	6[	36	×	12	69	ИП7	67
04	+	10	37	Па	4.	70	×	12
05	Пс	4[	38	с/п	50	71	ИП2	62
06	ИПа	6.	39	$Fx^2$	22	72	+	10
07	ИПв	6L	40	2	02	73	ИП7	67
08	+	10	41	÷	13	74	×	12
09	Па	4.	42	$1 - 1$	0L	75	ИП	61
10	ПП	53	43	$F_{ox}$	16	76	+	10
11	38	38	44	П8	48	77	ИП7	67
12	4	04	45	$Fл$	20	78	×	12
13	×	12	46	2	02	79	6	06
14	ИПС	6[	47	×	12	80	$F \cdot 10^x$	15
15	+	10	48	$F\sqrt{\quad}$	21	81	÷	13
16	Пс	4[	49	$F \frac{1}{x}$	23	82	1	01
17	ИПа	6.	50	ИП8	68	83	+	10
18	ИПв	6L	51	×	12	84	$Fx^2$	22
19	+	10	52	П8	48	85	$Fx^2$	22
20	Па	4.	53	ИПd	6Г	86	$Fx^2$	22
21	ПП	53	54	ИПа	6.	87	$Fx^2$	22
22	38	38	55	×	12	88	$F \frac{1}{x}$	23
23	ИПС	6[	56	П7	47	89	1	01
24	+	10	57	ИП6	66	90	—	11
25	Пс	4[	58	×	12	91	—	0L
26	ИП9	69	59	ИП5	65	92	2	02
27	2	02	60	+	10	93	÷	13
28	—	11	61	ИП7	67	94	ИП8	68
29	П9	49	62	×	12	95	×	12
30	$Fx = 0$	5E	63	ТП4	64	96	В/о	52
31	ОО	00	64	+	10			
32	ИПв	6L	65	ИП7	67			

увеличении значений аргумента  $x$  и (или) с повышением требований к точности расчетов (требований к необходимому количеству достоверных разрядов искоемых чисел) — при относительно небольшом (лишь на 16 команд) усложнении программирования.

Функция Никольсона применяется при расчетах верности передачи многопозиционных дискретных сигналов по когерентным каналам цифровой связи [1—3]. Например, общая формула для оценки помехоустойчивости (вероятности ошибки  $p_M^{(k)}$ ) когерентного приема  $M$ -ичных ФМ-символов на фоне гауссовских шумов с равномерным спектром может быть записана следующим образом:

$$p_M^k = \frac{3}{2} - F\left(\sqrt{2h} \sin \frac{\pi}{M}\right) - \frac{1}{M} - 2V\left(\sqrt{2h} \sin \frac{\pi}{M}, \sqrt{2h} \cos \frac{\pi}{M}\right). \quad (10)$$

Для вычисления вероятности ошибки  $p_M^{(k)}$  передачи  $M$ -позиционных ФМ-сигналов по гауссовским каналам когерентной связи в соответствии с формулой (10) величина  $\frac{\sqrt{2}h \sin \frac{\pi}{M}}{2q}$  заносится в  $R_b$ , а значение  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{M}$  — в  $R_d$ . Из Программы 3<sup>0</sup> исключаем команды 92 и 93 путем последовательного нажатия кнопок БП 92, ПРГ, КНОП, КНОП, АВТ и затем В/о, с/п. После вычисления на индикаторе появляется рассчитанное значение  $2V \left( \sqrt{2}h \sin \frac{\pi}{M}, \sqrt{2}h \cos \frac{\pi}{M} \right)$ . Этот результат заносим в  $R_0$ , нажимая с данной целью По. Затем вычисляем величину  $F \left( \sqrt{2}h \sin \frac{\pi}{M} \right) + 2V \left( \sqrt{2}h \sin \frac{\pi}{M}, \sqrt{2}h \cos \frac{\pi}{M} \right)$ , для чего сначала рассчитываем значение  $\sqrt{2}h \sin \frac{\pi}{M}$ , нажав для этого ИПв, набрав 2q и набрав затем x, БП 56, с/п. При этом на экране высвечивается вычисленное значение  $F \left( \sqrt{2}h \sin \frac{\pi}{M} \right)$ . Нажимая потом ИПо, +, ↑ и набирая значение  $\left( \frac{3}{2} - \frac{1}{M} \right)$ , далее нажимаем ↔, и на индикаторе высвечивается искомая величина вероятности ошибки  $p_M^{(k)}$ .

Таким образом, предложены удобные для инженерной практики вычислительные программы достаточно точной количественной оценки помехоустойчивости высокоскоростной передачи дискретных сообщений по когерентным или некогерентным каналам цифровой связи с многопозиционными и, в общем случае, неортогональными сигналами. Приведенные программы расчета предназначены для использования в современных микроЭВМ типа БЗ-34, МК-54, МК-56 и наиболее эффективны для области средних и больших значений отношения сигнал-шум, т. е. при средних и больших значениях отношения энергии элемента дискретного информационного сигнала к спектральной плотности мощности шумов используемого канала связи.

**Список литературы:** 1. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. М., 1970. 728 с. 2. Коржик В. И., Финк Л. М., Щелкунов К. Н. Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справ./Под ред. Л. М. Финка. М., 1981. 232 с. 3. Иванов М. А., Макаренко Б. И., Яковлев И. А. Фазово-частотная модуляция дискретных сигналов // Радиотехника. 1985. № 11. С. 62—65. 4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган: Пер. с англ. М., 1979. 832 с. 5. Цветков А. Н., Епанечников В. А. Прикладные программы для микроЭВМ «Электроника БЗ-34», «Электроника МК-56», «Электроника МК-54». М., 1984. 175 с. 6. Трохименко Я. К., Любич Ф. Д. Инженерные расчеты на программируемых микрокалькуляторах. К., 1985. 328 с.

Поступила в редколлегию 10.10.86

В. Н. БЫКОВ, канд. техн. наук, А. С. ВИЛЬЧИНСКИЙ,  
В. А. КУЛАКОВ, А. С. СУЛТАНОВ, канд. техн. наук

### ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОГО МЕТОДА ПРИЕМА ШУМОВЫХ СИГНАЛОВ

Существует несколько методов формирования и приема широкополосных шумовых сигналов, описанных в работах [1—4]. Сравнительно просто практически шумовое несущее колебание можно сформировать путем ограничения по спектру случайного процесса, генерируемого источниками шума, с помощью полосового фильтра [2]. Аналитически

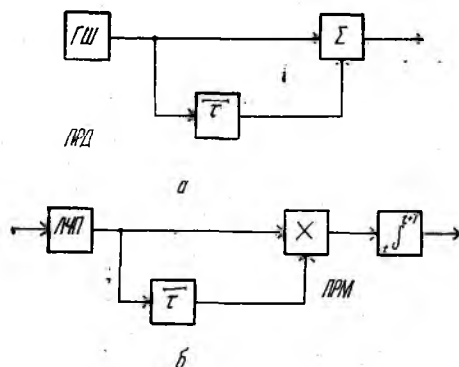


Рис. 1

ограниченный по спектру стационарный случайный процесс представим в виде гармонического колебания [3]  $u_c(t) = V(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]$  (1), где  $V(t)$ ,  $\Phi(t)$  — медленно изменяющиеся по сравнению с  $\cos \omega_0 t$  случайные амплитуда и фаза сигнала;  $\omega_0 = 2\pi f_0$  — круговая частота.

Изменение одного из параметров шумового сигнала (амплитуды или аргумента косинуса) по закону передаваемого сообщения позволяет сформировать модулированное шумовое

колебание, которое может использоваться для передачи полезной информации.

Один из основных методов приема широкополосных шумовых сигналов на фоне мощных шумовых помех — автокорреляционный прием. Наиболее изучен метод автокорреляционного приема дискретных шумовых сигналов, применяющийся для передачи сообщений по радиотелеграфу [2]. Вопрос передачи с помощью шумовых сигналов непрерывных сообщений, например, речевой информации по радиотелефонному (ТЛФ) каналу и автокорреляционного приема таких сигналов изучен недостаточно.

В этой связи целесообразно оценить помехоустойчивость автокорреляционного метода приема аналоговых шумовых сигналов.

На рис. 1 показана структурная схема радиоприемника с автокорреляционной обработкой широкополосных шумовых сигналов. Поясним принцип работы радиоприемника. Шумовой сигнал на выходе генератора шума (ГШ) — это случайный процесс (1), промодулированный по закону передаваемого сообщения. Сигнал делится по мощности пополам, затем одна составляющая сигнала задерживается в линии задержки (ЛЗ) на время  $\tau$  и обе составляющие складываются в сумматоре. При выполнении условия  $\tau > \tau_k$ , где  $\tau_k$  — интервал корреляции

шумового сигнала, на выходе передатчика (ПРД) формируется сигнал, представляющий собой сумму независимых задержанной и незадержанной шумовых компонент. В линейной части приемника (ЛЧП) сигнал передатчика суммируется с шумами приемника (ПРМ) (аддитивные помехи), кроме того, смесь сигнала и шума в ЛЧП дополнительно модулируется по амплитуде из-за флюктуаций коэффициента усиления усилительных каскадов ПРМ (мультипликативные или модулирующие помехи). Затем смесь сигнала и шума делится по мощности пополам, одна из составляющих задерживается на время  $\tau$ , аналогичное интервалу задержки ЛЗ ПРД, и обе составляющие подаются на входы перемножителя автокоррелятора. На выходе интегратора автокоррелятора в результате статистического усреднения сигнала и шума образуется среднее значение сигнала, пропорциональное его мощности, и дисперсия шума.

Вследствие отсутствия в литературе выражения для отношения сигнал-шум на выходе ПРМ радиолинии с автокорреляционной обработкой при плавно изменяющемся интервале задержки ПРД и ПРМ приведем вывод данного выражения и на его основе оценим помехоустойчивость автокорреляционного метода приема аналоговых шумовых сигналов. Для этого воспользуемся выражением для отношения сигнал-шум на выходе ПРМ [4]:

$$q_{\text{вых}} = \frac{m_{\text{сш}} - m_{\text{ш}}}{\sqrt{\langle u_{\text{сш}}^2 \rangle - \langle u_{\text{сш}} \rangle^2}} = \frac{\langle u_{\text{с}} \rangle}{\sqrt{D_{\text{сш}}}}. \quad (2)$$

Здесь  $m_{\text{ш}}$ ,  $m_{\text{сш}}$  — математическое ожидание выходного эффекта (напряжения) при отсутствии и при наличии сигнала;  $\langle u_{\text{сш}} \rangle$  — среднее значение смеси сигнала и шума на выходе ПРМ;  $\langle u_{\text{с}} \rangle$  — среднее значение сигнальной составляющей на выходе ПРМ;  $D_{\text{сш}}$  — дисперсия шумовой составляющей на выходе ПРМ.

Запишем выражения для составляющих сигнала и шума на двух входах перемножителя ПРМ (рис. 1) с учетом (1):

$$\begin{aligned} & \frac{k(\tau)}{\sqrt{2}} \{V_{\text{с}}(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] + V_{\text{с}}(t - \tau) \cos [\omega_0(t - \tau) + \\ & \quad + \Phi(t - \tau)]\} + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\text{ш}}(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]; \\ & \frac{k(\tau)}{\sqrt{2}} \{V_{\text{с}}(t - \tau) \cos [\omega_0(t - \tau) + \Phi(t - \tau)] + \\ & \quad + V_{\text{с}}(t - 2\tau) \cos [\omega_0(t - 2\tau) + \Phi(t - 2\tau)]\} + \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\text{ш}}(t - \tau) \cos [\omega_0(t - \tau) + \Phi(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициент пропорциональности  $k(\tau)$ , полученный при условии поддержания постоянного уровня мощности на выходе ПРД, имеет вид

$$k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2[1 + \rho(\tau)]}}, \quad (4)$$

где  $\rho(\tau)$  — огибающая корреляционной функции  $R(\tau)$ . Коэффициент  $1/\sqrt{2}$  характеризует деление по мощности пополам в ПРМ. Принимая

во внимание, что среднее значение произведения сигнальной и шумовой компонент в силу их независимости  $\langle V_c(t) V_{ш}(t) \rangle = 0$ , а также то, что составляющие с удвоенной частотой  $\cos 2[\omega_0 t + \Phi(t)]$  отфильтровываются в интеграторе, соотношение для  $m_{сш}$  на выходе интегратора запишем как

$$m_{сш} = \frac{k^2(\tau)}{2} \left\{ \frac{1}{2} R_c(0) + R_c(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \Phi(\tau)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} R_c(2\tau) \cos[\omega_0(2\tau) + \Phi(2\tau)] \right\} + \\ + \frac{1}{2} R_{ш}(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \Phi(\tau)]. \quad (5)$$

Второе слагаемое в (5) есть математическое ожидание шумовой компоненты  $m_{ш}$ . Окончательно выражение для сигнальной составляющей на выходе ПРМ радиолинии принимает вид

$$\langle u_o \rangle = m_{сш} - m_{ш} = \frac{k^2(\tau) \bar{P}_c G_0}{4} \{ 1 + 2\rho(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \Phi(\tau)] + \\ + \rho(2\tau) \cos[\omega_0(2\tau) + \Phi(2\tau)] \}, \quad (6)$$

где  $\bar{P}_c$  — средняя мощность сигнальной составляющей;  $G_0$  — постоянная составляющая коэффициента усиления усилительных каскадов ЛЧП.

Следует отметить, что корреляционная функция шума  $R_{ш}(\tau)$  отличается от корреляционной функции сигнала только значением средней мощности, а коэффициенты корреляции сигнала и шума одинаковы:  $\rho_c(\tau) = \rho_{ш}(\tau) = \rho(\tau)$  и могут быть выражены, например, функциями: колоколообразной (гауссоида),  $\sin x/x$ , экспоненциальной и т. д. [3]. Наиболее трудоемок вывод соотношения для первой квадратурной составляющей  $\langle u_{сш}^2 \rangle$  дисперсии шума. При его выводе необходимо выражение (3) под интегралом возвести в квадрат, а затем произвести операцию статистического усреднения. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательное выражение для дисперсии шума на выходе ПРМ:

$$D_{сш} = \bar{P}_c^2 G_0^2 \left\{ \left( \frac{\Delta F}{\Delta f_a} \right)^2 \left\{ \frac{k^4(\tau)}{2\sqrt{2}} \left[ 1 + \left( 1 - m \frac{\Delta F}{\Delta f_c} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 3\rho(m) + 2\rho(2m) + \frac{1}{2}\rho(3m) + \frac{1}{2}\rho(4m) \right] + \right. \\ \left. + \frac{k^2(\tau)}{2\sqrt{2}} (q_n + q_{ш}) \left[ 1 + \frac{3}{2}\rho(m) + \rho(2m) + \frac{1}{2}\rho(3m) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{8\sqrt{2}} (q_{ш} + q_n)^2 [1 + \rho(2m)] \right\} + \frac{1}{16} \rho(2m) [q_{ш}^2 \delta_g^2 + \\ + 2q_{ш} q_n \delta_g^2 + q_n^2 (\delta_\alpha^2 + \delta_g^2 + \delta_\alpha^2 \delta_g^2)] \}. \quad (7)$$

Здесь  $\Delta f_a$ ,  $\Delta F$  — полоса спектра несущей и информационная полоса

сигнала;  $\rho(nm) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\pi n^2 m^2}{4}\right) & \text{— колоколообразная огибающая кор-} \\ & \text{реляционной функции;} \\ \frac{\sin \pi n m}{\pi n m} & \text{— огибающая корреляционной функции} \\ & \text{типа } \sin x/x; \end{cases}$

$n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $m = 2\Delta f_c \tau = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $q_{ш}, q_{п}$  — отношение мощности шума ПРМ и внешней помехи к мощности сигнала на входе

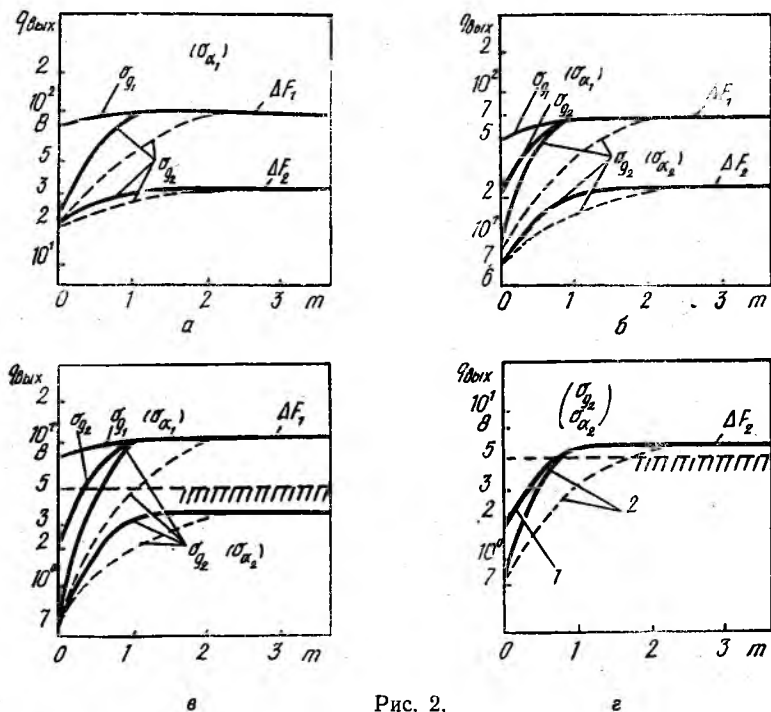


Рис. 2.

ПРМ;  $\delta_g$  — флуктуации коэффициента усиления усилительных каскадов ЛЧП;  $\delta_\alpha$  — флуктуационная составляющая внешней широкополосной шумовой помехи.

Пользуясь соотношениями (2), (6) и (7), записываем выражение для отношения сигнал-шум на выходе ПРМ для двух крайних значений параметра задержки  $m = 2\Delta f_c \tau = 0$  и  $m \geq 3$  в виде

$$q_{\text{вых}} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\Delta F}{\Delta f_c} (1 + q_{ш} + q_{п})^2 + \frac{1}{4} [q_{ш}^2 \delta_g^2 + 2q_{ш} q_{п} \delta_g^2 + q_{п}^2 (\delta_\alpha^2 + \delta_g^2 + \delta_g^2 \delta_\alpha^2)]}}; \quad (8)$$

$$q_{\text{вых}} = \frac{\sqrt{\Delta f_c / \Delta F}}{2 \sqrt{2} (1 + q_{ш} + q_{п})}.$$

Полученные зависимости  $q_{\text{вых}}$  от величины параметра задержки показаны на рис. 2. В расчетах использованы следующие значения

величин:  $\Delta F_1 = 4$  кГц,  $\Delta F_2 = 33$  кГц,  $\delta_{g_1} = 10^{-2}$ ,  $\delta_{g_2} = 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\delta_{\alpha_1} = 0$ ,  $\delta_{\alpha_2} = 0,1$ . На рис. 2 обозначено:  $q_{ш} = 1$ ,  $q_{п} = 0$  (рис. 2, а);  $q_{ш} = q_{п} = 1$  (рис. 2, б);  $q_{ш} = q_{п} = 10$  (рис. 2, в);  $1 - q_{п} = 10$ ,  $q_{ш} = 1$ ;  $2 - q_{п} = 1$ ,  $q_{ш} = 10$  (рис. 2, г). Расчеты проведены для полосы несущей  $\Delta f_0 = 1$  ГГц, которая сравнительно просто реализуется в СВЧ части радиодиапазона, например, в миллиметровом диапазоне волн. В качестве огибающей автокорреляционной функции сигнала (шума) выбраны функции типа колоколообразной и  $\sin x/x$ . Зависимости для функции типа  $\sin x/x$  обозначены сплошными кривыми, для колоколообразной функции — пунктирными.

Согласно результатам анализа выражения для отношения сигнал-шум при плавном изменении задержки  $\tau$  прием сообщений с информационной полосой  $\Delta F_1$  (1 ТЛФ канал) и требуемым качеством  $q_{\text{вых}} = 5$  [2] возможен в случае большого превышения шумов и помех над сигналом  $q_{ш} = q_{п} = 10$ ,  $\delta_g = 0,05$ ,  $\delta_{\alpha} = 0,1$ . Минимальное значение параметра задержки, когда  $q_{\text{вых}}$  достигает максимального уровня, для огибающей корреляционной функции типа  $\sin x/x$  и колоколообразной будет  $m \leq 1$  и  $m \geq 1$ . Увеличение информационной полосы до  $\Delta F_2$  (4...6 ТЛФ каналов) приводит к тому, что уровень отношения сигнал-шум для  $q_{ш} = q_{п} = 10$  уменьшается до  $q_{\text{вых}} = 1...3$ , что соответствует второму классу качества передачи речевых сообщений. При этом  $q_{\text{вых}}$  достигает своего максимального значения для двух указанных ранее функций корреляции ( $m \geq 1$  и  $m \geq 2$ ). Так как функция  $\sin x/x$  — периодическая, то в точках  $m = 1, 2, 3, \dots$ , отношение сигнал-шум соответствует своему максимуму, а в промежуточных точках отличается от максимального значения на величину от нескольких десятков процентов ( $1 \leq m \leq 2$ ) до нескольких процентов ( $2 \leq m \leq 3$ ). В случае аппроксимации  $\rho$  ( $\tau$ ) колоколообразной функцией  $q_{\text{вых}}$  достигает максимума, если  $m \geq 3$ . Однако уже при  $m = 2$  отношение сигнал-шум отличается от максимального не более, чем на 4 % для любых рассматриваемых значений  $q_{ш}$  и  $q_{п}$ . Снижение уровня шумов (помех)  $q_{ш} = 10$ ,  $q_{п} = 1$  (или  $q_{ш} = 1$ ,  $q_{п} = 10$ ) приводит к увеличению отношения сигнал-шум до значений, отвечающих первому классу качества передачи ТЛФ сообщений.

Найденное выражение для отношения сигнал-шум позволяет оценить степень влияния на качество приема сигнала автокорреляционным приемником следующих видов помех: аддитивных шумов в виде внутренних шумов ПРМ ( $q_{ш}$ ) и преднамеренных широкополосных шумовых помех ( $q_{п}$ ,  $\delta_{\alpha}$ ); мультипликативных помех в виде флуктуаций коэффициента усиления входных усилительных каскадов ПРМ ( $G_{0\alpha}$ ,  $\delta_d$ ).

Внутренние шумы ПРМ ( $q_{ш}$ ,  $\delta_g$ ) и внешние помехи ( $q_{п}$ ,  $\delta_{\alpha}$ ) в равной степени влияют на снижение отношения сигнал-шум. Когда внешние помехи модулированы дважды ( $\delta_{\alpha}$ ,  $\delta_g$ ), их воздействие на  $q_{\text{вых}}$  скачивается сильнее, что особенно заметно для малых значений параметра задержки  $m \rightarrow 0$ . Воздействие всех видов помех на качество приема сигнала существенно, если  $m < 1$  для функции корреляции типа  $\sin x/x$  и  $m < 2$  — для колоколообразной функции корреляции сигнала. В случае  $m = 2$  для рассматриваемых огибающих корреля-

ционной функции и всех значений информационной полосы сигнала внешние помехи и внутренние шумы ПРМ практически не влияют на качество принимаемого сигнала и, следовательно, увеличивать электрическую длину ЛЗ ПРД и ПРМ не целесообразно.

Таким образом, рассмотрев полученное выражение для отношения сигнал-шум на выходе автокорреляционного ПРМ при плавно изменяющейся задержке ПРД и ПРМ, можно сделать вывод, что оно позволяет анализировать влияние на качество передачи аналоговых шумовых сигналов аддитивных и мультипликативных помех, а также выбрать оптимальное значение параметра задержки  $m = 2$ , обеспечивающее требуемое качество принимаемого сигнала. Полученные количественные оценки показывают, что автокорреляционный метод приема широкополосных шумовых сигналов обладает высокой помехоустойчивостью и может использоваться для передачи ограниченных объемов информации в аналоговой форме.

**Список литературы:** 1. Харкевич А. А. Передача сигналов модулированным шумом // Электросвязь. 1957. № 11. С. 42—46. 2. Семенов А. М., Сикарев А. А. Широкополосная радиосвязь. 1970. 280 с. 3. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М., 1957. 496 с. 4. Николаев А. Г., Перцов С. В. Радиотеплолокация. М., 1964. 336 с.

Поступила в редколлегию 08.07.88

УДК 621.376

В. И. ЩЕРБАК, канд. техн. наук

### СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ, СИНТЕЗИРОВАННЫХ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Развитая в классических трудах [1—4] теория оценок позволяет без затруднений принципиального характера, для случая аппроксимации входного воздействия аддитивной смесью детерминированного сигнала и белого шума, синтезировать измерительные системы оценки векторных параметров  $\vec{\lambda}$  любой размерности  $n$ . Однако уже при  $n > 3$  разработчик измерительной аппаратуры сталкивается при анализе структуры синтезируемого измерителя с серьезными трудностями. Во-первых, до сих пор не существует меры, которая характеризовала бы уровень сложности получаемого схемного решения, во-вторых, в большинстве случаев анализ структуры измерителя невозможен без получения оптимальных алгоритмов обработки, что сопряжено с громоздкими математическими выкладками и существенно зависит от типа используемого в измерителе сигнала.

Цель работы — разработать метод, позволяющий количественно оценивать структуру синтезируемого измерителя без обращения к точным алгоритмам оптимальной оценки.

Размерность информативного вектора  $\vec{\lambda}$ , следовательно, и структурные свойства синтезируемого измерителя полностью определяются

типом информативного сигнала, выбираемым разработчиком для решения измерительной задачи. Причем во многих практических ситуациях достаточно просто составляющие информативного вектора могут быть разделены на три типа параметров: амплитудные  $\lambda_a$ , фазовые  $\lambda_\phi$  или амплитудно-фазовые  $\lambda_c$ , под которыми понимаются такие параметры, изменение которых ведет к изменению в плоскости обработки пространственного распределения амплитуды, фазы или амплитуды и фазы одновременно.

**О п р е д е л е н и е.** Под элементарным пространственным каналом (ЭПК) обработки оптимального измерителя понимается устройство, реализующее пространственную операцию вида

$$\int_L f_1(\vec{r}, \vec{\lambda}) f_2(\vec{r}, \vec{\lambda}) \cdot \dots \cdot f_k(\vec{r}, \vec{\lambda}) d\vec{r}, \quad (1)$$

где  $L$  — выбранная поверхность пространственного усреднения, а  $f_1, f_2, \dots, f_k$  — пространственные амплитудные, фазовые или амплитудно-фазовые функции.

Введение понятия ЭПК может быть оправдано по меньшей мере двумя соображениями. Во-первых, к (1) приводит задача оценки в самом простейшем случае для скалярного параметра и число ЭПК может служить мерой сложности измерительной системы. Во-вторых, построение канала пространственной обработки в виде последовательности амплитудных, фазовых и (или) амплитудно-фазовых транспарантов, являющееся наиболее простым способом реализации операций над пространственными сигналами [5], вновь приводит к (1).

Если информативный сигнал имеет вид

$$s(\vec{r}, \vec{\lambda}) = a(\vec{r}, \vec{\lambda}_a, \vec{\lambda}_c) \exp\{j\varphi(\vec{r}, \vec{\lambda}_\phi, \vec{\lambda}_c)\},$$

то для  $e$ -й составляющей отклонения  $\lambda_e$  вектора  $\vec{\lambda}$  от опорного значения  $\lambda_{0e}$  вектора  $\vec{\lambda}_0$  справедливо соотношение [6]

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_e = \frac{2}{N_0} \left\{ \sum_{i=1}^{n_a} \sigma_{ei}^2 \int_L U(\vec{r}) s'_i(\vec{r}, \vec{\lambda}_0) d\vec{r} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{n_\phi} \sigma_{em}^2 \int_L U(\vec{r}) s'_m(\vec{r}, \vec{\lambda}_0) d\vec{r} + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{n_c} \sigma_{ep}^2 \int_L U(\vec{r}) s'_p(\vec{r}, \vec{\lambda}_0) d\vec{r} \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $N_0$  — спектральная плотность шума;  $s'_i, s'_m$  и  $s'_p$  — частная производная от опорного сигнала по  $i$ -й,  $m$ -й и  $p$ -й составляющей вектора  $\vec{\lambda}_0$ ,  $i = 1, n_a$ ,  $m = 1, n_\phi$ ,  $p = 1, n_c$ ,  $U(\vec{r})$  — входное воздействие, а коэффициенты  $\sigma_{ei}^2, \sigma_{ep}^2$  и  $\sigma_{em}^2$  определяются путем обращения информа-

ционной матрицы Фишера  $A$  размерностью  $n \times n$  ( $n = n_a + n_\phi + n_c$ ) с элементами [4]

$$A_{ej} = \frac{2}{N_0} \int_L U(\vec{r}) S''_{ej}(\vec{r}, \vec{\lambda}) d\vec{r}, \quad (3)$$

$n_a$ ,  $n_\phi$  и  $n_c$  — число коррелированных составляющих вектора  $\vec{\lambda}_a$ ,  $\vec{\lambda}_\phi$  и  $\vec{\lambda}_c$  соответственно,

$$S''_{ej} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_e \partial \lambda_j} s(\vec{r}, \vec{\lambda}).$$

Согласно (2), (3) основные свойства оптимального измерителя определяются первыми и вторыми производными  $s(\vec{r}, \vec{\lambda})$ , которые имеют вид (в (4) и (5) для упрощения записи зависимость функций от  $\vec{r}$  и  $\vec{\lambda}$  не указывается, но подразумевается)

$$\begin{aligned} s'_i &= a'_i \exp\{j\varphi\}, \quad s'_m = j\psi_m a \exp\{j\varphi\}, \\ s'_p &= [a'_p + j\psi_p] \exp\{j\varphi\}; \\ s''_{iq} &= a''_{iq} \exp\{j\varphi\}, \quad s''_{im} = ja'_i \psi_m \exp\{j\varphi\}; \\ s''_{mi} &= -a\psi_m \psi_i \exp\{j\varphi\}, \quad s''_{ip} = (a'_p j\psi_p + a''_{ip}) \exp\{j\varphi\}; \\ s''_{mp} &= (ja'_p \psi_m + ja\psi_{mp} - a\psi_m \psi_p) \exp\{j\varphi\}; \\ s''_{pf} &= (a''_{pf} + ja'_p \psi_f + ja'_f \psi_p - a\psi'_{pf} - a\psi_p \psi_f) \exp\{j\varphi\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a'_p &= \frac{\partial}{\partial \lambda_p} a, \quad a''_{pf} = \frac{\partial^2 a}{\partial \lambda_p \partial \lambda_f}, \quad \psi_m = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_m}, \\ \psi'_{pm} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda_p \partial \lambda_m}, \quad q \in \overline{1, n_a}, \quad t \in \overline{1, n_\phi}, \quad f \in \overline{1, n_c}. \end{aligned}$$

На основании соотношений (1)–(5), не обращаясь к точным алгоритмам оценки проведем общий структурный анализ синтезируемого по критерию максимального правдоподобия измерителя.

**Теорема 1.** Если информативный вектор  $\vec{\lambda}$  имеет  $n_a$  амплитудных  $n_\phi$  фазовых и  $n_c$  амплитудно-фазовых коррелированных составляющих и известно некоторое значение  $\vec{\lambda}_0$ , близкое к  $\vec{\lambda}$  и попадающее в область сигнала выброса функции правдоподобия, то верхняя граница числа элементарных пространственных каналов  $N_k$ , необходимого для получения оценки одной коррелированной составляющей вектора  $\vec{\lambda}$ , определяется соотношением

$$\begin{aligned} N_k &\leq n_\phi + 1,5n_a + 4,5n_c + 0,5(n_a^2 + 25n_c^2) + \\ &\quad + n_\phi n_a + 3n_\phi n_c + 2n_a n_c. \end{aligned} \quad (6)$$

**Доказательство.** Согласно (2), (3) для получения одной составляющей вектора  $\vec{\lambda}$  необходимо сформировать  $n_n$  составляющих (число слагаемых в (2),  $n_n = n_\phi + n_a + n_c$ ) (7) и  $n_g$  составляющих для нахождения элементов матрицы  $A$ . Для определения  $n_g$  учтем, что матрица  $A$  — симметрична и, следовательно,  $n_g = 0,5(n_n + n_n^2)$  (8),

однако, согласно определению ЭПК, их число определяется не только числом составляющих  $n_a$ ,  $n_\phi$  и  $n_c$ , но и числом слагаемых в каждой составляющей, которое равно числу слагаемых в соответствующих производных (4), (5). Обозначая число каналов через  $N$ , из (7), с учетом (4) имеем  $N_n = n_\phi + n_a + 2n_c$ , (9), а из (8), зная, что для фазовых параметров  $n_\phi$  элементы матрицы  $A$  постоянны [9] и могут быть просто рассчитаны, согласно (5) и (8), получаем

$$N_g = n_\phi n_a + 3n_\phi n_c + 0,5(n_a^2 + n_a) + 2n_a n_c + 2,5(5n_c^2 + n_c). \quad (10)$$

И окончательно, суммируя (9) и (10), приходим к (6). Причем строгое равенство в (6) соответствует случаю, когда все составляющие коррелированы между собой и не равны нулю все слагаемые для производных в (4) и (5).

**Теорема 2.** При оценке коррелированных составляющих информативного вектора  $\vec{\lambda}$  пространственная структура измерителя инвариантна к размерности вектора оценки  $\vec{\Delta\lambda}$ .

**Доказательство.** Для обращения матрицы  $A$  необходимо постоянное число ЭПК  $N_g$ , определяемое соотношением (10), которое не зависит от числа оцениваемых составляющих, а зависит только от размерности вектора  $\vec{\lambda}$ . Такие же рассуждения оказываются справедливыми и для  $N_n$  (9). Последнее непосредственно следует из определения ЭПК (1) и общего алгоритма обработки (2), согласно которому функции, входящие в интегралы (2), не зависят от  $\epsilon$ -го параметра. Это значит, что изменение индекса параметра  $\epsilon$  не приводит к изменению числа ЭПК, изменяются только коэффициенты  $\sigma_\epsilon^2$ , но  $N_n$  постоянно. Поэтому увеличение числа одновременно оцениваемых составляющих вектора оценки  $\vec{\Delta\lambda}$  приводит только к различному сочетанию каналов, но их величина постоянна.

Расчет согласно (6) числа ЭПК в зависимости от  $n_a$ ,  $n_\phi$  и  $n$  приведен в табл. 1. Анализ данных таблицы показывает, что структура измерителя существенно зависит от выбираемого разработчиком информативного сигнала, в связи с чем особое внимание следует уделять типу информативного параметра, кодируемого в сигнале. Причем наиболее

Таблица 1

$n_\phi$	2	4	0	0	0	0	0	0	2	2
$n_a$	0	0	2	4	6	0	0	0	2	2
$n_c$	0	0	0	0	0	2	4	6	2	3
$n_k$	2	4	5	14	27	59	218	477	90	167

нежелательным является наличие амплитудно-фазовых составляющих  $n_0$  информативного вектора  $\vec{\lambda}_0$ , что более чем в десять раз усложняет схему измерителя в сравнении со случаем оценки только амплитудного вектора  $\vec{\lambda}_a$  и в десятки раз в сравнении с оценкой фазового вектора  $\vec{\lambda}_\phi$ .

В некоторых приложениях, например при синтезе измерителей оптического диапазона с когерентной обработкой [6], дискриминационная характеристика оптимального измерителя оказывается столь узкой, что во всем ее диапазоне коэффициенты  $\sigma_e^2$  могут считаться постоянными. В этом случае полезным оказывается следствие теоремы 1 для числа каналов  $N_k$ .

**Теорема 3.** Если существует интервал значений информативного вектора, перекрывающий дискриминационную характеристику измерителя, в пределах которого элементы матрицы ковариаций могут считаться постоянными, то число элементарных пространственных каналов оптимального измерителя определяется соотношением

$$N_k = n_\phi + n_a + 2n_0. \quad (11)$$

**Доказательство.** Постоянство коэффициентов  $\sigma_e^2$  эквивалентно исключению из пространственного блока оценки измерителя  $N_g$  ЭПК (10). В этом случае  $N_k = N_u$  и определяется (9) или (11).

Расчет числа ЭПК согласно (11) приведен в табл. 2.

Таблица 2

$n_\phi$	2	4	0	0	0	0	0	0	2	2
$n_a$	0	0	2	4	6	0	0	0	2	2
$n_0$	0	0	0	0	0	2	4	6	2	3
$n_k$	2	4	2	4	6	4	8	12	8	10

Сравнительный анализ данных табл. 1 и 2 показывает, что структура измерителя для оценки амплитудных и амплитудно-фазовых параметров оказывается приемлемой для практической реализации только в частном случае — при выполнении условия постоянства элементов матрицы ковариаций  $\sigma_e^2$ .

В заключение рассмотрим еще один частный случай теорем 1 и 2, который имеет важное самостоятельное значение и частично рассматривался в [7]. Согласно данным табл. 1 в общем случае наиболее простыми в реализации оказываются измерители, в которых информативный сигнал включает только фазовые составляющие:  $\vec{\lambda}_a = \vec{\lambda}_0 = 0$ .

**Теорема 4.** Если на каждом цикле оценки фазового векторного параметра известно некоторое значение  $(\vec{\lambda}_0)$ , достаточно близкое к истинному и попадающее в область сигнального выброса функции правдоподобия, то число элементарных каналов оптимального измерителя, необходимое для оценки информативного вектора или любой части его составляющих, равно числу ненулевых ковариаций между составляющими вектора.

**Доказательство.** Непосредственно из (6) при  $n_a = n_c = 0$  имеем  $N_k \leq n_\phi$ . При этом равенство строгое, если все составляющие информативного вектора коррелированы между собой.

Таким образом, в результате проведенного анализа сформулированы структурные теоремы и получены соотношения, позволяющие установить однозначную связь между типом информативного вектора и структурой, синтезируемой по критерию максимального правдоподобия, оптимальной измерительной системы с когерентной обработкой входного сигнала. При этом установлено: структура измерителя полностью определяется типом и размерностью информативного вектора  $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_\phi + \vec{\lambda}_a + \vec{\lambda}_c$  и не зависит от размерности вектора оценки  $\Delta\vec{\lambda}$ ; наиболее нежелательным с точки зрения практической реализации является наличие у информативного вектора амплитудно-фазовых составляющих, это более чем в десять раз усложняет схему измерителя в сравнении со случаем оценки только амплитудных параметров и в десятки раз в сравнении с оценкой фазового вектора той же размерности; приемлемую сложность при оценке амплитудных и амплитудно-фазовых параметров измерительная система имеет лишь в случае постоянства элементов матрицы ковариаций  $\sigma_e^2$ ; наиболее просто реализуются измерители в случае  $\vec{\lambda}_a = \vec{\lambda}_c = 0$ , число ЭПК оптимального измерителя равно числу коррелированных составляющих информативного вектора.

Поступила в редколлегию 01.04.88

УДК 621.391

В. А. ОМЕЛЬЧЕНКО, д-р физ.-мат. наук, А. В. ОМЕЛЬЧЕНКО,  
Я. П. ДРАГАН, д-р физ.-мат. наук, О. А. КОЛЕСНИКОВ

#### РАСПОЗНАВАНИЕ ГАУССОВСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ. СООБЩЕНИЕ 2

В статистической радиофизике типичны ситуации, когда наблюдаемые сигналы имеют неизвестные начальные фазы. При некогерентном приеме оптимальные устройства обработки строят, считая фазы случайными и применяя соответствующие усреднения по всем значениям начальных фаз. Если сигналы формируются в условиях, когда стохастические явления обладают свойствами периодичности, а наблюдения выполняются со случайными временными сдвигами, известные модели стохастических явлений неадекватны принимаемым сигналам.

В работе на основании гауссовских периодически коррелированных случайных последовательностей, периодически нестационарных в узком смысле [1; 3], строятся модели сигналов, учитывающие, в отличие от [2], оговоренную обстановку наблюдения. Рассматривается задача распознавания сигналов в условиях параметрической априорной неопределенности с учетом свойств разработанных моделей.

1. *Постановка задачи распознавания сигналов.* Пусть распознаванию подлежит  $M$  сигналов

$$\bar{X}^i(l) = \{X^i(l+s), P_i(s), s = \overline{0, N_i-1}\}, \\ l = \overline{0, n-1}; i = \overline{1, M}, \quad (1)$$

где  $X_i(l)$ ,  $l = 0, \dots, n-1, \dots$ , — периодически коррелированные случайные последовательности с периодом  $N_i \ll n$  ( $i = \overline{1, M}$ ), принадлежащие классу периодически нестационарных в узком смысле последовательностей с неизвестными корреляционными матрицами и нулевыми математическими ожиданиями. Распределение сдвига  $s$  для всех  $i = \overline{1, M}$  равновероятное:

$$P_i(s) = 1/N_i \quad (s = \overline{0, N_i-1}). \quad (2)$$

Положено, что сигналы предъявляются с вероятностями  $P_i$ , причем  $\sum_{i=1}^M P_i = 1$ , и заданы обучающие выборки  $\{X^{ir}(l), l = \overline{0, n-1}; r = \overline{1, n_i}, i = \overline{1, M}\}$ .

Необходимо построить решающее правило распознавания  $M$  сигналов, оптимальное по критерию минимума средней вероятности ошибки распознавания.

2. *Модель наблюдаемых сигналов.* Известно, что периодически нестационарные в узком смысле процессы в результате наблюдений со случайной равномерно распределенной на интервале периодичности задержкой приобретают свойства стационарных в узком смысле процессов. Поэтому для описания сигналов (1) могут быть использованы методы теории стационарных процессов.

Найдем вероятностные характеристики результата преобразования гауссовских периодически коррелированных последовательностей (ПКСП), соответствующего случайным временным сдвигам.

При фиксированном сдвиге  $s$  случайные векторы

$$\bar{X}_s^i = [X^i(s), \dots, X^i(s+l), \dots, X^i(s+n-1)]^{tr} \quad (3)$$

подчиняются гауссовскому закону распределения с плотностью вероятности

$$W(\vec{x}/s, i) = \frac{1}{V_{(2\pi)^n | K_s^i}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \vec{x}^{tr} [K_s^i]^{-1} \vec{x} \right\}, \quad (4)$$

где

$$K_s^i = M[\bar{X}_s^i \bar{X}_s^{i tr}] \quad (s = \overline{0, 1, \dots, N_i-1}; i = \overline{1, M}). \quad (5)$$

Учитывая случайный характер сдвига, запишем плотности вероятности распределения векторов

$$\vec{X} = [\bar{X}^i(0), \dots, \bar{X}^i(l), \dots, \bar{X}^i(n-1)]^T$$

в виде конечных смесей

$$W(\vec{x}/i) = \sum_{s=0}^{N_i-1} P_i(s) W(\vec{x}/s, i), \quad i = \overline{1, M}, \quad (6)$$

причем условные плотности вероятности  $W(\vec{x}/s, i)$  ( $s = \overline{0, N_i-1}$ ;  $i = \overline{1, M}$ ) определяются выражением (4). Это полигауссовская модель принимаемого сигнала. Обсудим особенности ее представления в координатной области.

Рассмотрим необходимые вероятностные характеристики конечно-го преобразования Фурье наблюдаемых последовательностей  $\bar{X}^i(l)$ ,  $l = \overline{0, n-1}$

$$\bar{Z}^i(m) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} \bar{X}^i(l) \exp\left\{-j \frac{2\pi}{n} ml\right\}, \quad m = \overline{0, n-1}. \quad (7)$$

Для этого представим преобразование (7) в векторной форме

$$\vec{Z}^i = W \vec{X}^i, \quad i = \overline{1, M}. \quad (8)$$

Здесь векторы

$$\vec{Z}^i = [\bar{Z}^i(0), \dots, \bar{Z}^i(m), \dots, \bar{Z}^i(n-1)], \quad i = \overline{1, M};$$

$$W = [w_{ml}] - \quad (9)$$

матрица дискретного преобразования Фурье размерности  $n$  с элементами

$$w_{ml} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left\{-j \frac{2\pi}{n} (m-1)(l-1)\right\}, \quad m, l = \overline{1, n}.$$

Применяя к (8) правило трансформации плотностей вероятности с учетом (4), (6), получаем закон распределения наблюдаемого сигнала в координатной области

$$W(\vec{z}/i) = \frac{1}{N_i} \sum_{s=0}^{N_i-1} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |R_s^i|}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \vec{z}^* [R_s^i]^{-1} \vec{z}\right\}, \quad i = \overline{1, M}, \quad (10)$$

в котором  $R_s^i = WK_s^i W^*$ .

Выражение (10) показывает, что в координатной области наблюдаемые сигналы также имеют полигауссовское распределение.

Найдем выражение для моментов второго и четвертого порядков координат наблюдаемых сигналов  $Z^i(m)$ ,  $m = \overline{0, n-1}$ .

Представим моменты второго порядка координат наблюдаемых сигналов в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{r}^i(m_1, m_2) &= \mathbf{M} [\bar{Z}^i(m_1) \bar{Z}^i(m_2)] = \\ &= \frac{1}{N_i} \sum_{s=0}^{N_i-1} r^i(m_1, m_2) \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{n} (m_1 - m_2) s \right\}; \\ m_1, m_2 &= \overline{0, n-1}; \quad i = \overline{1, M}, \end{aligned}$$

где  $r^i(m_1, m_2) = \mathbf{M} [Z^i(m_1) Z^{i*}(m_2)]$  — корреляция отсчетов преобразования Фурье  $i$ -й ПКСП. Учитывая, что  $r^i(m_1, m_2) \neq 0$  ( $i = \overline{1, M}$ ) только для тех  $m_1, m_2 = \overline{0, n-1}$ , которые удовлетворяют равенству [1; 2],

$$|m_1 - m_2| \approx \frac{n}{N_i} k, \quad k = 0, 1, \dots$$

имеем

$$\bar{r}^i(m_1, m_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } m_1 \neq m_2; \\ r^i(m_1, m_2), & \text{если } m_1 = m_2, \end{cases} \quad (11)$$

т. е. отсчеты преобразования Фурье наблюдаемых сигналов (1) можно считать некоррелированными. Поэтому на уровне моментов первых двух порядков вся информация о наблюдаемых сигналах заключена в диагоналях матриц  $\bar{R}^i = \mathbf{M} [\bar{Z}^i \bar{Z}^{i*}]$ ,  $i = \overline{1, M}$ .

Для моментов четвертого порядка справедливо выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{M} [|\bar{Z}^i(m_1)|^2 |\bar{Z}^i(m_2)|^2] &= r^i(m_1, m_1) r^i(m_2, m_2) + \\ &+ |r^i(m_1, m_2)|^2 + |r^i(m_1, n - m_2)|^2 \end{aligned} \quad (12)$$

при условии, что учтена гауссовость ПКСП. Выражение (12) свидетельствует о наличии статистической связи отсчетов  $\bar{Z}^i(m_1)$  и  $\bar{Z}^i(m_2)$ , удовлетворяющих условию

$$|m_1 - m_2| \approx \frac{n}{N_i} k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (13)$$

или

$$|m_1 + m_2| \approx \frac{n}{N_i} k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

так как в этом случае второе и третье слагаемые в (12) ненулевые.

Согласно (12) отсчеты периодограммы  $I^i(m_1) = |\bar{Z}^i(m_1)|^2$  и  $I^i(m_2) = |\bar{Z}^i(m_2)|^2$  ( $i = \overline{1, M}$ ) оказываются коррелированными, если аргументы  $m_1, m_2 = \overline{0, n-1}$  удовлетворяют условию (13) или (14), и некоррелированными — в противном случае. Степень корреляции отсчетов  $I^i(m)$ ,  $m = \overline{0, n-1}$  определяется степенью корреляции соответствующих отсчетов преобразования Фурье ПКСП  $Z^i(m)$ ,  $m = \overline{0, n-1}$ ;  $i = \overline{1, M}$ .

3. *Модель гауссовских стационарных сигналов.* При синтезе алгоритмов обработки сигналов общепринята математическая модель гауссовских стационарных последовательностей. Для наблюдаемых последовательностей, как отмечено в п. 2, выполняется свойство стационарности. Введем дополнительное предположение об их гауссовости и рассмотрим закон распределения наблюдаемых сигналов в координатной области.

Стационарные последовательности могут изучаться как частный случай периодических коррелированных последовательностей с периодом  $N_i = 1$ ,  $i = \overline{1, M}$ . Поэтому плотности вероятности распределения наблюдаемых сигналов в координатной области (10) примут вид

$$W(\vec{z}/i) = \frac{1}{V(2\pi)^n |R_0^i|} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \vec{z}^* [R_0^i]^{-1} \vec{z}\right\}, \quad i = \overline{1, M}, \quad (15)$$

где  $R_0^i = M[\vec{Z}_0^i \vec{Z}_0^{i*}]$  — корреляционная матрица для сдвига  $s = 0$ . Отметим, что вместо матрицы  $R_0^i$  ( $i = \overline{1, M}$ ) в (15) может использоваться любая матрица  $R_s^i$  ( $s = -\infty, \infty$ ), так как корреляционная функция стационарного процесса не зависит от сдвига  $s$ .

Для стационарных сигналов наибольшие элементы матрицы сосредоточены в окрестности диагонали  $m_1 = m_2$  [1; 2]. На этом основании примем приближение

$$W(\vec{z}/i) \approx \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod_{m=0}^{n-1} s^i(m)}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{|z(m)|^2}{s^i(m)}\right\}, \quad i = \overline{1, M}, \quad (16)$$

где  $s^i(m) = r_0^i(m, m) = M[|Z^i(m)|^2]$  — отсчет  $\psi$ -спектра  $i$ -й последовательности в базисе комплексных экспоненциальных функций [4]. Согласно результатам п. 1 для последовательностей (1) гауссовская стационарная модель (16) позволяет учесть всю информацию о сигналах (1) на уровне первых двух моментов.

4. *Алгоритмы распознавания сигналов.* Построим решающее правило распознавания сигналов (1) в координатной области. Применяя критерий минимума средней вероятности ошибки распознавания с учетом (10), имеем

$$i = \arg \max_{i = \overline{1, M}} \left[ \ln \sum_{s=0}^{N_i-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \vec{z}^* [\hat{R}_s^i]^{-1} \vec{z}\right\} + d^i \right]. \quad (17)$$

Здесь

$$d_j = \ln \frac{P_j}{\sqrt{(2\pi)^{n_j} |\hat{R}_0^j|}}; \quad (18)$$

матрицы  $\hat{R}_s^j$  ( $s = \overline{0, N_j - 1}$ ;  $j = \overline{1, M}$ ) оцениваются на этапе обучения.

Найдем решающее правило распознавания, исходя из приближенного описания сигналов (1). Для этого представим сигналы вектором размерности  $p = E(n/2)$  ( $E(x)$  — целая часть  $x$ );  $\vec{I} = [I(0), \dots, I(m), \dots, I(p-1)]^T$  (19), каждая компонента которого  $I(m) = |Z(m)|^2$  (20),  $m$ -й отсчет периодограммы, и аппроксимируем закон распределения

$\vec{I}$  многомерным логнормальным. Применяя критерий минимума средней вероятности ошибки распознавания, приходим к решающему правилу распознавания, асимптотически оптимальному для принятого описания сигналов:

$$i = \arg \min_{j = \overline{1, M}} \left\{ \sum_{v=1}^{p_j} (\ln \vec{I}_v^j - \hat{\mu}_v^j)^T \times \right. \\ \left. \times [\hat{r}_j^{j^*}]^{-1} (\ln \vec{I}_v^j - \hat{\mu}_v^j) + \hat{d}_j \right\}. \quad (21)$$

В нем векторы  $\vec{I}_v^j$  ( $v = \overline{1, p_j}$ ;  $j = \overline{1, M}$ ) формируются из отсчетов  $\vec{I}$  в соответствии с правилом

$$\vec{I}_v^j = [I(v), \dots, I(v + kL_j), \dots, I(v + (N_j - 1)L_j)]^T; \\ L_j = E(n/N_j), \quad p_j = E(p/L_j),$$

оценки  $\hat{r}_j^{j^*}$  и  $\hat{\mu}_v^j$  ( $v = \overline{1, p_j}$ ;  $j = \overline{1, M}$ ) находятся на этапе обучения

$$\hat{\mu}_v^j = \frac{1}{n_j} \sum_{r=1}^{n_j} \ln I_v^{jr}; \\ \hat{r}_j^{j^*} = \frac{1}{n_j} \sum_{r=1}^{n_j} (\ln \vec{I}_v^{jr} - \hat{\mu}_v^j) (\ln \vec{I}_v^{jr} - \hat{\mu}_v^j)^T; \\ \hat{d}_j = 2 \ln P_j - \sum_{v=1}^{p_j} |\hat{r}_j^{j^*}|.$$

Здесь введено обозначение

$$\ln \vec{I}^j = [\ln I(0), \dots, \ln I(p-1)]^T, \quad j = \overline{1, M}.$$

Использование традиционной модели гауссовских сигналов (16) позволяет записать следующее решающее правило распознавания [5]:

$$i = \arg \min_{l = \overline{1, M}} \{ \vec{I}^{lr} \hat{s}_l^T + \hat{d}_l \}, \quad (22)$$

где вектор  $\vec{T}$  определяется согласно (19), (20); отсчеты векторов  $\vec{s}^j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) находятся на этапе обучения:

$$\hat{s}^j(m) = \frac{1}{n_j} \sum_{r=1}^{n_j} |z^{jr}(m)|^2, \quad m = \overline{0, \rho-1};$$

$$\hat{d}_j = \sum_{m=0}^{n-1} \ln \hat{s}^j(m) + 2 \ln P_j.$$

В работе [5] отмечена асимптотическая оптимальность при  $n \rightarrow \infty$  решающего правила (22) для гауссовских стационарных последовательностей.

Сопоставляя решающие правила (21) и (22), видим, что оба они используют одинаковое представление сигналов вектором  $\vec{T}$ , составленным из отсчетов соответствующих периодограмм. Однако в отличие от (22) в правиле (21) учтена статистическая взаимосвязь отсчетов периодограмм. Это позволяет эффективно различать гауссовские ПКСП, имеющие близкие  $\psi$ -спектры в гармоническом базисе, и тогда, когда они наблюдаются со случайными временными сдвигами.

5. *Статистическое моделирование алгоритмов распознавания сигналов.* Покажем, что учет статистической связи коэффициентов Фурье в гармоническом базисе позволяет распознавать ПКСП, наблюдаемые со случайными временными сдвигами, и в том случае, когда они не различаются в рамках энергетической теории [4]. Для этого смоделируем гауссовские ПКСП с одинаковыми  $\psi$ -спектрами в гармоническом базисе, но различными корреляционными матрицами, и оценим методом статистического моделирования на ЭВМ средние вероятности ошибки их распознавания с использованием решающих правил (21) и (22).

Для моделирования ПКСП используем следующее их представление [2]:

$$X^i(l) = \sum_{q=1}^{p_i} \zeta_q^i(l) v_q^i(l), \quad p_i = \overline{1, \infty}, \quad (23)$$

где  $v_q^i(l)$  — периодические периода  $N_i$  последовательности;  $\{\zeta_q^i(l), q = \overline{1, p_i}\}$  — совокупность стационарных и стационарно связанных последовательностей.

При моделировании принято: количество распознаваемых сигналов  $M = 2$ ; количество компонент, используемых для генерирования ПКСП  $p_1 = p_2 = 3$ ; периоды последовательностей  $N_1 = N_2 = 16$ ; длина интервала наблюдения  $n = 1024$  отсчета. Периодические последовательности  $v_q^i(l)$  ( $i = 1, 2$ ;  $q = 1, 2, 3$ ) сформированы как отсчеты гармонического сигнала, модулированного по фазе

$$v_q^i(l) = A_q^i \cos \left\{ \lambda l + \eta_q^i \cos \left( \frac{2\pi}{N_i} l + \Phi_q^i \right) \right\}, \\ l = \overline{1, 1024}; \quad q = \overline{1, 3}; \quad i = 1, 2.$$

Здесь положено:  $\lambda = \pi/2$ ;  $h_1^1 = h_1^2 = 0$ ;  $h_2^1 = h_3^1 = h_2^2 = h_3^2 = 5$ ;  $A_1^1 = A_1^2 = 10$ ;  $A_2^1 = A_3^1 = A_2^2 = A_3^2 = 1$ . Сигналы различаются фазовыми соотношениями:  $\varphi_1^1 = \varphi_2^1 = \varphi_3^1 = 0$  для первого сигнала и  $\varphi_1^2 = \varphi_2^2 = 0$ ;  $\varphi_3^2 = \pi/2$  — для второго.

Случайные последовательности  $\zeta_q^i(l)$  ( $i = 1, 2$ ;  $q = 1, 2, 3$ ) в (23) сгенерированы как независимые авторегрессионные процессы:  $\zeta_q^i(l) = r\zeta_q^i(l-1) + n(l)$ , где  $r = 0,998$ ;  $n(l)$  — гауссовская последовательность с независимыми отсчетами. Последовательности, сформированные согласно (23), подвергались случайным сдвигам:

$$\tilde{X}^i(l) = X^i(l + s); \quad l = \overline{1, 1024}; \quad P(s) = 1/16.$$

Сформированные сигналы использованы при статистическом моделировании на ЭВМ ЕС 1050 решающих правил (21) и (22). Объем обучающей и контрольной выборки каждого сигнала задан по 100 реализаций. В результате моделирования оценены средние вероятности ошибки распознавания сигналов:  $\hat{P}_{\text{ош.ср}}^1 = 0,46$  для решающего правила (22) и  $\hat{P}_{\text{ош.ср}}^2 = 0,07$  для правила (21). Такой результат объясняется следующим: для распознавания ПКСП с одинаковыми  $\psi$ -спектрами (близкими энергетическими спектрами) решающее правило (22), учитывающее распределение энергии сигналов по гармоникам, оказывается практически непригодным; в то же время решающее правило (21), где учитываются статистические связи отсчетов периодограмм, обеспечивает достаточно высокое качество распознавания.

Таким образом, на основе развитой модели гауссовских ПКСП в равновероятным временным сдвигом построены решающие правила распознавания сигналов в базисе гармонических функций. Изложен метод учета при распознавании статистической взаимосвязи коэффициентов Фурье в гармоническом базисе.

Список литературы: 1. Драган Я. П. Структура и представления моделей стохастических сигналов. К., 1980. 384 с. 2. Омельченко В. А., Омельченко А. В., Драган Я. П., Колесников О. А. Распознавание гауссовских периодически коррелированных случайных сигналов. Сообщ. 1. // Радиотехника. 1988. Вып. 85. С. 75—79. 3. Марченко Б. Г., Щербак Л. Н. Линейные случайные процессы и их приложения. К., 1975. 143 с. 4. Омельченко В. А. Основы спектральной теории распознавания сигналов. Х., 1983. 156 с. 5. Мисюкас Р. Несколько конструктивных выражений асимптотически байесовских классификаторов в явном виде для гауссовских стационарных временных рядов // Статист. пробл. управления. 1985. Вып. 69. С. 57—62.

Поступила в редколлегию 03.02.88

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЗАИМОКОРРЕЛЯЦИОННЫХ  
СВОЙСТВ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ,  
СУЩЕСТВУЮЩИХ В ПРОСТЫХ И РАСШИРЕННЫХ ПОЛЯХ ГАЛУА  
 $GF(p)GF(p^n)$**

Среди систем оптимальных дискретных сигналов (ОДС) в теории и практике широкополосных систем связи особое место занимают ОДС в виде характеристических кодов, кодов квадратичных вычетов, Якоби, Холла, которые вследствие невозможности их генерирования посредством регистров сдвига с линейными обратными связями можно отнести к так называемым нелинейным рекуррентным последовательностям (НЛРП), существующим в полях  $GF(p)$  и  $GF(p^n)$ , где простое число  $p > 2$  [1; 2; 5]. Особенность данных НЛРП заключается в том, что в отличие от широко используемых и изученных линейных рекуррентных последовательностей (ЛРП) они существуют для намного большего числа длительностей  $L = p$ ,  $L = p - 1$ ,  $L = p^n - 1$ , имеют значительно большую мощность кодирования и обладают стойкостью к раскрытию структуры и имитации [1; 4; 5]. Это делает указанные НЛРП предпочтительными в широкополосных системах, особенно в системах специального назначения. Однако сложность их построения и невозможность формирования (генерирования) простыми методами и средствами (как это имеет место в случае ЛРП) до сих пор определяют их недостаточную изученность и ограниченное применение [1—5]. Так, в работе [1] приводятся правила построения данных НЛРП и исследуются лишь их автокорреляционные свойства для  $L = p \leq 709$  и  $L = p - 1$ ,  $p^n - 1 \leq 136$ . В то же время в теории и практике анализа и оценки помехоустойчивости, скрытности, имитостойкости широкополосных систем важное значение имеют взаимокорреляционные свойства систем ОДС [2—5]. Например, подробно исследуются взаимокорреляционные свойства ЛРП в работе [2], а в [3] — обосновываются и формируются общие правила выбора систем сигналов с учетом статистических характеристик их взаимокорреляционных свойств. Результаты же исследования и учета взаимокорреляционных свойств упомянутых НЛРП в известной литературе не приводится, хотя это и актуальная задача в теории и практике их использования.

Приведем некоторые результаты исследований в этой области, в частности, гистограммы и статистические характеристики смешанно-периодических функций взаимной корреляции (СПФВК) систем НЛРП для  $L \leq 4000$ .

*Методика проведенных исследований.* Формировалась НЛРП заданной длительности  $L = p$ ,  $L = p - 1$ ,  $L = p^n - 1$  для всевозможных простых  $p$  и  $n$  в соответствии с правилами [1], вплоть до  $L \leq 4000$ .

С использованием сформированной таким образом НЛРП посредством авто- и изоморфных преобразований разностных множеств [1], формировался кодовый словарь полного объема НЛРП определенной длительности  $L$ , вплоть до  $L \leq 4000$ .

Из полученного кодового словаря брались всевозможные сочетания двух любых НЛРП  $W_k$  и  $W_e$  и формировался кодовый массив  $W^* = \{W_k, W_e, W_e, W_k, W_k\}$ , на каждом такте циклического сдвига  $W_e$  относительно  $W^*$  подсчитывалось число  $x$  совпадений символов  $w_i \in W_e \in W^*$  и частность  $f$  каждого числа  $x$  совпадений, т. е. гистограмма числа совпадений  $f(x)$ . Аналогично все проводилось и для  $W_k$ . Затем гистограмма  $f(x)$  усреднялась по всему ансамблю кодового словаря. Формирование массива  $W^*$  позволяет моделировать всевозможные реальные ситуации взаимного расположения  $W_k$  и  $W_e$  в потоке кодовых слов и тем самым производить всестороннюю оценку воздействия такого потока  $W^*$  на согласованный дискретный фильтр (коррелятор), настроенный на прием  $W_k$  или  $W_e$ , с учетом всевозможных

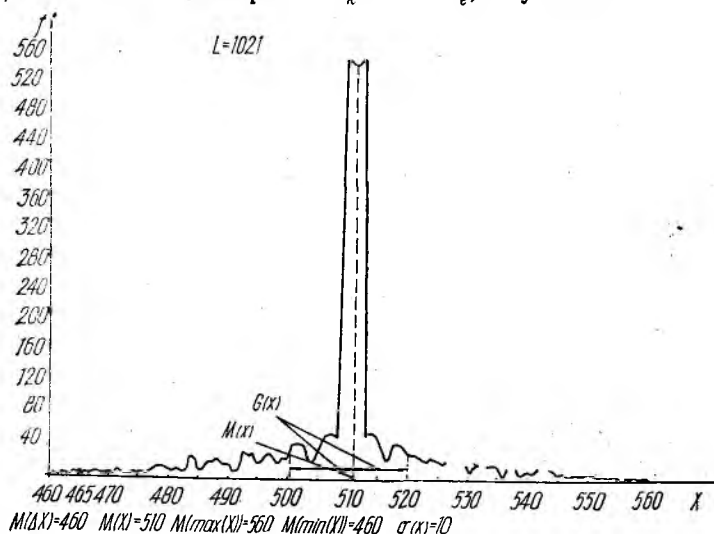


Рис. 1.

стыков  $W_k$  и  $W_e$ :  $(W_k, W_e)$ ,  $(W_e, W_e)$ ,  $(W_e, W_k)$ ,  $(W_k, W_k)$ . Тем самым анализируется СПФК как наиболее «плохая» среди всех видов ФВК (2). Было сделано предпочтение расчету числа  $x$ , а не непосредственно ФВК — разнице между числом совпадений ( $x$ ) и несовпадений ( $L - x$ ) символов при посимвольном сравнении  $W_k$  и  $W_e$  [1—5]. Это связано с тем, что гистограммы  $f(x)$  и ее характеристики непосредственно применяются в специальных системах при корреляционном распознавании цикловой частоты (синхронизации) ОДС; анализ статистики величины  $x$  позволяет определять важные дополнительные статистические оценки и характеристики, которые используются при анализе скрытности, имитостойкости широкополосных систем и дают возможность учитывать изменение взаимокорреляционных свойств от длительности ОДС; при известном  $x$  легко рассчитывать непосредственно ФВК и ее основные статистические параметры.

На рис. 1 приведены одна из полученных усредненных (по всевозможным авто- и изоморфным преобразованиям НЛРП фиксированной

длительности  $L$ ) гистограмма  $f(x)$  и статистические характеристики СПФВК для  $L = 1021$ , где  $M(x)$  и  $\sigma(x)$  — математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение числа  $x$ ;  $M(\max x)$  и  $M(\min x)$  — математические ожидания максимального и минимального значений  $x$ ;  $M(\Delta x)$  — математическое ожидание величины  $\Delta x = L - \max x$ . Обозначим значение ФВК на каждом такте  $\tau$  сравнения  $W_k$  и  $W_e$  как  $U_L(\tau)$ , тогда, следуя (5),

$$U_L(\tau) = x(\tau) - (L - x(\tau)) = 2x(\tau) - L.$$

Согласно (1)—(5) основные статистические характеристики ФВК — значения наибольших боковых выбросов  $U_{\text{б макс}}(L)$  и математическое ожидание  $M(U_e)$  (в дальнейшем параметр  $\tau$  опустим).

Введем ряд дополнительных статистических характеристик ФВК. Обозначим через  $R(L)$  относительную величину ФВК для системы НЛРП длительности  $L$ , равную

$$R(L) = \frac{x - (L - x)}{L} = \frac{U_L}{L} = \frac{2}{L}x - 1. \quad (1)$$

Под относительной величиной разброса  $x$  от среднего значения  $M(x)$  будем понимать

$$r(L) = \frac{M(\max x) - M(\min x)}{L}. \quad (2)$$

Относительной полосой зависимости  $f(x)$  на уровне 0,5 считаем

$$\psi = \frac{x_{\text{макс}}(f_{0,5}) - x_{\text{мин}}(f_{0,5})}{L}, \quad (3)$$

где  $x_{\text{макс}}(f_{0,5})$  и  $x_{\text{мин}}(f_{0,5})$  — максимальное и минимальное значения  $x$  на уровне  $f(x) = 0,5$  ( $x = M(x)$ ). Относительное отклонение между максимальными значениями ФАК и ФВК для фиксированной  $L$  будем оценивать величиной

$$K(L) = \frac{M(\Delta x)}{L}. \quad (4)$$

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение. Если  $\sigma_L(x)$  и  $\sigma(R(L))$  есть среднеквадратические значения  $x$  и  $R(L)$  соответственно, то

$$\sigma(R(L)) = \frac{2}{L} \sigma(x). \quad (5)$$

Доказательство. Исходя из (1), получаем

$$\begin{aligned} \sigma(R(L)) &= \sqrt{D(R(L))} = \sigma\left(\frac{2}{L}x - 1\right) = \\ &= \sqrt{D\left(\frac{2}{L}x - 1\right)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $D(\cdot)$  — дисперсия.

Но согласно свойствам дисперсии имеем

$$D\left(\frac{2}{L}x - 1\right) = \left(\frac{2}{L}\right)^2 D(x). \quad (7)$$

Учитывая, что  $\sigma_L(x) = \sqrt{D_L(x)}$  и подставляя (7) в (6), находим (5). Выражение (5) существенно упрощает оценку статистических характеристик ФВК, позволяя выражать  $\sigma(R(L))$  через  $\sigma_L(x)$ .

С учетом соотношений (1)–(7) анализ зависимостей  $f(x)$  и статистических характеристик СПФВК, представленных для  $L = 1021$  на рис. 1, позволил определить свойства статистических характеристик СПФВК систем НЛРП:

$$1. M(x) = L/2; \quad (8)$$

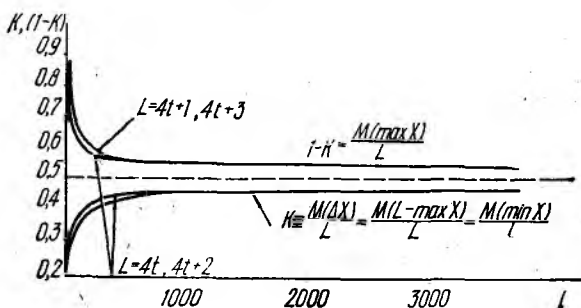


Рис. 2.

$$2. M(\Delta x) = M(\min x) = L - M(\max x); \quad (9)$$

$$3. K(L) = \frac{M(\min x)}{L}, \quad 1 - K(L) = \frac{M(\max x)}{L}, \quad (10)$$

что следует из (8), (9) с учетом (4);

$$4. M(R(L)) = M\left(\frac{2}{L}x - 1\right) = \frac{2}{L} \cdot M(x) - 1 = 0, \quad (11)$$

поскольку это вытекает из свойства 1;

$$5. r(L) = 1 - 2K(L), \quad (12)$$

что обусловлено свойством 3 и соотношением (2);

6. Относительная ширина  $\gamma$  полосы  $f(x)$  на уровне 0,5 для систем НЛРП произвольных длительностей  $L$  определяется следующим приближенным соотношением:

$$\gamma = \gamma_n = (3 - 4)/L. \quad (13)$$

С учетом зависимостей  $f(x)$  (для  $L = 1021$ , представленной на рис. 1) были построены зависимости  $K(L)$ ,  $1 - K(L)$ ,  $\sigma_L(x)$  для соответственно четных  $L = 4 \cdot t$ ,  $4 \cdot t + 2$  и нечетных  $L = 4 \cdot t + 1$ ,  $4 \cdot t + 3$ , где  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Графики данных зависимостей, вплоть до  $L \ll 4000$ , показанных на рис. 2, 3, можно использовать для оценки и расчета как основных, так и дополнительных статистических характеристик систем НЛРП.

Итак, при небольших длительностях  $L < 600-800$  статистические характеристики взаимокорреляционных свойств систем НЛРП четных длительностей ( $L = 4 \cdot t, 4 \cdot t + 2$ ) лучше, чем у систем НЛРП нечетных длительностей ( $L = 4 \cdot t + 1, 4 \cdot t + 3$ ), поскольку для последних характерны большая частота появления больших выбросов ФВК, большая равнозначность появления больших и малых выбросов ФВК, большее среднеквадратическое отклонение значений ФВК  $\sigma(R(L)), \sigma_L(x)$ , большая относительная величина  $R(L)$  разброса значений ФВК от среднего значения.

С увеличением длительности  $L$  систем НЛРП статистические характеристики взаимокорреляционных свойств систем НЛРП четных и нечетных длительностей улучшаются и сравниваются уже при  $L \approx 1000$ , а при  $L \rightarrow \infty$  асимптотически приближаются к следующим потенциально достижимым значениям:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sigma(R(L)) = \lim_{L \rightarrow \infty} 1/(2L) = 0,$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} r(L) = 0, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} K(L) = 0.5.$$

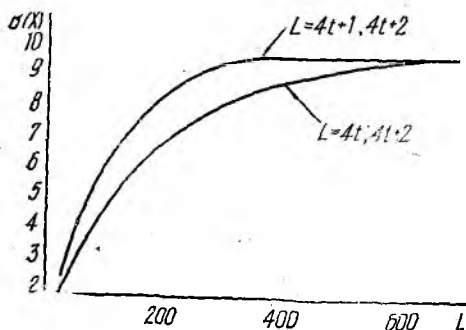


Рис. 3.

Взаимокорреляционные свойства систем НЛРП данных видов оказываются лучшими, чем для систем ЛРП, в частности,

для  $M$  — последовательностей. Действительно, если исследовать зависимости на рис. 1—3 в смысле оценки чисто ФВК, т. е.  $U_L$ , получим, что для НЛРП  $U_{б, \max}(L) = (1.5 - 3) \sqrt{L}$ , тогда как согласно данным [2] для ЛРП аналогичная величина составляет  $U_{б, \max}(L) = (2 - 6) \cdot \sqrt{L}$ . Значит, если следовать правилам выбора ОДС [2; 3], помехоустойчивость широкополосных систем будет лучше при названных НЛРП (особенно четных длительностей) в случае применения ЛРП.

Таким образом, приведенные результаты исследований взаимокорреляционных свойств систем НЛРП, существующих в простых и расширенных полях Галуа  $GF(p)$ ,  $GF(p^n)$ , представляют собой фактический материал, значительно расширяющий область изученности данных систем НЛРП и имеющий важное теоретико-практическое значение для исследователей и проектировщиков в области широкополосных систем связи.

Список литературы: 1. Свердлик М. Б. Оптимальные дискретные сигналы. М., 1975. 200 с. 2. Шумоподобные сигналы в системах передачи информации / Под ред. В. Б. Пестрякова. М., 1973. 284 с. 3. Варакин Л. Е. Теория систем сигналов. М., 1978. 304 с. 4. Варакин Л. Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. М., 1985. 384 с. 5. Диксон Р. К. Широкополосные системы / Пер. с англ.; Под ред. В. И. Журавлева. М., 1979. 304 с.

Поступила в редколлегию 22.06.88

### О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Анализ процессов, происходящих в сложных волноводных системах, связан с необходимостью решения многомерных уравнений Гельмгольца. Кроме того, в ряде случаев при распространении электромагнитных волн в волноводных трактах необходимо учитывать нелинейную возмущающую силу либо нелинейность среды [1; 2], что приводит к исследованию нелинейно возмущенной эллиптической системы дифференциальных уравнений, главные части которых — операторы Лапласа:

$$\Delta u_i(x) + b_i(x) u_i(x) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x) u_i(x) u_j(x),$$

$$i = \overline{1, N}, \quad x \in R^n. \quad (1)$$

В статье на основе принципа сжатых отображений устанавливается существование и единственность решения задачи Дирихле для системы (1), которое находится методом последовательных приближений.

В связи с этим рассмотрим следующую краевую задачу: найти решение  $u(x) = \{u_1(x), \dots, u_N(x)\}$  системы (1) в ограниченной области  $gn$ -мерного евклидова пространства с границей  $\Gamma$ , которое на границе удовлетворяет условию

$$u_i(x)|_{\Gamma} = \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Как известно [3], если функция  $G(x, y)$  является функцией Грина оператора Лапласа, то решение задачи (1), (2) можно представить в виде

$$u_i(x) = \int_g G(x, y) \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij}(y) u_i(y) u_j(y) - b_i(y) u_i(y) \right] dy +$$

$$+ \omega_i(x), \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

где функции  $\omega_i(x)$  — гармонические в  $g$  и принимающие на  $\Gamma$  заданные непрерывные краевые значения:

$$\omega_i(x)|_{\Gamma} = \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Пусть

$$B = \max_{x \in g} |\omega_i(x)|, \quad i = \overline{1, N}; \quad K = \max_{x \in g} \int_g G(x, y) dy;$$

$$\max_{x \in g} \sum_{j=1}^N |a_{ij}(x)| \leq 1; \quad a = \max_{x \in g} |b_i(x)|, \quad i = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Определение. Назовем классом  $\mathcal{W}$  множество непрерывных вектор-функций  $u(x) = \{u_1(x), \dots, u_N(x)\}$ , для которых

$$|u_i(x)| \leq \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K}, \quad i = \overline{1, N} \quad M = 1 - Ka$$

$$\text{и } 0 < M^2 - 4BK < 1. \quad (6)$$

Теорема. Пусть выполнены условия (5). Тогда в классе  $\mathcal{W}$  существует единое решение задачи (1), (2), которое находится методом последовательных приближений.

Доказательство. Обозначим

$$|Au_i(x)| = \int_g G(x, y) \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij}(y) u_i(y) u_j(y) - b_i(y) u_i(y) \right] dy + \omega_i(x), \quad i = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Покажем, что оператор  $A$  отображает класс  $\mathcal{W}$  в себя. В самом деле, пусть  $u(x) \in \mathcal{W}$ . Из (3) получаем

$$|Au_i(x)| \leq \int_g G(x, y) \left[ \sum_{j=1}^N |a_{ij}(y)| |u_i(y)| |u_j(y)| + |b_i(y)| |u_i(y)| \right] dy + |\omega_i(x)|, \quad i = \overline{1, N}.$$

$$|Au_i(x)| \leq \left( \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K} \right)^2 \int_g G(x, y) \max_y \sum_{j=1}^N |a_{ij}(y)| dy +$$

$$+ \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K} \int_g G(x, y) \max_y |b_i(y)| dy + B =$$

$$= \left( \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K} \right)^2 \max_y \sum_{j=1}^N |a_{ij}(y)| \int_g G(x, y) dy + \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K} \times$$

$$\times \max_y |b_i(y)| \int_g G(x, y) dy + B \leq \left( \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K} \right)^2 K +$$

$$+ \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K} Ka + B = \frac{(M - \sqrt{M^2 - 4BK})^2}{4K} +$$

$$+ \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2} a + B = \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K} (M + Ka) =$$

$$= \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K},$$

Таким образом,

$$|Au_i(x)| \leq \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Следовательно,  $Au(x) \in \mathcal{W}$ .

Введем метрику в классе  $\mathcal{W}$ :

$$\rho(u, v) = \sum_{i=1}^N \max_x |u_i(x) - v_i(x)|.$$

Тогда  $W$  становится полным метрическим пространством и остается показать, что при выполнении условия (5) оператор  $A$ , действующий в классе  $W$ , — оператор сжатия. В самом деле, возьмем

$$\begin{aligned}
 \rho(Au, Av) &= \sum_{i=1}^N \max_x \left| \int_g G(x, y) \left\{ \sum_{j=1}^N a_{ij}(y) [u_i(y) u_j(y) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - v_i(y) v_j(y)] - b_i(y) [u_i(y) - v_i(y)] \right\} dy \right| \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \max_x \int_g G(x, y) \left\{ \sum_{j=1}^N |a_{ij}(y)| |u_i(y) u_j(y) - v_i(y) v_j(y)| + \right. \\
 &\quad \left. + |b_i(y)| |u_i(y) - v_i(y)| \right\} dy \leq \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \max_x \int_g G(x, y) \left\{ \sum_{j=1}^N |a_{ij}(y)| [|u_i(y)| |u_j(y) - v_j(y)| + \right. \\
 &\quad \left. + |v_j(y)| |u_i(y) - v_i(y)|] + |b_i(y)| |u_i(y) - v_i(y)| \right\} dy \leq \\
 &\leq \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K} \max_x \int_g G(x, y) \sum_i \sum_j |a_{ij}(y)| |u_j(y) - v_j(y)| + \\
 &+ \sum_i \sum_j |a_{ij}(y)| |u_i(y) - v_i(y)| \Big\} dy + \max_x \int_g G(x, y) |b_i(y)| |u_i(y) - \\
 &- v_i(y)| dy \leq \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{K} \max_x \int_g G(x, y) \sum_i \sum_j |a_{ij}(y)| |u_i(y) - \\
 &- v_i(y)| dy + Ka \max_x |u_i(x) - v_i(x)| \leq (M - \sqrt{M^2 - 4BK}) \times \\
 &\times \sum_i \max_x |u_i(x) - v_i(x)| + Ka \sum_i \max_x |u_i(x) - v_i(x)| = \\
 &= (M - \sqrt{M^2 - 4BK} + Ka) \sum_i \max_x |u_i(x) - v_i(x)| = \\
 &= (1 - \sqrt{M^2 - 4BK}) \sum_i \max_x |u_i(x) - v_i(x)| = \alpha \rho(u, v), \quad \alpha < 1,
 \end{aligned}$$

т. е. оператор  $A$  — оператор сжатия в классе  $W$ . Таким образом, согласно принципу сжатых отображений [5] существует единственная неподвижная точка  $u(x)$  оператора  $A$ , т. е. система интегральных уравнений (3) имеет единственное решение. В силу полной эквивалентности системы (3) с краевой задачей (1), (2) теорема доказана. Решение задачи (1), (2) может быть найдено методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned}
 u_{ik}(x) &= \int_g G(x, y) \left[ \sum_{j=1}^N a_{ij}(y) u_{i(k-1)}(y) u_{j(k-1)}(y) - b_i(y) u_{i(k-1)}(y) \right] dy + \\
 &+ \omega_i(x), \quad u_{i0}(x) = \omega_i(x), \quad i = \overline{1, N}.
 \end{aligned}$$

Легко показать, что

$$|u_{ik}(x)| \leq \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K};$$

$$\max_x |u_{ik}(x) - u_{i(k-1)}(x)| \leq (1 - \sqrt{M^2 - 4BK}) \max_x \times$$

$$\times |u_{i(k-1)}(x) - u_{i(k-2)}(x)|$$

для любого  $k = 1, 2, \dots$ . Отсюда следует равномерная сходимость последовательности функций  $u_k(x)$  к функции  $u(x)$ , которая и является искомым решением системы (3), а следовательно, и задачи (1), (2).

Список литературы: 1. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. М., 1973. 608 с. 2. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М., 1965. 702 с. 3. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976. 392 с. 4. Похожаев С. И. О задаче Дирихле для уравнения  $\Delta u = u^2$  // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 4. С. 769—772. 5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., 1965. 520 с.

Поступила в редколлегию 09.03.88

УДК 621.372

В. А. ПИСЬМЕНЕЦКИЙ, канд. техн. наук

### АНАЛИЗ СТРУКТУР ФУРЬЕ-ПРОЦЕССОРОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ ОТСЧЕТОВ

В последнее время в отечественной и зарубежной литературе для анализа дисперсионных Фурье-процессоров часто используются операции умножения и свертки. Преобразование сигналов с помощью указанных операций достаточно компактно и качественно наглядно можно проанализировать при дискретной форме их представления на основе теоремы отсчетов. Такой подход дает возможность сравнить основные параметры Фурье-процессоров разных типов. Рассмотрим входной узкополосный сигнал вида

$$f(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] \text{ при } t \in [0, T_a] \quad (1)$$

и  $\Delta f \ll f_0$  ( $\Delta f$  — полоса частот входного сигнала). Как известно, при этих ограничениях  $f(t) = A(t) \exp j[\omega_0 t + \varphi(t)]$  можно представить «длинными» выборками

$$f(t) = \sum_n \bar{A}(nT) \text{rect} \frac{t-nT}{T} \exp j[\omega_0(t-nT)], \quad (2)$$

где

$$\text{rect } x = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\bar{A}(nT) = A(nT) \exp j\varphi(nT).$$

Проанализируем сущность операции умножения. Согласно [1] она сводится к введению в исследуемый сигнал ЛЧМ заполнения. По-

видимому, более удачным названием этой операции следует считать ЛЧМ-преобразование (ЛЧМП).

Для анализа ЛЧМП-операции введем символ  $\wedge\{f(t)\}$  и вспомогательный ЛЧМ-сигнал:

$$f_1(t) = \exp j\left(\omega_k t + \gamma \frac{t^2}{2}\right) = \exp j[\omega_k + \omega(t)]t, \quad (3)$$

где

$$\omega(t) = \gamma \frac{t}{2}; \quad \gamma = \frac{\Delta F}{Tn}.$$

Заменим  $f_1(t)$  суммой «длинных» выборок, для каждой из которых частота заполнения постоянна и равна

$$\omega_k + \gamma(n-1)\frac{T}{2};$$

$$f_1(t) = \sum_n \text{rect} \frac{t-nT}{T} \exp j\left[\omega_k + \gamma(n-1)\frac{T}{2}\right](t-nT).$$

Перемножим соответствующие выборки  $f(t)$  и  $f_1(t)$ ; т. е. выполним ЛЧМП-операцию:

$$\wedge\{f(t)\} = f(t) f_1(t) = \sum_n \bar{A}(nT) \text{rect} \frac{t-nT}{T} \times$$

$$\times \exp j\left[\omega_{ok} + \gamma \frac{n-1}{2}\right](t-nT).$$

Здесь

$$\omega_{ok} = \omega_o + \omega_k.$$

Обозначим

$$\omega_n = \omega_{ok} + \gamma \frac{n-1}{2}.$$

Тогда

$$\wedge\{f(t)\} = \sum_n \bar{A}(nT) \text{rect} \frac{t-nT}{T} \exp j \omega_n (t-nT). \quad (5)$$

Как следует из соотношения (5), ЛЧМ-преобразование приводит к различной частотной «окраске» каждой выборки. Действительно, после преобразования Фурье  $\wedge\{f(t)\}$  получим

$$F\{\wedge\{f(t)\}\} = T \sum_n A(nT) \exp[-j\omega(n-1)T] \sin c \frac{\omega - \omega_n}{2} T \exp \times$$

$$\times \left[-j \frac{\omega T}{2}\right] = T \sum_n \bar{A}(nT) \sin c \frac{\omega - \omega_n}{2} T \exp j \left[-\frac{\omega T}{2} - \omega(n-1)T\right].$$

Таким образом, приходим к выводу, что ЛЧМП-операция обеспечивает перенос выборок с оси времени на ось частот. Далее проанализируем операцию свертки [1; 2], под которой понимается пропускание

исходного сигнала через частотно-зависимую (дисперсионную) линию задержки с параметрами

$$k(\omega) = \sum_n \exp(-j\omega\tau_n) \operatorname{rect} \frac{\omega - (n-1)\Delta\omega_1}{\Delta\omega_1} \tau_n = \tau_0 \pm \frac{\Delta T}{\Delta\omega} (n-1)\Delta\omega_1,$$

представленными с помощью «длинных» частотных выборок. Такое упрощение соответствует реальным структурам дисперсионных линий задержки (ДЛЗ) на основе дискретных встречно-штыревых преобразователей (ВШП).

Обозначим

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1} = m; \quad \frac{\Delta T}{\Delta\omega} = \beta; \quad \frac{\Delta T}{m} = \Delta\tau.$$

Тогда

$$\tau_n = \tau_0 \pm \beta(n-1)\Delta\omega_1.$$

Представляется более удачным эту операцию называть линейно-частотной задержкой (ЛЧЗ) и ввести символ  $\tau_\omega\{f(t)\}$ .

Рассмотрим ЛЧЗ-операцию (операцию  $\tau_\omega$ ) без и с предварительным ЛЧМ-преобразованием.

В первом случае исходный сигнал (1) можно представить частотными выборками длительностью  $\Delta\omega_1 = \frac{2\pi}{T_0}$ , тогда

$$F\{f(t)\} = \sum_n \bar{S}(\omega_n) \operatorname{rect} \frac{\omega - (n-1)\Delta\omega_1}{\Delta\omega_1}. \quad (6)$$

После прохождения через ДЛЗ каждая выборка будет задержана в соответствии с частотой заполнения на величину  $\tau_n$  и спектр сигнала примет вид

$$F_1\{f(t)\} = \sum_n \bar{S}(\omega_n) \exp(-j\omega\tau_n) \operatorname{rect} \frac{\omega - (n-1)\Delta\omega_1}{\Delta\omega_1}.$$

Запишем отклик на выходе линии с помощью операции обратного преобразования Фурье

$$F'\{F_1\{f(t)\}\} = \sum_n \bar{S}(\omega_n) 2\Delta f_1 \sin c \frac{\Delta\omega_1}{2} t_1 \cos \omega_n t_1,$$

где  $\Delta f_1 = \frac{\Delta\omega_1}{2\pi}$ ;  $\omega_n = (n-1)\Delta\omega_1 + \frac{\Delta\omega_1}{2} = \Delta\omega_1 \left(n - \frac{1}{2}\right)$ .

Для совмещения по частоте всех составляющих  $F'\{F_1\{f(t)\}\}$  выполним ЛЧМП-операцию, используя вспомогательный сигнал  $f_b(t) = \sum \cos \omega - nt_1$ , где  $\omega_n = m\Delta\omega_1 - (n-1)\Delta\omega_1$ , а  $m$ —целое число, превышающее, максимальное значение  $n$ . В результате огибающая  $s(\omega)$  будет представлена теоремой отсчетов

$$\wedge \{F'\{E_1\{f(t)\}\}\} = \sum_n \bar{S}(\omega_n) 2\Delta f_1 \sin c \frac{\Delta\omega_1 t_1}{2} \cos \left(m + \frac{1}{2}\right) \Delta\omega_1 t_1. \quad (7)$$

Так как  $\tau_n = \tau_0 \pm \Delta\tau (n - 1)$ , для неискаженного воспроизведения огибающей  $S(\omega)$  должно соблюдаться условие ортогональности  $\frac{2\pi}{\Delta\omega_1} = \Delta\tau = T_c$ .

Определим взаимосвязь между параметрами сигнала и ДЛЗ  $m = \Delta T / \Delta\tau = \Delta T / T_c$ ,  $\Delta T = mT_c$  и количество частотных выборок  $m$  с помощью равенства

$$\Delta T \Delta\omega = m \Delta\omega_1 m \Delta\tau = 2\pi m^2, \quad m = \sqrt{\Delta T \Delta f}.$$

Длительность отклика  $S(\omega)$  составит  $T_{\text{откл}} = m \Delta\tau = m T_c$ . Из полученных соотношений можно сделать вывод, что для неискаженного воспроизведения спектра необходимо иметь достаточное количество выборок  $m$  или длительность анализируемого сигнала в  $m$  раз меньше перепада задержки ДЛЗ. При этом длительность отклика  $T_{\text{откл}}$  увеличивается в  $m$  раз по сравнению с длительностью входного сигнала  $T_c$ .

Исследуем далее ЛЧЗ-операцию с предварительным ЛЧМ-преобразованием. После введения ЛЧМ-заполнения

$$f_2(t) = \sum_n \bar{A}(nT) \text{rect} \frac{t - nT}{T} \exp j \omega_n (t - nT).$$

Будем полагать, что спектр каждого слагаемого не превышает  $\Delta\omega_1$  АЧХ ДЛЗ и после прохождения через линию вносится запаздывание

$$\tau_n = \tau_0 \pm \beta (n - 1) \Delta\omega_1;$$

$$S_2(\omega) = \bar{A}(nT) \sin c \frac{\omega - \omega_n}{2} T \exp[-j\omega((n-1)T + \tau_n)] \exp\left(-j \frac{\omega T}{2}\right).$$

Проанализируем сомножитель  $\exp[-j\omega((n-1)T + \tau_n)]$  с учетом  $\tau_n$  и после преобразований получим  $(n-1)T + \tau_n = T(n-1)(1 \pm \xi) + \tau_0$  (8), где  $\xi = \Delta\tau/T$ .

Из равенства (8) следует, что при  $\xi = 1$  возможна компенсация запаздывания выборок после прохождения через ДЛЗ. Следовательно, все выборки приобретают постоянное запаздывание  $\tau_0$ :

$$S_2(\omega) = \bar{A}(nT) T \sin c \frac{\omega - \omega_n}{2} T \exp[-j\omega\tau_0] \exp\left(-j \frac{\omega T}{2}\right).$$

Соответственно на оси времени

$$f_2(t') = \sum_n \bar{A}(nT) \text{rect} \frac{t' - T}{T} \exp j \omega_n t', \quad t' = t - \tau_0;$$

$$f_2(t') = \sum_n \bar{A}(nT) \exp j \omega_n t', \quad t' \in [\tau_0, \tau_0 + T].$$

Нетрудно видеть, что  $f_2(t')$  представляет комплексную огибающую спектра входного сигнала  $f(t)$ , сформулированную на отрезке  $T$  с запаздыванием  $\tau_0$ . Следовательно, длительность отклика не превышает  $T$  и меньше длительности входного сигнала в  $m = T_a/T$  раз.

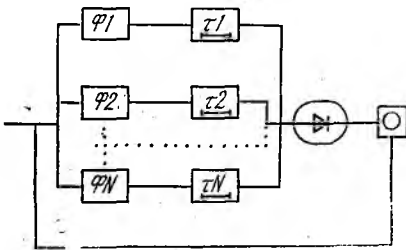
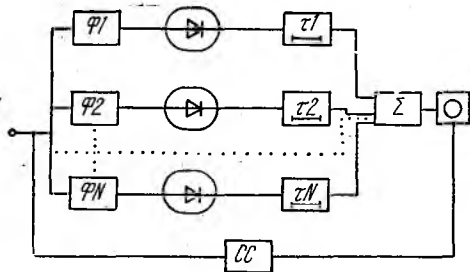


Рис. 1

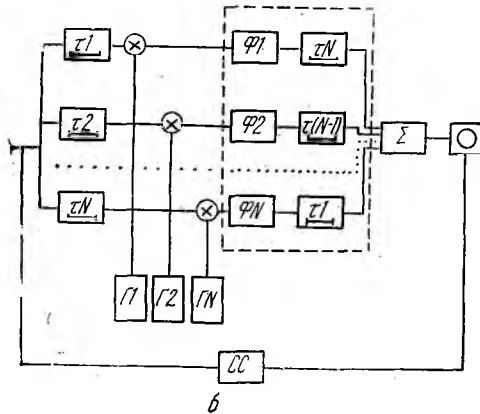
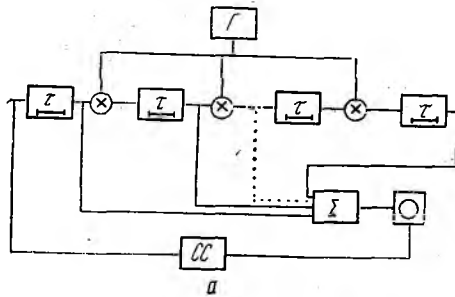


Рис. 2

Перепад задержек ДЛЗ с учетом условия  $\xi = 1$  должен быть равен  $T_c$ . Для измерения фазовых спектров необходимо применить ЛЧМП-операцию для фазового детектирования отклика.

Рассмотренные ЛЧЗ-преобразования с предварительной ЛЧМП-операцией и без нее описывают общие закономерности синтеза Фурье процессоров на основе теоремы отсчетов; ЛЧЗ-преобразование просто исследовать работу дисперсионного АС при воздействии коротких импульсов [3] и АС одновременного типа [4]. Во втором случае отдельные фильтры имеют АЧХ, отличную от прямоугольной, а для получения информации об  $S(\omega_k)$  после детектирования отклики каналов задерживаются пропорционально их центральным частотам. Из структурных схем дисперсионного (рис. 1, а) и одновременного (рис. 1, б) АС видно, что в АС одновременного типа, в отличие от дисперсионного, отсутствует однозначная зависимость между перепадами задержек отдельных каналов и центральными частотами фильтров.

Последовательное выполнение ЛЧМП- и ЛЧМЗ-операций имеет место в интерференционном (рис. 2, а) и дисперсионном АС (рис. 2, б) при формировании спектров примыкающих реализаций сигнала. В интерференционном АС (рис. 2, а) эти операции выполняются одновременно при многократном по-

следовательном выполнении запаздывания и сдвига по частоте в процессе работы рециркулятора.

Следовательно, описанные в работах [1; 2] структуры С — У, и С — У — С обеспечивают выполнение операции ЛЧМЗ и последующее удаление ЛЧМ-заполнения или, кроме указанных преобразований, дополнительную ЛЧМЗ-операцию для обратного Фурье-преобразования. Структуры У — С — У [1; 2] обеспечивают предварительную ЛЧМП-операцию, прохождение через ДЛЗ и ЛЧМ-детектирования.

**Список литературы:** 1. Долбня Е. В., Соболев Н. В., Кочемасов В. Н. Спектральная и кепстральная обработка радиосигналов с применением устройств на поверхностных акустических волнах // Зарубеж. радиоэлектроника. 1982. № 4. С. 3—32. 2. Джен А. М., Грант М. П., Коллинз Дж. Х. Теория, проектирование и применение Фурье-процессоров на поверхностных акустических волнах // Тр. Ин-га инж. по электронике и радиоэлектронике. 1980. Т. 68, № 4. С. 22—43. 3. Письменецкий В. А., Соболев Н. В., Завертанный В. В. Воздействие на дисперсионный анализатор спектра одиночных радиоимпульсов // Методы и аппаратура спектрального и корреляционного анализа сложных сигналов. 1978. Вып. 2. С. 114—119. 4. Письменецкий В. А., Яшков О. В. Особенности формирования спектров импульсных сигналов различной длительности // Методы и аппаратура спектр. и корреляц. анализа слож. сигналов. 1974. Вып. 1. С. 129—136.

*Поступила в редакцию 13.05.88*

УДК 519.24

*В. А. ГОРОХОВАТСКИЙ*, канд. техн. наук

## **ВЫБОР ПОРОГОВ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТАТИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМАХ АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Иерархические структурные алгоритмы обнаружения объектов на изображении путем сравнения с эталоном [1] эффективны в ситуациях, когда анализируемый объект может частично искажаться локальными помехами. Локальные помехи (ложные объекты и фон) действуют на отдельные участки изображения путем замены яркости объекта яркостью помехи. Применение иерархического подхода сводится к тому, что вначале вычисляется сходство отдельных фрагментов изображения и эталона, а затем принимается окончательное решение по результатам этих вычислений.

Статистическое обоснование иерархических алгоритмов [1] состоит в построении функции среднего риска и оптимизации ее по порогам принятия решений на двух уровнях иерархии. Порог  $\delta_1$  отражает величину сходства для отдельных фрагментов, а порог  $\delta_2$  — количество фрагментов, по которому принимается решение о соответствии эталону. Показано, что путем оптимального выбора порогов в условиях действия локальных помех можно добиться того, что минимум среднего риска у иерархического метода будет меньше, чем у традиционного, основанного на величине сходства для всего изображения без разбиения на фрагменты. Проведенные эксперименты подтверждают эффективность такого подхода при обнаружении объектов в условиях действия локальных помех [2].

В работе обсуждается вопрос о выборе порогов  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и их связи с порогом для отношения правдоподобия.

Как известно [3; 4], минимум среднего риска при обнаружении объекта путем проверки статистических гипотез достигается в случае применения правила

$$\frac{pW(B/H_1)}{qW(B/H_0)} \stackrel{H_1}{\stackrel{H_0}{\geq}} \frac{\Pi_{01} - \Pi_{00}}{\Pi_{10} - \Pi_{11}}, \quad (1)$$

согласно которому принимается  $H_1$  (объекта нет) по верхнему неравенству условия (1) и принимается гипотеза  $H_0$  по нижнему неравенству. Здесь  $q$  — вероятность гипотезы  $H_0$ ;  $p = 1 - q$  — вероятность гипотезы  $H_1$ ;  $(\Pi_{ij})$  — матрица штрафов;  $W$  — условная плотность распределения изображения  $B$  при каждой из гипотез. Положив равными вероятности гипотез, штрафы за ошибки и нулевые штрафы за правильные решения, приходим к правилу максимума правдоподобия, согласно которому принимается  $H_1$  в случае выполнения неравенства

$$l = \frac{W(B/H_1)}{W(B/H_0)} > 1 \quad (2)$$

и  $H_0$  — в противном случае.

Правило (2) минимизирует риск

$$R^* = \int_{\Omega_1} W(B/H_0) dB + \int_{\Omega_0} W(B/H_1) dB, \quad (3)$$

где интегрирование производится по областям  $\Omega_1$ ,  $\Omega_0$ , в которых принимаются гипотезы  $H_1$ ,  $H_0$ .

Рассмотрим задачу обнаружения объекта в следующей постановке [1]. Гипотеза  $H_0$  соответствует наличию эталонного объекта  $G$  на изображении, в таком случае  $B = G + U$ , при выполнении гипотезы  $H_1$  сигнал изображения определяется как  $B = U$ . Здесь  $G$  — детерминированная функция эталона;  $U$  — аддитивная помеха с нормальным распределением (параметры  $a$ ,  $\sigma^2$ ), причём предполагаем, что значение помехи не зависит от яркости объекта и от значений помехи в других точках.

Тогда условные плотности распределения матрицы изображения  $B$  размером  $N \times N$  имеют вид

$$W(B/H_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N^2/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N^2} (b_i - a - G_i)^2\right];$$

$$W(B/H_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N^2/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N^2} (b_i - a)^2\right], \quad (4)$$

где  $B_i$ ,  $G_i$  — отсчеты анализируемого изображения и эталона. Запишем отношение правдоподобия

$$l = \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N^2} [(B_i - a)^2 - (B_i - a - G_i)^2]\right]$$

и возьмем логарифм от  $l$ . После упрощений имеем

$$\ln l = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{N^2} (2B_i - 2a - G_i) G_i. \quad (5)$$

Представим сумму в (5) в виде  $s$  отдельных слагаемых, т. е.

$$\ln l = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^{n^2} G_j^k (2B_j^k - 2a - G_j^k). \quad (6)$$

Здесь  $B_j^k, G_j^k$  — отсчеты с номером  $j$  изображения и эталона в  $k$ -м фрагменте;  $s$  — количество фрагментов;  $n^2$  — количество точек в одном фрагменте;  $N^2 = sn^2$ .

Представим внутреннюю сумму в (6) как

$$z^k = 2 \sum_{j=1}^{n^2} G_j^k B_j^k - 2a \sum_{j=1}^{n^2} G_j^k - \sum_{j=1}^{n^2} (G_j^k)^2 = 2r_k - t_k,$$

где вторая и третья суммы — постоянные (обозначим их  $t_k$ ), а первая ( $2r_k$ ) определяет скалярное произведение (корреляционное сходство) изображения и эталона. Тогда запишем (6) следующим образом:

$$\ln l = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^s r_k + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^s t_k,$$

где

$$r_k = \sum_{j=1}^{n^2} G_j^k B_j^k; \quad t_k = \sum_{j=1}^{n^2} (2aG_j^k + (G_j^k)^2). \quad (7)$$

Для реализации решения, минимизирующего (3), нужно проверять условие

$$-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^s r_k + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^s t_k > 1 \quad (8)$$

и, если оно выполняется, принимать гипотезу  $H_1$ . После сокращения положительных сомножителей условие (8) относительно  $H_0$  приобретает вид

$$H_0: \sum_{k=1}^s r_k > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s t_k. \quad (9)$$

При выполнении (9) принимается  $H_0$ , в противном случае —  $H_1$ .

Согласно иерархическому алгоритму [1] принимается гипотеза  $H_0$ , если суммарное сходство фрагментов изображения и эталона превышает величину  $\delta = \delta_1 \cdot \delta_2$ , при этом сходство каждого фрагмента должно быть больше  $\delta_1$ , т. е. решающее правило имеет вид

$$H_0: \sum_{k=1}^s r_k P_r(r_k) > \delta_1 \cdot \delta_2 = \delta, \quad (10)$$

где  $Pr$  — предикат,

$$Pr(r_k) = \begin{cases} 1, & r_k \geq \delta_1; \\ 0, & r_k < \delta_1. \end{cases}$$

Сравнивая (9) и (10), видим, например, что при  $r_k \geq 0$ ,  $k = \overline{1, s}$  (это условие всегда выполняется для изображений) и выборе  $\delta = 0,5 \sum_{k=1}^s t_k$  из выполнения условия (10) автоматически следует (9).

Один из порогов можно фиксировать, а значение другого порога становится зависимым от него. В этом случае иерархический алгоритм обеспечивает решение по максимуму правдоподобия относительно всей совокупности фрагментов, поскольку порог  $\delta$  в (10) соответствует порогу для отношения правдоподобия в (9).

Другой частный случай — при  $n = N$ ,  $\delta_2 = s = 1$  все изображение представляет собой один фрагмент. Если выбрать  $\delta_1$  равным правой части (9), то правила (10), (9) также будут эквивалентными, а иерархический метод преобразуется в традиционный [4].

Строго говоря, величина скалярного произведения  $r_k$  в (10) отражает сходство фрагментов лишь косвенным образом, так как из увеличения  $r_k$  еще не следует увеличение близости фрагментов изображений. Поэтому в строгом смысле порог  $\delta_1$  определяется допустимым отклонением  $r_k$  от произведения норм векторов, участвующих в скалярном произведении.

Приведенные примеры показывают, что иерархическая процедура обнаружения тесно связана с классическим подходом. Пороги  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  могут выбираться так, чтобы осуществлять максимально правдоподобное решение по всему множеству фрагментов. В работе [1] функция среднего риска вида (3) строится на основе вычисления сходства фрагментов, а пороги  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  находятся ее минимизацией. Применение в этой ситуации классического подхода путем построения отношения правдоподобия вызывает математические трудности, так как отношение правдоподобия — сложная функция порогов  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ .

Рассмотрим в связи с этим более простые схемы применения иерархического подхода, воспользовавшись тем, что число фрагментов, как правило, фиксировано, а максимально правдоподобное решение можно принять независимо по каждому фрагменту либо по подмножеству фрагментов.

Первая схема [5] сводится к независимому принятию решения по каждому  $k$ -му фрагменту с помощью проверки условия  $r_k \geq t_k/2$ , а окончательное решение принимается «по большинству» решений первого этапа. Здесь  $\delta_1 = t_k/2$ , причем  $\delta_1$  зависит от  $k$ ,  $\delta_2 = s/2$ . При этом достигается максимально правдоподобное решение как для каждого из фрагментов, так и для всей совокупности фрагментов.

Вторая схема строится путем выбора  $\delta = 0,5 \sum_{k \in K^*} t_k$ , где  $K^*$  — подмножество из  $s^*$  наиболее информативных фрагментов;  $s^* < s$ .

Если выбрать  $\delta_2 = s^*/2$ , то  $\delta_1$  определится как  $\delta_1 = \sum_{k \in K^*} t_k/s^*$ . Эта схема обеспечивает максимально правдоподобное решение по подмножеству наиболее информативных фрагментов. Здесь также можно использовать первую схему для принятия максимально правдоподобного решения относительно каждого из информативных фрагментов.

Третья схема может основываться на комбинациях фрагментов, для каждой из комбинаций выбирается порог  $\sigma_1$ , решение принимается по совокупности комбинаций. Например, если фрагментов четыре, то проверяется выполнение неравенства для отдельных пар (троек) фрагментов и строится процедура принятия решения. Порог  $\sigma_2$  определяет количество необходимых комбинаций, по которым принимается гипотеза  $H_0$ . Иерархические процедуры могут быть построены с использованием других мер сходства фрагментов. При этом появляются особенности выбора порогов. Например, максимально правдоподобное решение о классе изображения  $B$  соответствует правилу [6]

$$\sum_{i,j} |B_{ij} - G_{ij}^1| < \sum_{i,j} |B_{ij} - G_{ij}^2|, \quad (11)$$

где  $G^1, G^2$  — эталоны классов. Это правило в вычислительном плане проще, чем (9). Применительно к задаче обнаружения с разбиением на фрагменты принимается  $H_0$ , если

$$\sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^{n^2} |B_l^k - G_l^k| < \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^{n^2} |B_l^k - a|$$

или в компактном виде

$$\sum_{k=1}^s \rho_k^G < \sum_{k=1}^s \rho_k^a, \quad (12)$$

где  $\rho_k^G, \rho_k^a$  — величины сходства фрагментов анализируемого изображения с эталоном и с шумовым полем. Для правила (12) применимы предыдущие рассуждения с учетом того, что появляются дополнительные трудности выбора порогов  $\delta_1, \delta_2$ , поскольку измерение  $B_l^k$  входит в каждую из частей неравенства (12). В этом случае, например, первая схема сводится к проверке неравенства (12) для всех фрагментов в отдельности, т. е. порог  $\delta_1$  не фиксируется, а правило (10) приобретает вид

$$H_0: \sum_{k=1}^s Pr(\rho_k^G < \rho_k^a) \geq \delta_2.$$

Здесь  $Pr$  — предикат, равный единице при выполнении условия в скобках.

В целом можно отметить, что выбор порогов определяется мерой сходства фрагментов и схемой принятия решения о соответствии структуры фрагментов изображения и эталона.

Список литературы: 1. Гороховатский В. А., Шляхов В. В. Оптимизация иерархических корреляционных алгоритмов анализа изображений // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1988. № 1. С. 28—33. 2. Гороховатский В. А., Кацалап С. Ф., Путятин Е. П. Анализ изображений в условиях локальных искажений // Автометрия. 1986. № 6. С. 46—51. 3. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., 1975. Т. 2. 392 с. 4. Красильников Н. Н. Статистическая теория передачи изображений. М., 1976. 184 с. 5. Ковалевский В. А. Локальные и глобальные решения в распознавании изображений // Тр. Ин-та инж. по электрон. и радиоэлектронике. 1979. № 5. С. 50—58. 6. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. М., 1976. 512 с.

Получена в редколлегию 22.06.88

УДК 621.391

И. Д. ГОРБЕНКО, И. В. ЗОТОВ, В. П. МЕЛЬНИЧУК

### СИНТЕЗ АНСАМБЛЕЙ СИГНАЛОВ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ МЕТОДОМ ДЕЦИМАЦИИ

К настоящему времени разработаны различные по эффективности алгоритмы синтеза систем сигналов с «хорошими» свойствами, использующие в своей основе как регулярные [1], так и нерегулярные методы [2]. Так, в работе [1] предлагается в целях расширения ансамбля систем бинарных фазоманипулированных (ФМ) сигналов использовать свойства изоморфизма разностных множеств, которые сохраняют основные свойства исходных сигналов при измененной «тонкой» структуре сигналов, т. е. когда порядок следования элементов последовательности изменен. Более эффективный, с точки зрения сложности и быстродействия, метод децимации, заключающийся в синтезе сигналов путем последовательного отбора  $q$ -их элементов исходной  $M$ -последовательности, где  $q$  — взаимнопростое с длиной  $N$  число, описан в работе [3]. Однако приведенные там алгоритмы и их теоретическое обоснование позволяют применить данный метод лишь к вполне определенному классу сигналов —  $M$ -последовательностей.

Возможности по разработке новых систем сигналов большого объема и их формирователей, на наш взгляд, связаны с использованием метода децимации, что подтверждается приводимыми рассуждениями.

По аналогии с [1] последовательности ФМ сигналов опишем кодом  $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_N\}$ , где

$$\omega_i = \{1, 0\}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (1)$$

**У т в е р ж д е н и е 1.**

Любому произвольному коду можно поставить в однозначное соответствие разностное множество вида  $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_k\}$  (2), где  $d_j, j = \overline{1, k}$  — номера позиций (локаторы), на которых в последовательности  $W$  расположены единичные символы;

$K$  — общее число единичных символов в  $W$ .

Действительно, по определению разностного множества имеем [1],

что таковым является любое подмножество  $K$  целых чисел по модулю  $N$ , когда разность  $d_i - d_u \pmod{N}$ ,  $i \neq u$ ;  $i, u = \overline{1, k}$  принимает каждое из множества чисел  $1, 2, \dots, N - 1$  точно  $\lambda_1$  раз,  $n_2$  других различных значений из этого же множества чисел  $\lambda_2, n_3 - \lambda_3$  раз,  $\dots, n_n - \lambda_n$  раз.

Видно, что разностные множества отличаются друг от друга параметрами  $(N, K, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , т. е. инвариантны закону формирования (коду) последовательности, а также, что изменение величины  $\lambda_i, n_i$  носит замкнутый характер.

Для разностных множеств характерно свойство изоморфных преобразований, заключающееся в следующем [1]. Исходному коду  $W$  ставится в однозначное соответствие множество  $D$ , элементы которого затем умножаются на один из так называемых изоморфных коэффициентов  $t_i$ , являющийся взаимнопростым с  $N$ , т. е.  $(t, N) = 1$ , что приводит к образованию нового разностного множества  $D^t$  вида

$$D^t \equiv tD \pmod{N} = \{td_1, td_2, \dots, td_k\}. \quad (3)$$

Показано [1], что хотя «тонкая» структура множеств  $D, D^t$ , а также кодов  $W$  и  $W^t$ , соответствующих им, не совпадает, тем не менее остаются неизменными параметры  $(N, K, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , а значит и структурные, корреляционные свойства ФМ сигналов.

Таким образом, свойства изоморфизма разностного множества инвариантны методу кодирования, а с другой стороны, позволяют расширить ансамбль синтезируемых сигналов.

Метод децимации, как известно [3], также позволяет сохранить свойства исходной последовательности. Суть его заключается в следующем. Последовательность  $W^q$  образуется посредством считывания  $q$ -х элементов исходной последовательности, где  $q$  — коэффициент децимации,  $(q, N) = 1$ , т. е.

$$W^q = \{\omega_q, \omega_{2q}, \omega_{3q}, \dots, \omega_{Nq}\}, \pmod{N}. \quad (4)$$

В известной литературе данный метод обоснован и применяется для синтеза ансамблей  $M$ -последовательностей. Однако, как показали исследования, его применение можно значительно расширить.

## У т в е р ж д е н и е 2.

Последовательность  $W^q$ , сформированная методом децимации по коэффициенту  $q$   $(q, N) = 1$ , исходной последовательности  $W$ , эквивалентна последовательности  $W^t$ , образованной путем умножения разностного множества  $D$ , соответствующего  $W_1$ , на изоморфный коэффициент  $t$   $(t, N) = 1$ , если выполняется равенство  $(qt) = 1, \pmod{N}$ . (5). Действительно, с одной стороны, из (3) имеем  $d_j^t = td_j, \pmod{N}$ , (6), откуда можно выразить  $d_j$  как  $d_j = d_j^t/t$ . (7). С другой стороны, из (4) следует, что элементы множества  $D^t$  можно определить, решив систему уравнений

$$\begin{aligned} i \cdot q &= d_j; \\ d_j^q &= j, \pmod{N}, \quad i = \overline{1, k} \end{aligned} \quad (8)$$

и упорядочив элементы  $d_j^q$  по их возрастанию. Это справедливо, поскольку элементы разностного множества, как уже указывалось, — локаторы единичных символов ФМ сигнала и их появление в децимированной последовательности будет определяться скважностью  $q$  и периодом  $N$ .

Тогда справедливо равенство  $d_j^q q = d_j$  (9). Подставляя (6) в (9), получаем

$$d_j^q q = d_j^t / t, \pmod{N}; \quad d_j^q = d_j^t \gamma; \quad (10)$$

$$\gamma = (qt)^{-1}. \quad (11)$$

Выражение (10) позволяет сделать вывод, что метод децимации по коэффициенту  $q$  эквивалентен методу синтеза изоморфного разностного множества по коэффициенту  $t$ , если выполняется условие (11), так как приводит к одинаковым разностным множествам, а соответствие  $D = W$  носит взаимоднозначный характер.

### С л е д с т в и е 1.

Децимация последовательности  $W$  по коэффициенту  $q = t^{-1} \pmod{N}$ , где  $t$ -изоморфный коэффициент, сохраняет структурные, корреляционные свойства исходной последовательности.

### С л е д с т в и е 2.

Метод децимации как алгоритм синтеза ансамбля ФМ сигналов инвариантен закону формирования (коду).

Доказательства следствий 1, 2 вытекают из определения разностного множества, а также утверждений 1, 2.

Следует отметить, что поскольку  $(q, N) = 1$  и  $(t, N) = 1$ , то множества коэффициентов децимации  $q_i$  и изоморфных коэффициентов  $t_i$  эквивалентны в этом случае и количественно определяются функцией Эйлера от длины  $N$  [1].

**Пример.** Пусть исходная последовательность имеет код вида  $W = \{100110001110\}$ ,  $N = 12$ ,  $K = 6$ . Нетрудно проверить, что  $W$  обладает трехуровневой функцией автокорреляции (ПФАК) с  $|R_{б.макс}^{пфа\ k}| = 4$ . Тогда, с одной стороны, множество  $D$ , соответствующее  $W$ , будет  $D = \{1, 4, 5, 9, 10, 11\}$ , и выбрав в качестве изоморфного коэффициента число  $t = 5$ ,  $(5, 12) = 1$ , получим  $D^t = \{5, 8, 1, 9, 2, 7\} = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$ ,  $\pmod{12}$ , а синтезированный ФМ сигнал записывается следующим образом:  $W^q = \{1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0\}$ ,  $N = 12$ ,  $K = 6$ . С другой стороны, последовательность, образованная в результате децимации по коэффициенту,  $q = 5^{-1} = 5 \pmod{12}$ , представляется как  $W^q = \{1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0\}$ ,  $N = 12$ ,  $K = 6$ . Нетрудно убедиться, что последовательности  $W^t = W^q$  обладают трехуровневой ПФАК с  $|R_{б.макс}^{пфа\ k}| = 4$ .

Таким образом, в результате проведенных исследований установлено, что метод децимации можно использовать при синтезе ансамблей сигналов независимо от закона их формирования. Это позволяет также значительно упростить программно-аппаратную реализацию устройств синтеза сигналов, сократить время формирования всего ансамбля. Причем последнее можно утверждать на основе следующих расчетов.

Предложенные в работе [1] алгоритмы расчета коэффициентов  $t_i$  и получения изоморфизмов требуют в арифметике полей Галуа  $n_y = N$ -операций умножения;  $n_g = k'$ - операций деления;  $n_c = N$ - операций возведения в степень.

В то же время методика определения коэффициента децимации требует  $n_g = n_1$ -операций деления, где  $n_1$  — количество итераций до нахождения первого взаимобратного с  $N$  числа,  $n_{1 \text{ макс}} = N/2$ , а алгоритм децимации  $n_y = (N - N/q)$ -операций умножения.

Выигрыш в эффективности метода децимации очевиден, при этом он возрастает с увеличением  $N$ , что способствует значительному снижению сложности устройств формирования сигналов.

Список литературы: 1. Свердлик М. Б. Оптимальные дискретные сигналы. М., 1975. 192 с. 2. Баракин Л. Е. Теория сложных сигналов. М., 1970. 290 с. 3. Сарватте Д. В., Перли М. Б. Взаимокорреляционные свойства псевдослучайных и родственных последовательностей // Тр. Ин-та инж. по электрон. и радиотехнике. 1980. Т. 68, № 5. С. 59—60.

Поступила в редколлегию 05.04.88

УДК 681.327

А. В. КОРОЛЕВ, канд. техн. наук, В. А. ПЕТУХОВ

#### МЕТОД КОДИРОВАНИЯ ВИДЕОИНФОРМАЦИИ ЦИФРОВЫХ ЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Широкое применение во всех сферах человеческой деятельности систем автоматизированного управления, проектирования, обучения, тренажерных комплексов и других форм человеко-машинных интерфейсов связано с необходимостью обработки информации в виде синтезированных алфавитно-цифровых, графических и реалистических (телевизионных черно-белых или цветных) изображений. Представление видеoinформации (ВИ) на экранах растровых устройств индикации позволяет визуализировать данные с высоким качеством, однако требует значительных объемов памяти и характеризуется большой продолжительностью цикла обработки. Время обработки существенно зависит от метода кодирования (представления) изображений.

Актуальной является задача определения такой формы описания изображений, которая позволила бы при сохранении высокого качества визуализации уменьшить время обработки и сократить объемы требуемой памяти. В настоящее время используется большое количество специализированных методов описания растровых изображений, но каждый из них позволяет эффективно обрабатывать только узкий класс ВИ. Ставится задача разработки метода кодирования видеoinформации широкого класса цифровых цветных изображений.

Основное представление графических и реалистических изображений — кодирование методом импульсно-кодовой модуляции, которое рассматривается как эталон кодирования. Поэтому возможности и характеристики других методов кодирования обычно оцениваются по отношению к методу ИКМ. При обработке указанным методом,

изображение представляется в цифровой форме путем дискретизации и квантования. Поле изображения ограничено размером раstra  $M = N_v \cdot N_r$  (1). Здесь  $N_v$  — число строк раstra;  $N_r$  — число элементов отображения в строке.

Каждому элементу ставится в соответствие  $m$ -разрядный код  $m = \log_2 W$  (2), где  $W$  — число уровней квантования яркости или цветности. Под цветностью понимается сигнал  $Z = E_R + E_G + E_B$ , т. е. сумма основных цветовых сигналов в цифровой форме. Для черно-белого изображения значение  $m$  принимается равным 6 или 8 бит (64 или 256 уровней квантования яркости), для цветного изображения используется кодирование от 6 до 8 бит на каждый из основных цветов: красный, зеленый, синий. Уменьшение числа бит на 1 элемент вызывает появление ложных контуров, которые возникают в результате скачкообразных изменений яркости или цвета на участках изображения с их плавными изменениями.

Метод ИКМ не использует статистические свойства изображений, т. е. основывается на предположении, что все  $W$  уровней квантования равновероятны, а статистические связи между элементами изображения отсутствуют. В этом случае энтропия, выражаемая числом бит на элемент, будет определяться как

$$H_{\text{макс}} = n_{\text{ср}} \cdot \log_2 r = \log_2 W, \quad (3)$$

где  $n_{\text{ср}}$  — средняя длина кодовой комбинации сообщения;  $r$  — число элементов алфавита  $\{0, 1\}$ .

Исследование статистических связей между элементами указывает на значительную избыточность реалистических (телевизионных) и графических изображений как по яркости ( $Y$ ), так и по цветности ( $Z$ ). Они проявляются в том, что вероятность следования за элементом с уровнем яркости  $i$  элемента с уровнем яркости  $j \neq i$  мала.

Вероятность новых значений ( $P_{\text{изм}}$ ) равна  $1 - \sum_{j=1}^W P_{ij}$ . Энтропия  $H(z)$  изображения, рассматриваемого как источник информации, может принимать следующие значения в зависимости от цветовой детальности, характеризуемой величиной  $P_{\text{изм}}$ :

$$H(Z) = \begin{cases} H_{\text{макс}}, & P_{\text{изм}} = 1; \\ H' < H_{\text{макс}}, & P_{\text{изм}} < 1; \\ 0 & P_{\text{изм}} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для реальных сюжетов  $P_{\text{изм}} \leq 0,1$  [1], для сложных графических изображений (синтезированных визуальных моделей)  $P_{\text{изм}} \leq 0,2$  [2].

Из теории информации известно, что для любого источника информации, представленного набором сообщений  $X = \{X_1, \dots, X_w\}$  с заданным распределением вероятностей  $P(x_1), \dots, P(x_w)$ , можно построить код с минимальной избыточностью. Для числовой оценки избыточности служит коэффициент избыточности  $K_n$ , определяемый по формуле

$$K_n = \frac{H(x)_{\text{макс}} - H(x)}{H(x)_{\text{макс}}} = \frac{n_{\text{ср}} - n_{\text{мин}}}{n_{\text{ср}}}, \quad (5)$$

где  $H(x)_{\text{макс}}$  — максимальная энтропия сообщения;  $H(x)$  — энтропия сообщения реального кода;  $n_{\text{мин}} = \frac{H(x)}{\log_2 r}$  — минимальная средняя длина кодовой комбинации, при которой еще возможно передать сообщение  $x$  без потери информации.

На основании выражения (5) можно сделать вывод, что для эффективных кодов должно выполняться равенство  $n_{\text{ср}} = n_{\text{мин}}$ , т. е. под эффективным кодом понимается такой код, коэффициент избыточности которого равен нулю.

Оценим избыточность кодирования изображений методом ИКМ с учетом условий, оговоренных в (4):  $K_H = 0, P_{\text{изм}} = 1; K_H = 1, P_{\text{изм}} = 0$ . Таким образом, кодирование методом ИКМ при  $P_{\text{изм}} = 1$  эффективно, но во всех остальных случаях оно обладает избыточностью, достигающей максимума при  $P_{\text{изм}} = 0$ . Оценим эффективность кодирования через среднюю длину кодовой комбинации сообщения. Критерием оценки эффективности реального кода служит неравенство

$$\frac{H(z)}{\log_2 r} \leq n_{\text{ср}} < \frac{H(z)}{\log_2 r}. \quad (6)$$

Для ИКМ  $n_{\text{ср}} = \text{const}$  и определяется из выражения (3), поэтому неравенство (6) выполняется только для изображений с  $P_{\text{изм}} \approx 1$ . Для реалистических и графических изображений это условие не выполняется. Следовательно, для данных классов изображений такой код избыточен и неэффективен, что, в свою очередь, приводит к большому цифровому массиву описания кадра изображения, объем ( $C$ ) которого определяется выражением  $C_{\text{ИКМ}} = M \cdot n_{\text{ср}}$  (7). Большой объем цифрового массива требует значительного времени для обработки и больших затрат памяти на хранение ВИ.

К сокращению цифрового массива ( $C_{\text{ИКМ}}$ ) приводит выбор статистической модели изображения учитывающий статистическую зависимость элементов отображения. Предположим, что кадр изображения разбит не на отдельные элементы отображения, а на отрезки, каждый из которых содержит группу элементов. При этом взаимосвязь между укрупненными элементами будет слабее, чем между элементами исходного кадра. Если укрупнение элементов использовать совместно с применением оптимального статистического кода, учитывающего неравномерность распределения вероятностей появления элементов сообщения, то становится возможным устранение избыточности сообщений, что обеспечивает сокращение объема цифрового массива.

На рис. 1, а изображен кадр произвольного цветного изображения в цифровой форме, представленный методом ИКМ. Каждый элемент отображения данного изображения содержит  $m = 24$ -разрядный код, характеризующий его цветность. Используя выражения (1), (3), (7), вычисляем объем цифрового массива —  $C_{\text{ИКМ}}$ .

С целью сокращения  $C_{\text{ИКМ}}$  модифицируем данный кадр следующим образом. Двигаясь по изображению в направлении развертки, каждому  $m$ -разрядному элементу отображения поставим в соответствие элемент  $X_g$  в одну двоичную единицу. Считая, что элемент отображения,

имеющий одинаковую цветность с предыдущим, отмечается «0», а имеющий любую иную цветность — «1», построим битовую карту изменения цветности кадра изображения размером  $M$ . В этой битовой карте

$$X_g = \begin{cases} 0, & X_g = X_{g-1}; \\ 1, & X_g \neq X_{g-1}. \end{cases}$$

Данная битовая карта несет только часть информации, содержащейся в исходном изображении, а именно «картинку» изменения цветности по полю изображения. Для сохранения исходного количества информации дополним битовую карту списком кодов цветности тех элементов  $X_g$ , значения которых равны 1.

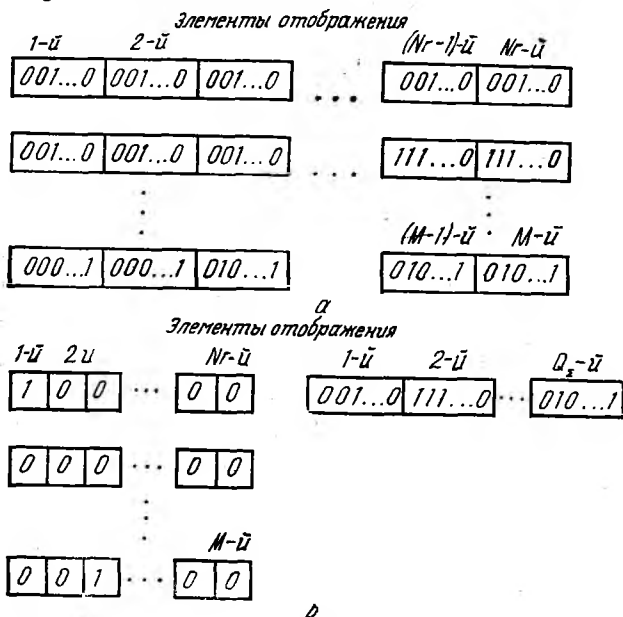


Рис. 1

В результате такого преобразования каждый элемент отображения исходного кадра представлен следующим образом:

$$X_q = \begin{cases} 0, & X_q = X_{q-1}; \\ 1 + m_q, & X_q \neq X_{q-1}. \end{cases} \quad (8)$$

Список кодов цветности в порядке очередности, определяемой направлением развертки, будет содержать массив  $m$ -разрядных кодов цветности. Количество кодов в списке ( $Q_z$ ) будет зависеть от вероятности  $P_{\text{изм}}$  и определяться выражением  $Q_z = (M - 1) \cdot P_{\text{изм}} + 1$  (9). Графическое представление изображения в цифровой форме, полученное в результате обработки, приведено на рис. 1, б. Объем цифрового массива в этом случае составит:

$$C' = M \cdot 1 \text{ бит} + [(M - 1) \cdot P_{\text{изм}} + 1] m. \quad (10)$$

Модифицированное подобным образом изображение представляет собой источник сообщений, в котором каждое сообщение кодируется кодовыми словами с различной длиной кодовой комбинации. Она может принимать два значения (из условия (8)) — 1 бит или  $1 + m$  бит. Величина второго слагаемого в выражении (10) определяется вероятностью изменения цветности  $P_{\text{изм}}$ , тем самым, с учетом малой величины  $P_{\text{изм}}$  для графических и реалистических изображений, обеспечивается уменьшение объема цифрового массива  $C'$  по сравнению с  $C_{\text{ИКМ}}$ . Для оценки эффективности модифицированного представления изображений используется коэффициент  $K_{\text{и}}$ . Его значение найдем через среднюю длину кодовой комбинации  $n'_{\text{ср}}$ . Согласно выражениям (7) и (10) она составит

$$n'_{\text{ср}} = 1 + \frac{m(M-1) \cdot P_{\text{изм}} + m}{M}. \quad (11)$$

В случае обработки изображения с  $P_{\text{изм}} = 1$ ,  $n'_{\text{ср}}$  будет равно  $1 + m$ , а коэффициент избыточности ( $K_{\text{и}}$ ), определяемый выражением (5), будет равен

$$K_{\text{и}} = \frac{1 + m - \frac{\log_2 W}{\log_2 r}}{1 + m} = \frac{1}{1 + m}.$$

Для изображения с  $P_{\text{изм}} = 0$  коэффициент избыточности будет равен

$$K_{\text{и}} = \frac{1 + \frac{m}{M} - 0}{1 + \frac{m}{M}} = 1.$$

Таким образом, коэффициент избыточности для цифровых цветных изображений, обработанных по предложенному способу, равен  $\frac{1}{1+m} \ll K_{\text{и}} \ll 1$ . Оценку эффективности подобного описания изображений, по сравнению с ИКМ, можно провести также и через коэффициент сжатия — ( $C_r$ ). Он является мерой количественной оценки того, насколько сообщение данного способа по своей средней длине отличается от средней длины кодовой комбинации соответствующего ему сообщения, представленного методом ИКМ, и определяется как

$$C_r = \frac{n'_{\text{ср ИКМ}}}{n'_{\text{ср}}}.$$

По введенным коэффициентам  $K_{\text{и}}$ ,  $C_r$  оценены изображения, имеющие  $0 \leq P_{\text{изм}} \leq 1$  и требующие для кодирования цветности каждого элемента отображения от 6 до 24 бит. Полученные значения приведены на рис. 2, 3.

Зависимости средней длины кодовой комбинации от вероятности изменения цветности элементов отображения  $n'_{\text{ср}} = f(P_{\text{изм}})$  показывают, что данный метод дает заметный выигрыш в средней длине

кодовой комбинации для графических и реалистических изображений (участок с  $0,01 \leq P_{изм} \leq 0,2$ ), следовательно, в этих пределах  $C' \ll C_{ИКМ}$ , что обеспечит сокращение времени цикла обработки видеoinформации и заметный выигрыш в объеме памяти (рис. 2).

На рис. 3 представлена зависимость коэффициента сжатия от количества разрядов, отводимых для кодирования сигнала цветности,  $C_r = f(m)$  при различных значениях  $P_{изм}$ . Анализ этих кривых позволяет сделать вывод о возможности дальнейшего повышения значения коэффициента сжатия видеoinформации по сравнению с ИКМ. Для наиболее распространенных изображений, имеющих  $0,01 < P_{изм} < 0,2$  и значениях  $m = 6$  и  $m = 24$  коэффициент сжатия соответственно равен  $2,7 \leq C_r \leq 5,7$  и  $4,8 \leq C_r \leq 19,4$ .

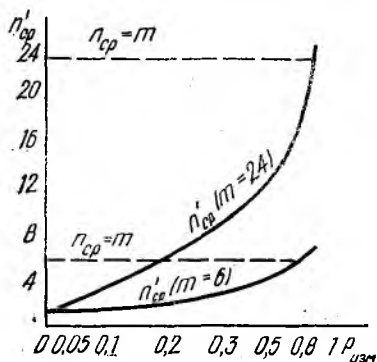


Рис. 2

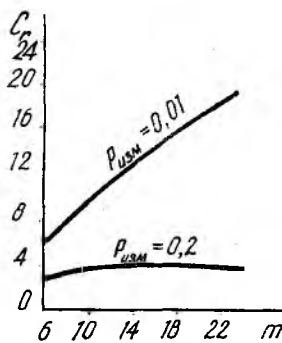


Рис. 3

Предложенный метод кодирования цветных изображений применим в системах, где требуется хранить и передавать большие объемы видеoinформации в виде графических и реалистических изображений.

Список литературы: 1. Зубарев Ю. Б., Глориозов Г. Л. Передача изображений. М., 1982. 54 с. 2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: В 2 кн. М., 1982. Кн. 2. 362 с.

Поступила в редколлегию 10.05.88

УДК 550.388.2

Ю. П. ФЕДОРЕНКО, канд. физ.-мат. наук, В. Н. ФЕДОРЕНКО

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ИОНОСФЕРЫ ПРИ ПОМОЩИ ЕЕ РАДИОПРОСВЕЧИВАНИЯ С НАВИГАЦИОННЫХ ИСЗ

При распространении радиоволн от ИСЗ к наземному измерительному пункту (ИП) их время запаздывания и доплеровское смещение частоты имеют дополнительные составляющие  $\delta t_{и}$ ,  $\delta f_{и}$ , обусловленные ионосферой Земли.

Численные расчеты  $\delta f_n$  [1; 2], выполненные с использованием модели высотного распределения электронной концентрации  $N(z)$ , в которой величина  $N_m$  и высота  $z_m$  максимума ионизации скорректированы по данным сети станций вертикального зондирования, приблизительно согласовывались с результатами измерений на частотах 54 и 108 МГц. В расчетах учитывали полное электронное содержание по искривленному лучу, геомагнитное поле и др. Использование наиболее совершенных моделей  $N$ , например, «IRI» или значительно более простой «Ching and Chiu» позволяет повысить точность вычислений  $\delta t_n$ ,  $\delta f_n$ . Однако даже после их корректировки по данным вертикального зондирования они имеют погрешность около 30 % [3] и не описывают неоднородную структуру  $N$ . Вместе с этим, например, волновые возмущения (ВВ)  $N$  с относительной амплитудой приблизительно 5...10 %, как будет установлено ниже, приводят к существенным (около 100 %) вариациям  $\delta f_n$ .

Таким образом, погрешность расчетных значений  $\delta t_n$ ,  $\delta f_n$  только в абсолютно спокойной ионосфере составит около 30 %. В возмущенной ионосфере она существенно увеличится. При этом затраты машинного времени никак не оправданы низкой точностью вычислений, а повышение погрешности в результате пренебрежения, например, геомагнитным полем и искривлением радиолуча, гораздо ниже неопределенности, обусловленной неадекватностью используемой модели  $N$ . Поэтому в прикладных расчетах  $\delta t_n$ ,  $\delta f_n$  в целях уменьшения объема вычислений следует применять различные упрощения. Это особенно правомерно для радиочастот более 100 МГц, которые выделены для навигационных и связных ИСЗ, таких, как «ТРАНЗИТ» ( $f_1 \approx 150$ ,  $f_2 \approx 400$  МГц), «НАВСТАР» ( $f_1 \approx 1227$ ,  $f_2 \approx 1575$  МГц). Величины  $\delta t_n$ ,  $\delta f_n$  в этом случае с высокой точностью определяются полным электронным содержанием по спрямленному лучу  $N_L$  [4]:

$$\delta t_n(t) \approx \frac{a}{f} N_L; \quad (1)$$

$$\delta f_n(t) \approx \frac{a}{f} \frac{dN_L}{dt}, \quad (2)$$

где  $N_L = \int_0^{R_n} N(R) dR$ ;  $N(R)$  — распределение  $N$  вдоль спрямленного радиолуча  $R$ ;  $t$ ,  $R_n$  — время пролета и местоположение ИСЗ;  $a = e^2/(2\pi m_e c)$ ,  $e$ ,  $m_e$  — заряд и масса электрона;  $c$  — скорость света в вакууме.

Цель статьи — разработка рекомендаций по использованию  $\delta t_n$  и  $\delta f_n$  в качестве индикатора состояния ионосферы.

Выполнен анализ зависимостей  $\delta t_n(t)$ ,  $\delta f_n(t)$  с использованием пространственного распределения  $N$  в виде суммы сферически-слоистого, градиентного и волнового слагаемых. На его основе предложена упрощенная модель  $N_L$ , позволяющая установить главные параметры пространственного распределения  $N$ . Она может применяться при построении экстраполирующих функций  $\delta t_n(t)$ ,  $\delta f_n(t)$ , служащих для

компенсации ионосферных ошибок радиотехнических систем в период, когда аппаратурное их исключение из-за сбоев в работе приемных каналов оказывается невозможным.

*Анализ зависимостей*  $\delta f_n(t)$ ,  $\delta t_n(t)$ . Для получения расчетных формул ионосферных составляющих  $\delta f_n(t)$ ,  $\delta t_n(t)$  предположим, что на время пролета ИСЗ пространственное распределение  $N$  аппроксимируется моделью

$$N = N(z) (1 + a_{\Gamma} l + d \delta \sin ml), \quad (3)$$

где  $N(z)$  — высотное распределение  $N$ ;  $a_{\Gamma} = \frac{\partial N}{\partial l} \frac{l}{N}$  — относительный горизонтальный градиент  $N$  вдоль линии, которую образуют точки пересечения радиолуча с высотой  $z$ ;  $l$  — длина этой линии, отсчитываемая от начального положения радиолуча в момент  $t_0$  начала регистрации  $\delta f_n(t)$  или  $\delta t_n(t)$ ;  $d = \Delta N/N$  — относительная амплитуда ВВ с горизонтальным периодом (вдоль  $l$ )  $L$ ;  $m = 2\pi/L$ ;  $\delta = 1$ ,  $z_1 \leq z \leq z_2$ ;  $\delta = 0$ ,  $z_1 > z > z_2$ . Таким образом, на высотах  $z_1 \leq z \leq z_2$  значения  $N$  определяются сложением  $N(z)$ , линейным  $N(z) a_{\Gamma} l$  и гармоническим  $N(z) d \sin ml$  слагаемыми. В интервале высот  $z_1 > z > z_2$   $N$  задается только двумя первыми слагаемыми.

Выражение для  $l$  имеет вид

$$l = \int_{t_0}^t R \left[ \frac{(1+b)v_{\gamma}^2}{(\cos^2 \gamma + b)} + v_{\varepsilon}^2 \sin^2 \gamma \right]^{1/2} dt'; \quad (4)$$

$$R = R_s (-\cos \gamma + \sqrt{\cos^2 \gamma + b}); \quad (5)$$

$$b = 2z/R_s + z^2/R_s^2, \quad (6)$$

где  $R_s$  — радиус Земли;  $z$  — высота над ее поверхностью,  $v_{\gamma}$ ,  $v_{\varepsilon}$  — угловые скорости ИСЗ по зенитному углу  $\gamma$  и азимуту  $\varepsilon$ .

Исследуем вначале зависимость  $\delta f_n(R_s, \gamma, \varepsilon)$ , используя выражение для  $\delta f_n$  [5], которое в случае пренебрежения нестационарностью ионосферы можно записать как

$$\delta f_n = \frac{a}{f} [N_{\varepsilon} v_{R_{\varepsilon}} + \int_0^{\varepsilon} (\nabla_{\tau} N \vec{v}_{\tau}) dR].$$

Здесь

$$(\nabla_{\tau} N \vec{v}_{\tau}) = v_{\gamma} \frac{\partial N}{\partial \gamma} + v_{\varepsilon} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon}, \quad (7)$$

$N_{\varepsilon}$  — значение  $N$  в окрестности ИСЗ,  $v_{R_{\varepsilon}}$  — его радиальная скорость.

В уравнении (7) от дифференцирования  $N$  по  $\gamma$  и  $\varepsilon$  перейдем к дифференцированию по направлениям  $z$  и  $l$ :

$$\frac{\partial N}{\partial \gamma} = \frac{\partial N}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \gamma} + \frac{\partial N}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \gamma};$$

$$\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial N}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \varepsilon};$$

где

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \gamma} &= -\frac{R \sin \gamma}{1 + z/R_3}; \\ \frac{\partial N}{\partial l} &= N(z) (a_\Gamma + d \delta m \cos ml); \\ \frac{\partial l}{\partial \gamma} &= R; \quad \frac{\partial l}{\partial \varepsilon} = R \sin \gamma.\end{aligned}$$

Окончательно для  $\delta f_n$  имеем

$$\delta f_n = \frac{a}{f} [N_{\text{в}} v_{R_{\text{в}}} + I_1 + I_2 + I_3]. \quad (8)$$

Здесь

$$I_1 = -v_\gamma R_3 \sin \gamma \left[ N_{\text{в. сл}} - \cos \gamma \int_0^{z_{\text{в}}} \frac{\partial N}{\partial z} \frac{dz}{(\cos^2 \gamma + b)^{1/2}} \right];$$

$$I_2 = (v_\gamma + v_\varepsilon \sin \gamma) \int_0^{z_{\text{в}}} a_\Gamma N(z) \beta(z) R(z) dz;$$

$$I_3 = (v_\gamma + v_\varepsilon \sin \gamma) dm \int_{z_1}^{z_2} N(z) \beta(z) R(z) dz;$$

$$\beta(z) = (1 + z/R_3)/(\cos^2 \gamma + b)^{1/2};$$

$N_{\text{в. сл}}$  — слоистая составляющая  $N$  на высоте  $z_{\text{в}}$ . Поскольку пространственное распределение  $N$  (3) имеет слоистое, градиентное и волновое слагаемые, то и ионосферную составляющую доплеровского смещения частоты  $\delta f_n$  (8) можно представить в виде суперпозиции слоистого  $\delta f_{\text{сл}}$ , градиентного  $\delta f_\Gamma$  и волнового  $\delta f_{\text{в}}$  слагаемых:

$$\delta f_{\text{сл}} = \frac{a}{f} \left\{ N_{\text{в}} v_{R_{\text{в}}} - v_\gamma R_3 \sin \gamma \left[ N_{\text{в. сл}} - \cos \gamma \int_0^{z_{\text{в}}} \frac{\partial N}{\partial z} \frac{dz}{(\cos^2 \gamma + b)^{1/2}} \right] \right\}; \quad (9)$$

$$\delta f_\Gamma \simeq \frac{a}{f} \left[ N_{\text{в}\Gamma} v_{R_{\text{в}}} + a_\Gamma (v_\gamma + v_\varepsilon \sin \gamma) \int_0^{z_{\text{в}}} N(z) \beta(z) R(z) dz \right]; \quad (10)$$

$$\delta f_{\text{в}} \simeq \frac{a}{f} [N_{\text{в}\text{в}} v_{R_{\text{в}}} + (v_\gamma + v_\varepsilon \sin \gamma) dm \Delta z \bar{N} \bar{\beta}(\bar{z}) R(\bar{z}) \cos m\bar{l}], \quad (11)$$

где  $N_{\text{в}\Gamma}$ ,  $N_{\text{в}\text{в}}$  — градиентное и волновое составляющие  $N$  на высоте  $z_{\text{в}}$ ;  $\bar{N}$ ,  $\bar{l}$  — средние значения  $N$ ,  $l$  в интервале высот  $z_1 < z < z_2$ ;  $\Delta z = z_2 - z_1$  — толщина слоя с волновыми возмущениями  $N$ ,  $\bar{z} = (z_1 + z_2)/2$ .

При получении (10) полагалось, что  $a_\Gamma$  — постоянно для всех высот  $z$ . Согласно расчетам первыми слагаемыми в (10), (11) можно пренебречь при всех значениях  $\gamma$  и  $z_{\text{в}}$ . Интегрирование в (9), (10) осуществляется до  $z_{\text{в}}$  только в случае, когда ИСЗ летит в ионосфере.

Для среднеорбитных ИСЗ с  $z_b \approx 20000$  км верхний предел интегрирования следует заменить высотой примерно 800...1000 км, выше которой значениями  $N$  можно пренебречь. Поэтому в уравнениях (9) — (11) для всех значений  $z_b$  можно положить  $b \approx 2z/R_s$ . Временную зависимость  $\delta f_{\text{СЛ}}(t)$  исследуем с помощью параболической модели  $N(z)$

$$N(z) = N_m \left[ 1 - \left( \frac{z - z_m}{z_m} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

На рис. 1 показаны зависимости  $\delta f_{\text{СЛ}}(t)$ , рассчитанные для нее по (9) при  $f = 150$  МГц,  $z_b = 200 \dots 1000$  км (цифры у кривых). В расчетах использованы характерные для дневных условий  $N_m = 2 \cdot 10^6$  см<sup>-3</sup> и  $z_m = 300$  км, время отсчитывалось от момента траверза (наибольшее приближение ИСЗ к ИПу), при интегрировании в (9)

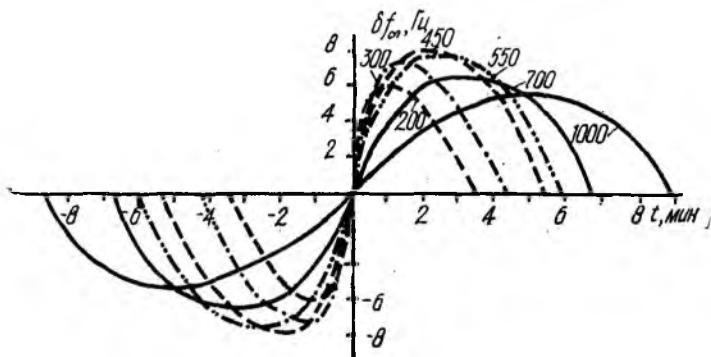


Рис. 1

полагалось  $b = 2z/R_s$ , вращением Земли пренебрегали, орбита ИСЗ аппроксимировалась окружностью с центром в центре Земли, плоскость орбиты проходила через вертикаль ИПа:

$$t = \frac{1}{\omega_b} \arcsin \left\{ \frac{\sin \gamma [-\cos \gamma + (\cos^2 \gamma + b_a^2)^{1/2}]}{(1 + z_b/R_s)} \right\},$$

где  $\omega_b$  — угловая скорость ИСЗ относительно центра Земли,  $b_a = b$  (6) при  $z = z_b$ .

Зависимость  $\delta f_{\text{СЛ}}(t)$  для этих же значений  $N_m, z_m$ , но при  $f = 1200$  МГц и  $z_b = 20000$  км изображена на рис. 2, б (кривая 3).

Существенное уменьшение значений  $\delta f_{\text{СЛ}}$  при переходе от низкоорбитных ( $z_b \leq 1000$  км;  $f \approx 150$  МГц) к среднеорбитным ( $z_b \approx 20000$  км,  $f \approx 1200$  МГц) ИСЗ обусловлено как увеличением  $f$  ( $\delta f_{\text{СЛ}} \sim 1/f$ ), так и уменьшением полной скорости ИСЗ  $v$  в результате увеличения  $z_b$ , поскольку  $\delta f_{\text{СЛ}} \sim v \sim (R_s + z_b)^{-1/2}$ .

В слоистой ионосфере, как следует из анализа (9), вблизи траверза  $\delta f_{\text{СЛ}} \sim \sin \gamma$ , а вблизи радиовосхода и радиозахода  $\delta f_{\text{СЛ}} \sim \sin 2\gamma$ . Таким образом, для  $\gamma = 0$ ,  $\gamma = \pi/2$   $\delta f_{\text{СЛ}} = 0$  Гц.

При наклоне плоскости орбиты к вертикали ИПа на угол  $\xi$  значения  $\delta f_{\text{СЛ}}$  будут пропорциональны  $\cos \xi$ . Поэтому максимальные величины  $|\delta f_{\text{СЛ}}|$  наблюдаются при  $\xi = 0$ .

Используя модель  $N$  (3), для  $N_L$  получаем зависимость

$$N_L(z_n, \gamma, \varepsilon) = \int_0^{z_n} N(z) (1 + a_{\Gamma} l + d \delta \sin ml) \beta(z) dz.$$

Зависимость  $\delta t_n$  (1) в этом случае представляется в виде трех слагаемых

$$\delta t_n = \delta t_{\text{СЛ}} + \delta t_{\Gamma} + \delta t_B, \quad (13)$$

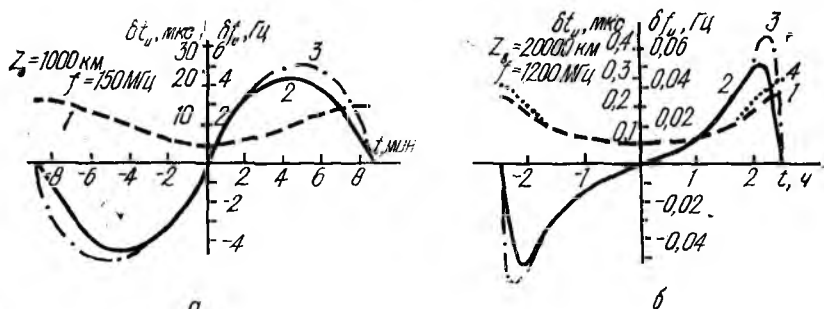


Рис. 2

где

$$\delta t_{\text{СЛ}} = \frac{a}{f^2} \int_0^{z_n} N(z) \beta(z) dz; \quad (14)$$

$$\delta t_{\Gamma} = \frac{aa_{\Gamma}}{f^2} \int_0^{z_n} N(z) l(z) \beta(z) dz; \quad (15)$$

$$\delta t_B = \frac{a}{f^2} \bar{N} d \sin(m\bar{l}) \Delta z \beta(\bar{z}). \quad (16)$$

В уравнениях (14)–(16) все обозначения введены выше. На рис. 2, б показана зависимость  $\delta t_{\text{СЛ}}(t)$ , (кривая 4), рассчитанная по (14), (12) при  $f = 1200$  МГц,  $z_n = 20000$  км,  $N_m = 2 \cdot 10^8$  см<sup>-3</sup>,  $z_m = 300$  км,  $v_e = 0$  с<sup>-1</sup>.

Расчеты  $\delta t_n^a$  и  $\delta f_n$  по приведенным уравнениям можно выполнить с использованием произвольной глобальной модели  $N$ .

**Определение параметров ионосферы.** Для навигационных спутников, например, «Транзит», «Навстар» высоты орбит составляют около 1000 и 20000 км. На таких высотах при расчетах  $\delta t_n$ ,  $\delta f_n$  можно пренебречь значениями  $N_n$ , распределение  $N(R)$  заменить постоянной средней величиной  $\bar{N}$ , а  $N_L$  полагать пропорциональным величине  $\bar{N}$  и длине радиолуча «ИП–ИСЗ» в ионосфере  $l_1 = (R_{\text{макс}} - R_{\text{мин}})$ , где  $R_{\text{макс}}$ ,  $R_{\text{мин}}$  — наклонные дальности до верхней  $z_{\text{макс}}$  и нижней  $z_{\text{мин}}$

границ ионосферы. В этом случае  $N_L$  аппроксимируется (конечно, достаточно грубо) простой зависимостью  $N_L = \bar{N} I_1$  (17). Здесь  $I_1 = R_3 [(\cos^2 \gamma + b_1)^{1/2} - (\cos^2 \gamma + b_2)^{1/2}]$ ;  $b_1, b_2$  определяется (6) при  $z = z_{\text{макс}}$  и  $z = z_{\text{мин}}$ . Величина  $\bar{N}$  для произвольной модели  $N(z)$  характеризуется значением  $N_m$  в области пересечения радиолуча с высотой  $z_m$ :  $\bar{N} = k(\gamma) N_m$  ( $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от  $\gamma$ ).

Согласно модели  $N$  (3)

$$N_m = N_{m\text{сл}}(1 + a_{gm} l_m + d \sin ml_m), \quad (18)$$

где  $a_{gm} = \frac{\partial N_m}{\partial l_m} \frac{1}{N_m}$  — относительный горизонтальный градиент  $N_m$  вдоль линии  $l_m$ , образованной точками пересечения радиолуча «ИП—ИСЗ» с высотой  $z_m$ ,  $N_{m\text{сл}}$  — значение  $N_m$  для сферически-слоистой ионосферы. Длина линии  $l_m$  отсчитывается от начального положения радиолуча в момент начала регистрации  $\delta t_u(t)$  или  $\delta f_u(t)$ .

С использованием (17)

$$\delta t_u(t) \simeq \frac{a}{f^2} k N_m I_1; \quad (19)$$

$$\delta f_u(t) \simeq \frac{a}{f} k \left[ N_m (I_3 v_\gamma) + \frac{\partial N_m}{\partial l_m} (I_1 I_2) \right], \quad (20)$$

$$\text{где } I_2 = R_m \left[ \frac{v_\gamma^2 (1 + b_3)}{(\cos^2 \gamma + b_3)} + v_e^2 \sin^2 \gamma \right]^{1/2},$$

$R_m, b_3$  определяются уравнением (5), (6) при  $z = z_m$ ; полагалось, что  $k(\gamma) = \text{const}$ .

Уравнение (20) получено с использованием выражения

$$\frac{dN_L}{dt} = k \left( N_m \frac{\partial I_1}{\partial t} + I_1 \frac{\partial N_m}{\partial t} \right),$$

в котором

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} \frac{\partial I_1}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dt} = I_3 v_\gamma;$$

$$\frac{\partial N_m}{\partial t} = \frac{\partial N_m}{\partial l_m} \frac{dl_m}{dt} = \frac{\partial N_m}{\partial l_m} I_2;$$

$I_2$  находится из (4) при  $z = z_m$

$$\frac{\partial N_m}{\partial l_m} = N_{m\text{сл}a_{gm}} + N_{m\text{сл}} dm \cos ml_m. \quad (21)$$

Коэффициент  $k(\gamma)$  в (19) можно получить по какой-либо модели  $N(z)$ . Для простейшей модели (12) при  $\gamma = 0$

$$k(0) = \frac{4}{3} \frac{z_m}{(z_{\text{макс}} - z_{\text{мин}})}.$$

На рис. 2, а, б показаны зависимости  $\delta t_u(t)$ ,  $\delta f_u(t)$  (кривые 1, 2), рассчитанные по (19), (20) для сферически-слоистой ионосферы (полагалось  $k(\gamma) = k(0)$ ,  $a_{gm} = 0 \text{ см}^{-1}$ ,  $d = 0$ ,  $v_e = 0 \text{ с}^{-1}$ ,  $N_m = 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$ ,  $z_m = 300 \text{ км}$ ,  $z_{\text{мин}} = 100 \text{ км}$ ,  $z_{\text{макс}} = 700 \text{ км}$ ) и по уравнениям (9), (14)

(кривая 3, 4 соответственно) с использованием параболической модели  $N(z)$  (12). На рис. 2, а значения  $\delta t_n(t)$ ,  $\delta f_n(t)$  вычислены для  $z_b = 1000$  км,  $f = 150$  МГц, а на рис. 2, б — для  $z_b = 20000$  км,  $f = 1200$  МГц.

Как видно, кривые 2, 3 на рис. 2, а, б и кривые 1, 4 на рис. 2, б удовлетворительно согласуются между собой, что подтверждает справедливость аппроксимации  $N_L$  зависимостью (17) при упрощающем условии  $k(\gamma) = k(0)$ . Поскольку в сферически-слоистой ионосфере полное электронное содержание в вертикальном столбе  $N_0$  постоянно, то  $N_L$  в ней определяется только углом  $\gamma$ , зависимость  $\delta t_n(t)$  симметрична относительно оси ординат (кривые 1), а левая и правая

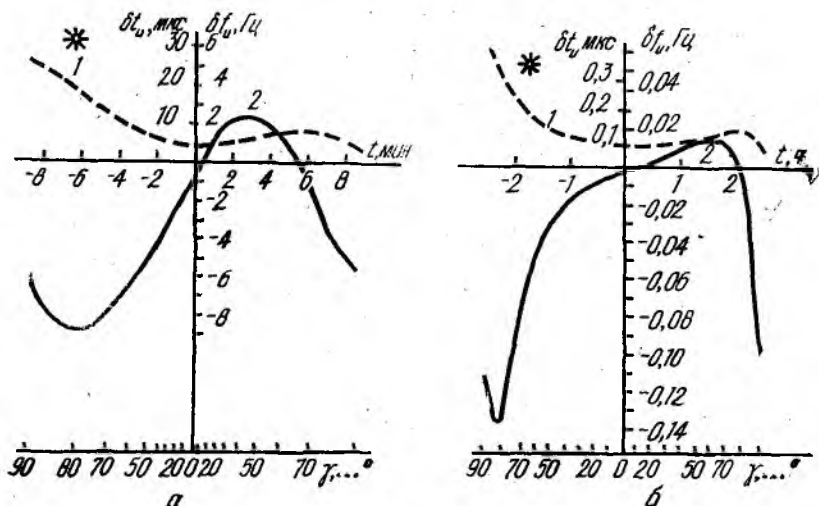


Рис. 3

ветви функции  $\delta f_n(t)$  (кривые 2) при  $\partial N_m / \partial l_m = 0$  будут отличаться только знаком, их амплитуда пропорциональна  $N_m$ , в момент траверза на радиовосходе и радиозаходе ИСЗ  $\delta f_{сл} = 0$ .

В реальной ионосфере существует горизонтальный градиент  $N_0$ , он приблизительно пропорционален косинусу зенитного угла Солнца  $\chi$ . Поэтому  $N_L$  при одних и тех же  $\gamma$ , но разных пространственных положениях радиолуча, соответствующих различным  $\chi$ , могут существенно отличаться. При горизонтальном градиенте  $\partial N_m / \partial l_m = \text{const}$  зависимости  $\delta t_n(t)$ ,  $\delta f_n(t)$  становятся несимметричными относительно оси ординат,  $\delta f_n \neq 0$  Гц, если  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi/2$  (см. рис. 3).

Пространственная гармоническая модуляция  $N_0$  или ВВ ионосферы обуславливает гармоническую модуляцию функций  $\delta t_n(t)$  и  $\delta f_n(t)$  (рис. 4).

На рис. 2—4 расчеты выполнены для низкоорбитных ( $z_b = 1000$  км,  $f = 150$  МГц) и среднеорбитных ( $z_b = 20000$  км,  $f = 1200$  МГц) навигационных ИСЗ, для случая, когда плоскость орбиты проходит через

вертикаль ИПа,  $v_e = 0 \text{ с}^{-1}$ ,  $N_m = 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$ ,  $z_m = 300 \text{ км}$ ,  $\partial N_m / \partial l_m = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-4}$ , полагалось, что волновые возмущения имели горизонтальный период  $L = 300 \text{ км}$ , относительную амплитуду  $\delta N_m / N_m = 10\%$  и располагались в бесконечно тонком слое на высоте  $z_m = 300 \text{ км}$ .

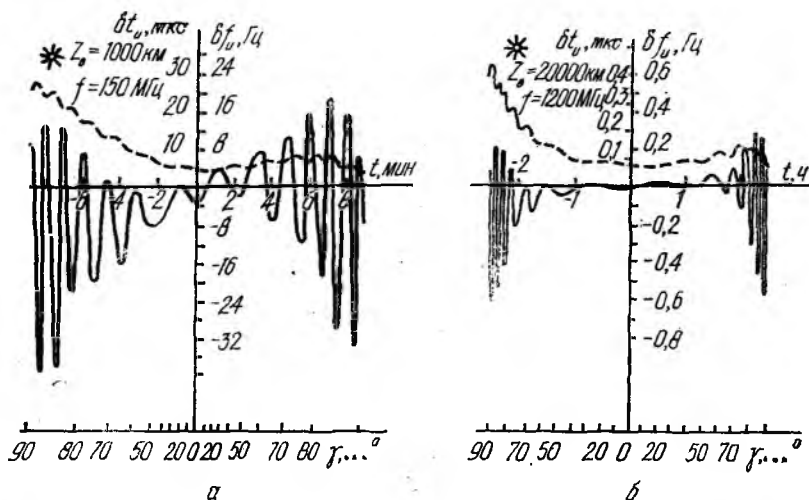


Рис. 4

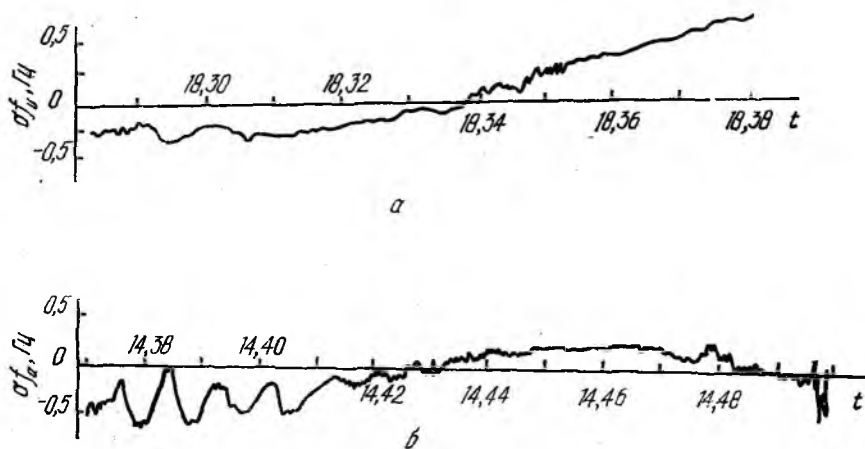


Рис. 5

Экспериментальные зависимости  $\delta f_e(t)$  для  $f \approx 150 \text{ МГц}$ ,  $z_e = 1000 \text{ км}$  приведены на рис. 5, а, б для спокойной ионосферы и при наличии в ней волновых возмущений  $N$  соответственно\*.

Предложенная упрощенная модель  $N_L$  (17) при условии  $k(\gamma) = k(0)$  позволяет описывать (см. рис. 2—4) все основные особенности экс-

\* Получены в Харькове 15.05.87 и 15.01.87.

периментальных зависимостей  $\delta f_n(t)$ . Поэтому она может быть положена в основу при оценке параметров ионосферы  $N_m$ ,  $\partial N_m / \partial l_m$ ,  $\partial N_0 / N_0$ ,  $L$  и других, применяться для компенсаций ионосферных ошибок измерений (с использованием (19), (20)) в период сбоев одного из когерентных каналов приемного устройства сигналов ИСЗ, когда их аппаратурное исключение невозможно.

Наиболее просто параметры ионосферы определяются по регистрациям  $\delta t_n(t)$ . Так, из уравнения (19) запишем

$$N_m(t) = \delta t_n(t) \frac{f^2}{\text{ак}(0) I_1} . \quad (22)$$

По этой зависимости при наличии на ней квазигармонической модуляции легко вычислить  $\delta N_m / N_m$ , а также период ВВ или их длину  $L$  вдоль  $l_m$ :

$$L = \frac{R_{\text{вв}}}{R_{\text{в}}} v T, \quad (23)$$

где  $R_{\text{вв}}$ ,  $R_{\text{в}}$  — наклонные дальности до ВВ и ИСЗ,  $v$  — полная скорость ИСЗ,  $T$  — период квазигармонических колебаний. После сглаживания проявлений ВВ на зависимости  $N_m(t)$ , например скользящим усреднением, она пригодна для оценки горизонтальных градиентов  $\partial N_m / \partial l_m$  с использованием (4).

Оценить параметры ионосферы  $N_m$ ,  $\partial N_m / \partial l_m$ ,  $L$ ,  $\partial N_m / N_m$  можно также по регистрациям  $\delta f_n(t)$ . Формула для вычисления  $L$  прежняя (23), а для оценки  $\delta N_m / N_m$  определяется из (20), (21):

$$\frac{\delta N_m}{N_m} \simeq \frac{|\delta f_n - \delta f_n \text{сгл}|_{\text{макс}} f}{\text{ак}(0) I_1 I_2 m N_m \text{сгл}}, \quad (24)$$

где  $\delta f_n \text{сгл}$  — сглаженные значения  $\delta f_n(t)$ , которые соответствуют  $\delta f_n$  в среде без ВВ;  $N_m \text{сгл}$  находится из уравнения, которое получим ниже.

Получим уравнения для оценки  $N_m \text{сгл}$  и  $\partial N_m / \partial l_m$  по значениям  $\delta f_n \text{сгл}(t)$  в двух моментах времени  $t_i$ ,  $t_{i+1}$ . Для которых (20) представим так:

$$\begin{aligned} \delta f_{n i} &= \alpha_i \frac{\partial N_{m i}}{\partial l_m} + \beta_i N_{m i}; \\ \delta f_{n i+1} &= (\alpha_{i+1} + \xi_{i+1}) \frac{\partial N_{m i}}{\partial l_m} + \beta_{i+1} N_{m i}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{где } \alpha_i = \frac{a}{f} k I_{1i} I_{2i}; \quad \beta_i = \frac{a}{f} k I_{3i} v_{\text{вв}i}; \quad \xi_{i+1} = \beta_{i+1} l_{m, i+1};$$

$l_{m, i+1}$  — длина  $l_m$  между пространственными положениями радиолучей в моменты  $i$  и  $(i+1)$ . При получении (25) предполагали, что

$$\partial N_{m i+1} / \partial l_m = \partial N_{m i} / \partial l_m.$$

Для условий, когда уравнения (25) являются линейно независимыми,

$$N_{mi} = \frac{\alpha_i \delta f_{ni} t_{i+1} - (\alpha_{i+1} + \xi_{i+1}) \delta f_{ni}}{D}; \quad (26)$$

$$\frac{\partial N_{mi}}{\partial t_m} = \frac{\delta f_{ni} \beta_{i+1} - \delta f_{ni+1} \beta_i}{D}, \quad (27)$$

где  $D = \alpha_i \beta_{i+1} - (\alpha_{i+1} + \xi_{i+1}) \beta_i$ .

В (22) — (27) следует задаваться значениями  $z_m$ ,  $z_{вв}$ , т. е. для дневных условий полагать  $z_m = z_{вв} = 300$  км.

Для регистрации  $\delta f_{ni}(t)$ , приведенной на рис. 5, а, получены значения  $N_m \simeq 4 \cdot 10^5$  см<sup>-3</sup>,  $\partial N_m / \partial t_m \simeq 1 \cdot 10^{-3}$  см<sup>-4</sup>.

Заметим, что при  $\Delta t = t_{i+1} - t_i \ll 360$  с пространственное положение радиолучей в моменты  $t_i$ ,  $t_{i+1}$  становятся настолько близкими, что ионосфера допускает плоско-слоистую аппроксимацию, при которой указанные измерения  $\delta f_{ni}$ , сгл  $t_i$  становятся линейно зависимыми. Поэтому для вычисления  $N_m$  и  $\partial N_m / \partial t_m$  рекомендуется выбирать крайние значения зависимости  $\delta f_{ni}$ , сгл  $(t)$ .

Список литературы: 1. Lawrence R. S., Pasakony D. J. A digital ray-tracing program for ionospheric research // Space Res. 1961. Vol. 2. P. 258—276. 2. Tucker A. J., Fannin B. M. Analysis of ionospheric contribution to the Doppler — shift of SW signal from artificial Earth satellites // J. Geophys. Res. 1968. Vol. 73, No 13. P. 4325—4334. 3. Волкова Л. Б., Федоренко Ю. П. Сравнение погрешностей моделей электронной концентрации ионосферы «IRI» и «Ching and Chiu» // Ионосфер. исследования. 1987. № 42. С. 55—58. 4. Федоренко Ю. П., Федоренко В. Н., Кадочников И. В. Анализ наземных измерений ионосферной составляющей доплеровского смещения частоты сигналов искусственных спутников Земли // Радиотехника. 1987. Вып. 83. С. 102—109. 5. Мисюра В. А., Солодовников Г. К., Мигунов В. М. Измерения электронной концентрации верхней ионосферы при о мощи искусственных спутников Земли «Космос» // Косм. исследования. 1965. Т. 3, вып. 4. С. 595—603.

Поступила в редколлегию 07.06.88

УДК 681.511

А. А. МОГИЛА, Г. И. ХЛОПОВ, канд. техн. наук  
В. П. ШЕСТОПАЛОВ, акад.

### ТРАЕКТОРНЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

При проведении физических экспериментов, анализе речевых сообщений [1] часто встречаются сигналы с амплитудной (АМ) и угловой модуляцией (частотной (ЧМ) или фазовой (ФМ)) в виде  $U(t) = A(t) \times \exp[j\Phi(t)]$  (1). Каждая из модулирующих составляющих  $A(t)$  и  $\Phi(t)$  несут свою полезную информацию, однако классические методы спектрального анализа [1] не всегда позволяют восстановить закон угловой модуляции и отличить ее от АМ. Например, сравнивая огибающую спектра сигнала с линейной ЧМ и с АМ по закону  $\frac{\sin at}{at}$ , нетрудно обнаружить их практически полное совпадение, что связано с потерей информации о фазе спектральных составляющих при аппаратурной

обработке сигналов, при которой обычно регистрируется только амплитудный спектр.

В некотором смысле проблема аналогична задаче восстановления пространственного оптического изображения по измерениям интенсивности поля, которая впервые решена Д. Габором, сформулировавшим принципы голографической обработки изображений. Им же предложено [1] проводить анализ сложных сигналов (1) в частотно-временной плоскости  $\omega - t$ , используя разложение  $U(t)$  в ряд по гауссовым функциям, модулирующих гармонические сигналы. Ввиду неортогональности базисных функций применение указанного разложения не нашло широкого применения, однако физические идеи, связанные с использованием  $\omega - t$  плоскости, оказались весьма плодотворными. В частности, следует отметить частотно-временное представление сигнала в виде нового интегрального преобразования Габора — Хельстрема

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt d\omega \tilde{U}(\tau, \omega) K(t, \tau, \omega), \quad (2)$$

где  $\tilde{U}(\tau, \omega)$  — функция взаимной неопределенности. Если ядро преобразования  $K(t, \omega)$  обладает свойствами импульсного отклика линейного фильтра, выражение (2) можно представить в виде

$$\tilde{U}(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt U(t) K^*(t, \tau, \omega), \quad (3)$$

причем в случае увеличения длительности отклика фильтра ядро в (2) стремится к монохроматическому сигналу  $K \rightarrow \exp(j\omega t)$ , а интегральное преобразование Габора—Хельстрема плавно переходит в известное преобразование Фурье. Однако, несмотря на высокую степень обоснованности представления (2), (3), функция-образ  $\tilde{U}$  является комплексной, в связи с чем указанный путь не привел к разработке достаточно быстрых и эффективных алгоритмов при практической обработке рассматриваемых сигналов.

Предлагается приближенный метод обработки сигналов в виде (1), суть которого — достижение разумного компромисса между простотой алгоритма и достигаемой точностью измерения параметров модуляции. Подход основан на известном свойстве [2] ЧМ-сигналов, спектр которых сосредоточен в окрестности текущего значения измеряемой частоты. Действительно, рассматривая модель сигнала в виде  $\Phi(t) = \omega_0 t + m\varphi(t)$ , где  $\omega_0$  — несущая частота;  $m$  — индекс модуляции фазы, получаем спектр

$$\tilde{U}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt A(t) \exp \left[ jm \left\{ \varphi(t) + \frac{\omega_0 - \omega}{m} t \right\} \right]. \quad (4)$$

В случае квазистационарного характера сигнала, модулирующие функции  $A(t)$ ,  $\varphi(t)$  медленно изменяются на периоде несущей частоты, что позволяет использовать метод стационарной фазы [2] для вычисления (4) при больших индексах модуляции  $m \gg 1$ . Нетрудно показать,

что основной вклад в интеграл дает лишь малая окрестность вблизи точки стационарной фазы  $\tau$ , которая находится в результате решения уравнения  $\omega = \omega_0 + m\Omega(t)$ , где мгновенное приращение частоты  $\Omega(t) = d\varphi/dt$ , что позволяет записать

$$\bar{U}_\sigma(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt G_\sigma(t, \tau) U(t) \exp(-j\omega t); \quad (5)$$

$$G_\sigma(t, \tau) = \begin{cases} 1 & |t - \tau| \leq \sigma; \\ 0 & |t - \tau| > \sigma. \end{cases} \quad (6)$$

Однако выбор временного «окна»  $G_\sigma$  прямоугольной формы (6) не обеспечивает [3] достаточную точность и разрешающую способность, в связи с чем лучше использовать «окна» в виде плавно спадающей функции с нулевой производной на краю интервала. В результате этого соотношение (5) естественным образом определяет сигнал (1) в частотно-временной области  $\omega - t$  и представляет собой кратковременный спектр сигнала, вычисленный в последовательные моменты времени. Необходимо отметить, что в теории радиолокации сигналы также рассматриваются в плоскости «частота — время», где их свойства описываются с помощью функции неопределенности [1]

$$X(\Omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dt U(t) U^*(t - \tau) \exp(j\Omega t), \quad (7)$$

которая пропорциональна отклику с выхода согласованного фильтра в зависимости от времени запаздывания и доплеровского сдвига частоты. Поэтому выражение (5) можно трактовать как взаимную функцию неопределенности (ВФН) для сигналов  $U(t)$  и  $G(t)$ , а квадрат ее модуля  $|\bar{U}_\sigma(\omega)|^2$ , как и в случае обычной функции неопределенности, следует рассматривать как уравнение поверхности, расположенной над плоскостью  $\omega - t$  и определяющей вид тела ВФН. Если традиционная функция неопределенности для сигналов, используемых в радиолокации [4], обычно сосредоточена в начале координат  $\omega, \tau = 0$ , то тело ВФН сложным образом распределено в частотно-временной плоскости, причем проекция его рельефа на плоскость  $SO\tau$  описывает амплитудную модуляцию сигнала, а траектория рельефа в плоскости  $\omega\tau$  определяется законом его частотной модуляции. Поэтому условимся называть траекторным спектральным анализом метод, позволяющий определить законы модуляции сигнала с помощью изучения его поведения в плоскости частота — время.

Для определения закона ЧМ естественно использовать информацию, содержащуюся в траектории движения энергетического центра тяжести (ЭЦТ) кратковременной спектральной плотности

$$\omega_m(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega |\bar{U}_\sigma(\omega, \tau)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\bar{U}_\sigma(\omega, \tau)|^2}, \quad (8)$$

причем в предлагаемом подходе применяются мощностные характеристики сигнала, и выражение (8) практически не зависит от закона АМ, так как длительность временного «окна» всегда существенно меньше интервала изменения модулирующих функций  $A(t)$ ,  $\Phi(t)$ .

Подробное изучение траектории движения ЭЦТ вряд ли оправдано, особенно для сигналов, содержащих случайную компоненту (помехи, шумы). Кроме того, в ряде случаев, например при анализе речевых сообщений [1], полная траектория движения ЭЦТ характеризуется значительной информационной избыточностью, что существенно затрудняет обработку сигналов даже при использовании современной вычислительной техники. Поэтому введем усредненные характеристики, которые достаточно точно описывают траекторию ЭЦТ и устойчивы по отношению к случайным воздействиям на сигнал. Такими характеристиками могут служить моменты траектории движения ЭЦТ тела ВФН:

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \omega_m^n(\tau), \quad (9)$$

информативность которых убывает с повышением порядка  $n$  [1], благодаря чему можно ограничиться вычислением небольшого количества первых моментов, имеющих простой физический смысл. В частности, среднее значение траектории движения ЭЦТ  $\bar{\omega} = M_1/M_0$ , среднеквадратичное отклонение (девиация частоты)  $\overline{\Delta\omega} = [M_2/M_0 - (M_1/M_0)^2]^{1/2}$  и т. д.

Для определения закона амплитудной модуляции, как указывалось, необходимо вычислить проекцию рельефа тела ВФН на плоскость  $SO\tau$ :

$$P(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |U_{\sigma}(\omega, \tau)|^2. \quad (10)$$

Подставляя в (10) выражение (5) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$P(\tau) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt |G_{\sigma}(t, \tau) A(t)|^2, \quad (11)$$

причем если разделить обе части равенства (11) на  $4\pi\sigma$ , то можно определить оценку закона АМ в виде средневзвешенного квадрата

$$A(\tau) = \left\{ \frac{1}{2\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dt |G_{\sigma}(t, \tau) A(t)|^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |U_{\sigma}(\omega, \tau)|^2 \right\}^{1/2}. \quad (12)$$

Как видно, выражение (12) не зависит от угловой модуляции сигнала и в случае прямоугольного временного «окна» записывается особенно просто:

$$\hat{A}(\tau) = \left\{ \frac{1}{2\sigma} \int_{\tau-\sigma}^{\tau+\sigma} dt |A(t)|^2 \right\}^{1/2}, \quad (13)$$

определяя таким образом, среднеквадратичное значение амплитуды на интервале длительности «окна»  $2\sigma$ . При этом физически очевидно, что точность отображения закона модуляции рельефом тела ВФН зависит от длительности  $\sigma$  и от скорости изменения частоты  $d^2\varphi/dt^2$ . Действительно, разлагая  $\varphi(t)$  в степенной ряд и ограничиваясь в (4) первыми слагаемыми, вычисляем выражение для тела ВФН:

$$|\bar{U}_\sigma(\omega, \tau)|^2 = |U_0|^2 \{ [C(x) - C(x - x_0)]^2 + [S(x) - S(x - x_0)]^2 \}, \quad (14)$$

где  $C(x)$  и  $S(x)$  интегралы Френеля [5],  $x = (\omega - \varphi') (2|\varphi''|)^{-1/2}$ ,  $x_0 = \sigma \left( \frac{1}{2} |\varphi''| \right)^{1/2}$ .

На рис. 1 приведена рассчитанная зависимость относительной ширины тела ВФН  $\Delta x_0 = \Delta\omega_0 (2|\varphi''|)^{1/2}$  от нормированной ширины временного «окна»  $x_0$ . При увеличении длительности  $\sigma$  ширина спектра возрастает в результате свиппирования частоты в пределах «окна», а в случае малых значений  $\sigma$ , когда изменением частоты можно пренебречь, спектральная плотность практически совпадает со спектром радиоимпульса с постоянной частотой заполнения, а его ширина возрастает пропорционально  $\sigma^{-1}$ . В результате выбор слишком узкого «окна» приводит к расширению спектра, что не менее опасно как и в случае широкого «окна», особенно при большой девиации

частоты, когда заметная доля энергии спектра попадает в область отрицательных частот и структура рельефа ВФН дополнительно искажается. Поэтому параметры системы обработки должны обеспечивать выполнение неравенства  $\Delta\omega_0 \ll \omega_m(\tau)$ , что было бы просто для постоянной скорости изменения частоты  $d\omega/dt$ . Однако для реальных сигналов производная от частоты изменяется в широких пределах  $0 \leq \omega' \leq \omega_m$ , в связи с чем выбор нормированной ширины «окна» целесообразно проводить по среднему значению, которое можно определить на основании неравенства Бернштейна [6], сформулированного в классе целых функций. Так как в рассматриваемом случае вариация частоты исследуемых сигналов ограничена  $|\omega(t)| \leq \omega_{\text{макс}}$  на всем интервале изменения, а спектр  $\omega(t)$  сосредоточен в полосе пропускания радиотехнического тракта  $\Omega_m$ , то применение указанного неравенства приводит к простой оценке

$$\left| \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{макс}} = \omega_m \leq \Omega_m \omega_{\text{макс}}. \quad (15)$$

Укажем еще один источник погрешности определения закона ЧМ исследуемого сигнала, связанный с конечностью его времени реализации  $T_n$ , в результате чего вместо точного значения моментов соотно-

шение (9) дает только их оценку  $\hat{M}_n$ . Следовательно, параметры системы обработки — длительность временного «окна», расстояние между отсчетами  $\Delta\tau = \tau_{k+1} - \tau_k$  и интервал наблюдения  $T_n$  должны выбираться с учетом уменьшения погрешности определения параметров траектории движения ЭЦТ тела ВФН в плоскости  $\omega - t$ .

Рассмотрим влияние указанных параметров на точность определения закона ЧМ для сигнала (1) с угловой модуляцией по гармоническому закону  $\Phi(t) = \omega_0 t + m \sin \Omega t$ ,  $m = \Delta\omega/\Omega$ , где  $\Delta\omega$  — девиация частоты;  $\Omega$  — модулирующая частота. Для такого сигнала среднее значение равно

$\bar{\omega} = \omega_0$ , среднеквадратичное отклонение  $\delta_{\Delta\omega} = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2}}$  и максимальная

скорость изменения мгновенной частоты совпадает с верхней границей неравенства Бернштейна  $|\dot{\omega}_m| = \Delta\omega\Omega$ .

Обработка сигналов проводилась с использованием ЭВМ типа БЭСМ-6 в два этапа: осуществлялось вычисление ЭЦТ для простейшего прямоугольного «окна» и смежных отсчетов  $\tau_{k+1} - \tau_k = \sigma$ , а затем считывались три начальных момента (9) траектории ЭЦТ

$$M_n = \sigma \sum_{k=0}^{N-1} \tau_k^n \omega_m(\tau_k), \quad (16)$$

где  $N = [T_n/\sigma]$ ,  $n = 0; 1; 2$ . Полученные данные использованы для вычисления среднего значения мгновенной частоты  $\bar{\omega}$ , среднеквадратичной девиации  $\hat{\Delta\omega}$ , а также средней модулирующей частоты  $\hat{\Omega}$ , которая определялась как ЭЦТ вторичного спектра  $\bar{W}(\Omega)$  для траекторий рельефа тела ВФН:

$$\hat{\Omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \Omega |\bar{W}(\Omega)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega |\bar{W}(\Omega)|^2}; \quad (17)$$

$$\bar{W}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \omega_m(\tau) \exp(-j\Omega\tau). \quad (18)$$

Данные вычислений сравнивались с известными характеристиками сигнала  $\bar{\omega}$ ,  $\delta_{\Delta\omega}$  и  $\Omega$ , а зависимости модуля относительной ошибки вычислений  $\Delta_x = |(\hat{x} - x_0)/x_0|$  приведены на рис. 2, где  $\hat{x}$  — оценка параметра  $x$ , точное значение которого равно  $x_0$ . Изменение длительности обрабатываемой реализации  $T_n$  в первую очередь сказывается на точности вычислений модулирующей частоты  $\Omega$  (рис. 2 а, кривые 1, 2, 3 соответствуют величинам  $\Delta_\Omega$ ,  $\Delta_{\omega_0}$ , и  $\Delta_{\Delta\omega}$ ,  $x_0 = 2$ ), для измерений которой с точностью, не ниже 5% необходимо выполнение условия  $T_n \Omega \geq 15$ . Поскольку частота  $\Omega$  — наиболее низкочастотный параметр, то для его измерения требуется соответственно наибольшее время, которое в нашем случае должно составлять не менее трех периодов модулирующей частоты.

Для относительно небольших значений девиации частоты  $\Delta\omega/\omega_0 = 0,16$  вариация длительности временного «окна»  $\kappa_0$  мало сказывается на точности вычисления измеряемых величин (рис. 2, б,  $T_H\Omega = 20$ ),

несмотря на изменение скорости перестройки частоты в широких пределах  $0 \leq \omega \leq \Delta\omega\Omega$ .

В то же время, при увеличении девиации частоты (рис. 2, в,  $\Delta\omega/\omega_0 = 0,71$ ;  $T_H\Omega = 20$ ) наиболее быстро возрастает ошибка вычисления средней частоты  $\Delta\omega_0$  (кривая 2), что является следствием сглаживания быстрых изменений мгновенной частоты при большой длительности «окна»  $\kappa_0 \gg 1$ . Поэтому траектория движения ЭЦТ (рис. 3, кривая 1) заметно отличается от точной зависимости  $(\omega - \omega_0)/\Delta\omega = \cos\Omega t$  (кривая 3). Заметим, что ассиметричный характер искажений, особенно в точках перегиба кривой, где производная мгновенной частоты меняет знак. Кроме того, при большой девиации частоты начинают сказываться искажения рельефа тела ВФН, связанные с расширением спектра при малой длительности временного «окна»  $\kappa_0 \leq 0,1$  в моменты времени, когда мгновенная частота достигает своего минимума. Искажения рельефа соответствуют траектории движения ЭЦТ, показанной на рис. 3, кривая 2, что в результате приводит к увеличению ошибок вычисления измеряемых величин (рис. 2, в) в области малых длительностей временного «окна».

Если же длительность «окна» выбрать из условия  $\kappa_0 = 0,5$ , то можно обеспечить достаточно высокое соответствие рельефа тела

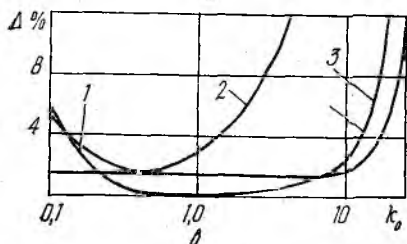
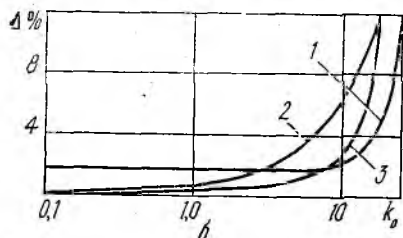
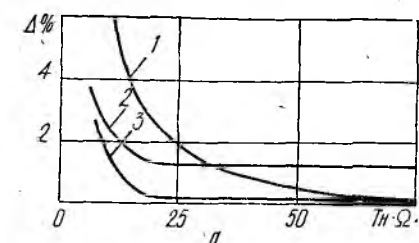


Рис. 2

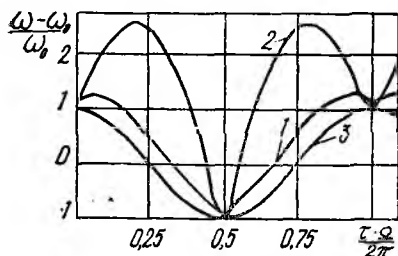


Рис. 3

ВФН и закона ЧМ исследуемого сигнала, приемлемое для решения практических задач (рис. 2, в).

Рамки работы не позволяют привести результаты анализа точности вычисления параметров АМ, которая, как и в предыдущем случае ЧМ, определяется длительностью «окна» и значением производной  $dA/dt$ , а численные оценки имеют тот же порядок (рис. 2).

Таким образом, показано, что траекторный спектральный анализ позволяет с приемлемой для практики точностью определять параметры сигналов с АМ и ЧМ одновременно. При этом предложено использовать моменты траектории движения энергетического центра тяжести спектральной плотности в плоскости частота — время в качестве параметров модуляции сигналов. Максимальная точность вычисления параметров модуляции соответствует выполнению ограничений на время реализации исследуемых сигналов  $T_n \geq 3T_{\Sigma}$  и длительность временного «окна»  $\sigma = (\Omega_m \Delta\omega^{\text{макс}})^{-1/2}$ , где  $T_{\Sigma}$  — период модулирующей частоты,  $\Omega_m$  — ширина полосы спектра сигнала,  $\Delta\omega^{\text{макс}}$  — максимальная девиация частоты ЧМ.

**Список литературы:** 1. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. В 2-х т. М., 1983. Т. 1. 312 с. 2. Вакман Д. Е. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. М., 1962. 243 с. 3. Красненко Н. П., Федоров В. А. Применение временных и корреляционных окон для оценивания параметров спектральной плотности стационарного случайного процесса // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1985. Т. 28, № 7. С. 79—82. 4. Вакман Д. Е., Седлецкий Р. М. Вопросы анализа радиолокационных сигналов. М., 1973. 312 с. 5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Р. Специальные функции. М., 1968. 340 с. 6. Ахиевер Н. И. Лекции по теории аппроксимаций. М., 1965. 332 с.

Поступила в редколлегию 21.03.88

УДК 621.396

А. Ф. МАСЛОВ, д-р техн. наук, К. П. НЕСТЕРОВ, А. Б. ЖОЛОБЕНКО

### МОДЕЛЬ ВЗАИМНО КОРРЕЛИРОВАННЫХ РАДИОСИГНАЛОВ НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ, РАБОТАЮЩЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

При проведении исследований методом математического моделирования по оцениванию качества обнаружения и разделения сигналов, измерения амплитудно-фазовых распределений на выходах элементов антенной решетки (АР) возникает необходимость в сравнении алгоритмов адаптации в условиях одинакового влияния среды распространения радиоволн. Поэтому актуально моделирование радиосигналов с заданными статистическими характеристиками.

Предлагаемый способ моделирования случайных векторов в рамках корреляционной теории основывается на разложении случайных процессов в ряды по ортогональным дискретным многочленам Чебышева со случайными коэффициентами с последующим применением метода линейного преобразования. Он позволяет в процессе подготовительных вычислений уменьшить размерность системы нелинейных алгебраических уравнений по сравнению с [1], а также сократить число исходных независимых белых шумов в случае коррелированности волновых фронтов радиосигналов.

Рассмотрим линейную АР, содержащую  $R + 1$  эквидистантно расположенных элементов, на выходах которых моделируется векторный процесс  $\vec{y}(t)$  с компонентами

$$y(\alpha, t) = \sum_{i=1}^L S_i(\alpha, t) + \xi(\alpha, t), \quad (1)$$

где  $S_i(\alpha, t)$  —  $i$ -й случайный радиосигнал,

$$S_i(\alpha, t) = X_i(\alpha, t) \cos(\Omega_i t + U_i(\alpha, t));$$

$\alpha$  — номер элемента АР,  $\alpha = 0, \overline{R}$ ;  $\xi(\alpha, t)$  — мешающее воздействие типа белый шум с характеристиками  $\langle \xi(\alpha, t) \rangle = 0$ ,

$$\langle \xi(\alpha, t_1) \xi(\beta, t_2) \rangle = \frac{1}{2} N_0 \delta(\alpha - \beta) \delta(t_2 - t_1);$$

$N_0$  — спектральная плотность шумов в элементах АР. Параметры  $\Omega_i$  — несущие частоты сигналов, полагаем известными. Отличие истинных значений частот упомянутых сигналов от  $\Omega_i$ , причины появления которых достаточно подробно описаны в работе [2], будут учтены посредством введения случайных процессов  $\omega_i(t)$ . Угловые скобки означают операцию статистического усреднения.

Пусть флюктуации амплитуд и фаз сигналов моделируются некоторыми случайными процессами  $f_i(\alpha, t)$  и  $\varphi_i(\alpha, t)$  так, что

$$X_i(\alpha, t) = A_i (1 + m_i^A f_i(\alpha, t)), \quad A_i = \langle X_i(\alpha, t) \rangle;$$

$$U_i(\alpha, t) = \left( \alpha - \frac{R}{2} \right) u_i + \varphi_i(\alpha, t) + \varphi_i^*(t);$$

$$\langle U_i(\alpha, t) \rangle = \left( \alpha - \frac{R}{2} \right) u_i. \quad (2)$$

Здесь  $m_i^A$  — постоянные коэффициенты,  $\varphi_i^*(t)$  — общее для всех элементов АР изменение фазы, вызванное нестабильностью частот генераторов опорных сигналов и изменением во времени коэффициента преломления среды,  $A_i, u_i$  — неизвестные, постоянные на интервале наблюдения амплитуда и направление прихода волнового фронта,  $i = \overline{1, L}$ .

Выполнение неравенств  $1 > 3 m_i^A \sigma_i(\alpha)$ , где  $\sigma_i(\alpha)$  — среднеквадратическое отклонение случайного процесса  $f_i(\alpha, t)$ , обеспечивает пренебрежимо малую вероятность амплитудной перемодуляции. Случайные функции  $f_i(\alpha, t)$ ,  $\varphi_i(\alpha, t)$ ,  $\varphi_i^*(t)$  полагаем гауссовскими марковскими процессами, заданными следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_i(\alpha, t) &= -h_i^f f_i(\alpha, t) + n_i^f(\alpha, t); \\ \frac{d}{dt} \varphi_i(\alpha, t) &= -h_i^\varphi \varphi_i(\alpha, t) + n_i^\varphi(\alpha, t); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi_i^*(t) = h_i^* \omega_i(t) + n_i^*(t);$$

$$\frac{d}{dt} \omega_i(t) = -h_i^\omega \omega_i(t) + n_i^\omega(t). \quad (4)$$

Здесь  $n_i^f(\alpha, t)$ ,  $n_i^\varphi(\alpha, t)$ ,  $n_i^*(t)$ ,  $n_i^\omega(t)$  — представляют собой формирующие белые шумы с нулевыми средними и корреляционными функциями:

$$\begin{aligned} \langle n_i^f(\alpha, t_1) n_k^f(\beta, t_2) \rangle &= \frac{1}{2} r_{ik}^f(\alpha, \beta) \sqrt{N_i^f N_k^f} \delta(t_2 - t_1); \\ \langle n_i^\varphi(\alpha, t_1) n_k^\varphi(\beta, t_2) \rangle &= \frac{1}{2} r_{ik}^\varphi(\alpha, \beta) \sqrt{N_i^\varphi N_k^\varphi} \delta(t_2 - t_1); \\ \langle n_i^\omega(t_1) n_k^\omega(t_2) \rangle &= \frac{1}{2} r_{ik}^\omega \sqrt{N_i^\omega N_k^\omega} \delta(t_2 - t_1); \\ \langle n_i^*(t_1) n_k^*(t_2) \rangle &= \frac{1}{2} N_i^* \delta(t_2 - t_1), \quad i, k = \overline{1, L}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $r_{ik}^f(\alpha, \beta)$ ,  $r_{ik}^\varphi(\alpha, \beta)$ ,  $r_{ik}^\omega$  — коэффициенты корреляций амплитуд, фаз и частот соответственно,  $r_{ik}^{(\cdot)} < 1$ ,  $r_{ik}^{(\cdot)} = 1$  при  $\alpha = \beta$  и  $i = k$ ;  $N_i^{(\cdot)}$  — спектральные плотности формирующих шумов. В выражениях (5) и (6) флюктуации амплитуд, фаз и частот выбраны некоррелированными между собой. Из уравнений (3) видно, что для формирования  $L$  фазовых фронтов с заданными законами флюктуаций фаз в элементах АР требуется  $L(R+1)$  взаимно коррелированных белых шумов. Их можно получить из  $L(R+1)$  независимых белых шумов путем линейного преобразования [1], элементы матрицы которого находятся в результате решения системы нелинейных алгебраических уравнений порядка  $C_L^2 ((R+1)^2 + (R+1)(R+2))$  ( $C_L^2$  — биномиальный коэффициент).

Полагаем, что случайные функции  $f_i(\alpha, t)$ ,  $\varphi_i(\alpha, t)$  для любого момента времени могут с достаточной точностью аппроксимироваться на конечной системе точек рядом ортогональных многочленов Чебышева  $P_j(\alpha)$  [3] со случайными коэффициентами, причем в разложениях можно ограничиться числом слагаемых  $M_i$ ,  $N_i$  соответственно:

$$\begin{aligned} f_i(\alpha, t) &\approx \sum_{j=0}^{M_i} \rho_j^f(t) P_j(\alpha); \\ \varphi_i(\alpha, t) &\approx \sum_{j=0}^{N_i} \psi_j^\varphi(t) P_j(\alpha), \quad M_i, N_i \leq R. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив в (3) (7), умножим правые и левые части уравнений на  $P_j(\alpha)$ . Просуммировав по  $\alpha$  и воспользовавшись свойствами ортонормированных полиномов, получим модель для коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_j^f(t) &= -h_j^f \rho_j^f(t) + n_j^{\rho f}(t); \\ \frac{d}{dt} \psi_m^\varphi(t) &= -h_m^\varphi \psi_m^\varphi(t) + n_m^{\psi \varphi}(t); \\ n_j^{\rho f}(t) &= \sum_{\alpha=0}^R n_i^f(\alpha, t) P_j(\alpha); \\ n_m^{\psi \varphi}(t) &= \sum_{\alpha=0}^R n_i^\varphi(\alpha, t) P_m(\alpha), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $n_i^{p_i}(t)$ ,  $n_m^{\psi_i}(t)$  — нормальные белые шумы с нулевыми средними и корреляционными функциями

$$\langle n_i^{p_i}(t_1) n_m^{p_k}(t_2) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{N_i^p N_k^p} \delta(t_2 - t_1) \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{ik}^p(\alpha, \beta) P_j(\alpha) P_m(\beta);$$

$$\langle n_i^{\psi_i}(t_1) n_m^{\psi_k}(t_2) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{N_i^\psi N_k^\psi} \delta(t_2 - t_1) \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{ik}^\psi(\alpha, \beta) P_j(\alpha) P_m(\beta). \quad (10)$$

Таким образом, в данной постановке задача моделирования амплитуд и фаз радиосигналов на выходах элементов АР сведена к задаче моделирования коэффициентов разложения, причем число их не превышает количества требуемых значений амплитуд и фаз.

Если  $M_i = N_i = R$ , аппроксимации (7) будут точными при любом наборе полиномов  $P_j(\alpha)$ . Степень приближения зависит от статистики флюктуаций амплитуд и фаз в волновом фронте и числа элементов АР. Не уменьшая общности, проведем анализ ошибки аппроксимации фазы одного из сигналов в элементах АР. Опустим индекс номера сигнала в выражениях, следующих ниже. Тогда ошибка аппроксимации фазы произвольного сигнала в элементе с номером  $\alpha$  запишется в виде  $\Delta\varphi(\alpha, t) = \varphi(\alpha, t) - \varphi_N(\alpha, t)$ , где

$$\varphi(\alpha, t) = \sum_{j=0}^R \psi_j(t) P_j(\alpha); \quad \varphi_N(\alpha, t) = \sum_{j=0}^N \psi_j(t) P_j(\alpha).$$

Поэтому

$$\Delta\varphi(\alpha, t) = \sum_{j=N+1}^R \psi_j(t) P_j(\alpha).$$

Отсюда следует, что среднее значение ошибки аппроксимации равно нулю, а дисперсия определяется выражением

$$\begin{aligned} \langle (\Delta\varphi(\alpha, t))^2 \rangle &= \left\langle \sum_{i=N+1}^R \psi_i(t) P_i(\alpha) \sum_{j=N+1}^N \psi_j(t) P_j(\alpha) \right\rangle = \\ &= \sum_{i, j=N+1}^R D_{ij}^\psi P_i(\alpha) P_j(\alpha), \end{aligned} \quad (11)$$

в котором  $D_{ij}^\psi$  — элемент дисперсионной матрицы коэффициентов разложения,  $D_{ij}^\psi = \langle \psi_i(t) \psi_j(t) \rangle$ .

Усредняя дисперсии ошибок по всем элементам АР и используя свойства ортонормированности полиномов, получаем

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{R} \sum_{\alpha=0}^R \langle (\Delta\varphi(\alpha, t))^2 \rangle = \frac{1}{R} \sum_{j=N+1}^R D_{jj}^\psi. \quad (12)$$

Так как

$$\psi_j(t) = \sum_{\alpha=0}^R \varphi(\alpha, t) P_j(\alpha),$$

то

$$D_{ij}^{\psi} = \left\langle \sum_{\alpha=0}^R \varphi(\alpha, t) P_i(\alpha) \sum_{\beta=0}^R \varphi(\beta, t) P_j(\beta) \right\rangle = \\ = \sum_{\alpha, \beta=0}^R K(\alpha, \beta) P_i(\alpha) P_j(\beta), \quad (13)$$

где  $\|K(\alpha, \beta)\|$  — корреляционная матрица фазового фронта волны,  $K(\alpha, \beta) = \sigma_{\varphi}^2(\alpha) r(\alpha, \beta)$ ;  $\sigma_{\varphi}^2(\alpha)$  — дисперсия флюктуаций фазы в элементе с номером  $\alpha$ ,  $r(\alpha, \beta)$  — элементы корреляционной матрицы,

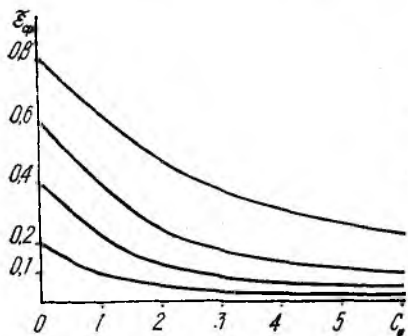


Рис. 1

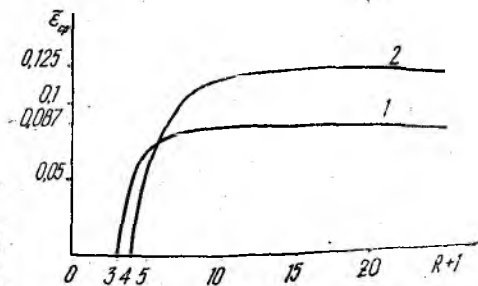


Рис. 2

нормированные относительно  $\sigma_{\varphi}^2(\alpha)$ . Подставляя в (12) выражение для  $D_{ij}^{\psi}$ , имеем

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{R} \sum_{j=N+1}^R \sum_{\alpha, \beta=0}^R \sigma_{\varphi}^2(\alpha) r(\alpha, \beta) P_j(\alpha) P_j(\beta).$$

Если дисперсии флюктуаций фазы в элементах АР равны, то выражение для относительной средней дисперсии ошибки аппроксимации приобретает вид

$$\bar{\varepsilon}_{\text{ср}} = \frac{r_{\text{ср}}}{\sigma_{\varphi}^2} = \frac{1}{R} \sum_{j=N+1}^R \sum_{\alpha, \beta=0}^R r(\alpha, \beta) P_j(\alpha) P_j(\beta). \quad (14)$$

Пусть  $r(\alpha, \beta) = \exp(-|\alpha - \beta|/c_{\varphi})$ , где  $c_{\varphi}$  — относительный радиус корреляции фазового фронта,  $c_{\varphi} = r_{\varphi}/d$ ;  $r_{\varphi}$  — радиус корреляции фазового фронта,  $d$  — расстояние между элементами АР.

Были получены зависимости  $\bar{\varepsilon}_{\text{ср}}$  от числа членов разложения фазы в ряд при различных значениях радиуса корреляции фазового фронта для АР, состоящей из пяти элементов рис. 1. Анализ кривых показывает, что при радиусе корреляции фазового фронта не меньше половины линейного размера антенны рассмотренная аппроксимация фазового фронта в дискретных точках дает приемлемую точность с учетом четырех составляющих из пяти. При радиусе корреляции, большем длины апертуры, можно ограничиться тремя членами разложения. В этих слу-

чаях дисперсия ошибки аппроксимации фазы составляет около 6—7 % от дисперсии флюктуаций фазового фронта.

На рис. 2 приведены графики зависимости относительной дисперсии ошибки аппроксимации от числа элементов АР при фиксированных линейных размерах апертуры и постоянном количестве составляющих в разложении фазы. Кривая 1 соответствует радиусу корреляции фазового фронта, равному длине апертуры при трех членах разложения, кривая 2 — радиусу корреляции, равному половине длины АР при четырех составляющих. Из графиков видно, что с увеличением числа элементов решетки на заданной апертуре относительная дисперсия

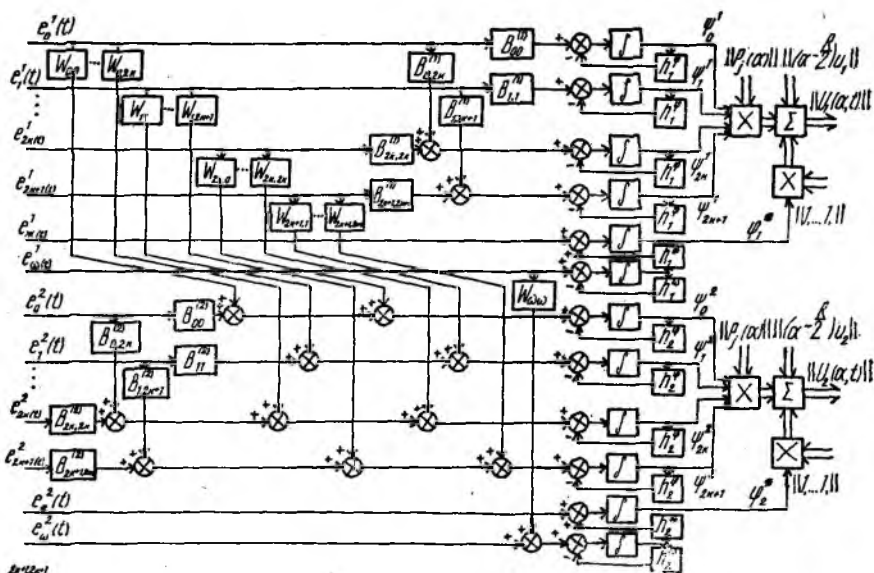


Рис. 3

ошибки аппроксимации фазового фронта незначительно растет, асимптотически приближаясь к своему пределу. Корреляционной матрице фазового фронта, согласно (13), соответствует дисперсионная матрица коэффициентов разложения. Выбирая необходимые значения  $D_{ij}^{\phi}$ , можно формировать случайные процессы  $\phi(\alpha, t)$  с требуемыми статистическими характеристиками. На рис. 3 показана структурная схема для моделирования двух коррелированных между собой фазовых фронтов, на вход которой подаются независимые белые шумы  $e_i^{(\cdot)}(t)$  с нулевыми средними и одинаковыми спектральными плотностями. С помощью коэффициентов  $B_{ij}^{(\cdot)}$ ,  $W_{ij}$  устанавливаются необходимые корреляционные связи между формируемыми фазовыми фронтами. При вычислении  $D_{ij}^{\phi}$  было установлено, что четные и нечетные коэффициенты разложения между собой некоррелированы:  $\langle \psi_{2l}(t) \times \psi_{2l+1}(t) \rangle = 0$  (15). Поэтому на схеме опущены связи между четными

и нечетными компонентами векторного белого шума. На выходах низкочастотных фильтров имеем коэффициенты разложения  $\psi_j^{(\cdot)}(t)$ , умножив которые на значения полиномов в точках расположения элементов АР и выполнив суммирование, получим фазовые флюктуации с требуемыми статистическими характеристиками. Значения  $B_{ij}^{(\cdot)}$ ,  $W_{ij}$  вычисляются заранее путем решения системы нелинейных алгебраических уравнений, записываемой по схеме рис. 3 с использованием соотношений (10), (15):

$$\sum_{i=0}^j B_{2i+1,2j+1}^{(1)} B_{2i+1,2k+1}^{(1)} = \frac{1}{2} N_1^\Phi \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{11}^\Phi(\alpha, \beta) P_{2j+1}(\alpha) P_{2k+1}(\beta), \quad j < k;$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^j B_{2i+1,2j+1}^{(2)} B_{2i+1,2k+1}^{(2)} + \sum_{n=0}^{E\left(\frac{N-1}{2}\right)} W_{2n+1,2j+1} W_{2n+1,2k+1} = \\ = \frac{1}{2} N_2^\Phi \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{22}^\Phi(\alpha, \beta) P_{2j+1}(\alpha) P_{2k+1}(\beta), \quad j < k; \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^j B_{2i+1,2j+1}^{(1)} W_{2i+1,2k+1} = \frac{1}{2} \sqrt{N_1^\Phi N_2^\Phi} \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{12}^\Phi(\alpha, \beta) P_{2j+1}(\alpha) P_{2k+1}(\beta),$$

$$j, k = 0, 1, \dots, E\left(\frac{N-1}{2}\right);$$

$$\sum_{i=0}^j B_{2i,2j}^{(1)} B_{2i,2k}^{(1)} = \frac{1}{2} N_1^\Phi \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{11}^\Phi(\alpha, \beta) P_{2j}(\alpha) P_{2k}(\beta), \quad j < k;$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^j B_{2i,2j}^{(2)} B_{2i,2k}^{(2)} + \sum_{n=0}^{E\left(\frac{N}{2}\right)} W_{2n,2j} W_{2n,2k} = \\ = \frac{1}{2} N_2^\Phi \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{22}^\Phi(\alpha, \beta) P_{2j}(\alpha) P_{2k}(\beta), \quad j < k; \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^j B_{2i,2j}^{(1)} W_{2i,2k} = \frac{1}{2} \sqrt{N_1^\Phi N_2^\Phi} \sum_{\alpha, \beta=0}^R r_{12}^\Phi(\alpha, \beta) P_{2j}(\alpha) P_{2k}(\beta),$$

$$j, k = 0, 1, \dots, E\left(\frac{N}{2}\right).$$

Здесь  $E(G)$  — целая часть выражения  $G$ .

Благодаря (15) число уравнений в этой системе почти в два раза меньше, чем в аналогичной системе для фазовых соотношений. Кроме того, при больших радиусах корреляции фазовых фронтов, когда можно ограничиться несколькими членами разложения, размерность данной системы становится еще меньше. Например, для формирования взаимно коррелированных флюктуаций фаз двух источников радио-

сигналов в пятиэлементной АР с радиусом корреляции, соизмеримым с длиной апертуры, методом линейного преобразования требуется решение системы, состоящей из 55 нелинейных алгебраических уравнений, в то время как система (15) содержит только 13 уравнений. Для АР с большим числом элементов выигрыш увеличивается.

Предлагаемый метод позволяет с помощью моделирования небольшого числа случайных коэффициентов с достаточной точностью формировать взаимно коррелированные волновые фронты с требуемыми статистическими характеристиками на выходах многоэлементных АР. Приведенные методика и схему использовали при цифровом моделировании оптимальных адаптивных алгоритмов разрешения, обнаружения, измерения в многоцелевой ситуации при наличии неоднородной среды распространения радиоволн, а также была разработана схема имитатора радиосигналов, отвечающего схеме на рис. 3, и изготовлен действующий макет.

**Список литературы:** 1. *Быков В. В.* Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М., 1971. 328 с. 2. *Маслов А. Ф., Нестеров К. П.* Квазиоптимальный алгоритм измерения амплитуд и фаз сигналов на выходах элементов приемной антенной решетки, работающей в неоднородной среде // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 3. С. 491—500. 3. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М., 1979, 416 с.

*Поступила в редколлегию 21.12.87*

УДК 621.371

*А. Г. КРАВЧЕНКО, канд. техн. наук, О. К. ШКУРУПИИ*

### **ОСОБЕННОСТИ ПРИЕМА АНТЕННЫМИ СИСТЕМАМИ СНИЖАЮЩЕГОСЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА СИГНАЛОВ ОТ ПОСАДОЧНЫХ РАДИОМАЯЧНЫХ СИСТЕМ**

К достоверности информации, принимаемой бортовой аппаратурой летательных аппаратов от радиомаячных систем посадки дециметрового диапазона волн на заключительном этапе захода на посадку предъявляются все более высокие требования. Ряд работ посвящен исследованию влияния рельефа земной поверхности и помех от пролетающих самолетов на искажения линии курса и глиссады. В статье исследуется влияние переотражений сигналов глиссадных радиомаяков от корпуса летательного аппарата (ЛА) на траекторию его снижения на конечном этапе захода на посадку. Рассматриваются дифракция электромагнитной волны, излучаемой посадочным радиомаяком, на снижающемся ЛА и анализ спектра сигнала, принятого антенной бортового приемника, с учетом как влияния подстилающей поверхности, так и динамической ситуации, которая возникает при посадке ЛА. Особенности решения задачи следующие: достаточно сложная адекватная модель летательного аппарата; учет влияния конечных физических свойств подстилающей поверхности; учет многократных переотражений волн на трассе источник излучения — ЛА — подстилающая поверхность — ЛА и т. п.

Поскольку ЛА снижается при посадке с вертикальной скоростью  $v_{\text{верт}}$ , возникают доплеровские смещения частоты сигналов, принимаемых антенной бортового приемника. Из-за различия доплеровского смещения частоты полезного и переотраженного сигналов появляются дополнительные искривления линии глиссады, обусловленные биениями разностей доплеровской частоты с гармониками частоты коммутации.

Моделируем ЛА идеально проводящими полусферой радиуса  $R$  (носовая часть ЛА), цилиндром радиуса  $R$  (фюзеляж ЛА), двумя прямоугольными пластинами со сторонами  $a, b/2$  (несущие плоскости ЛА).

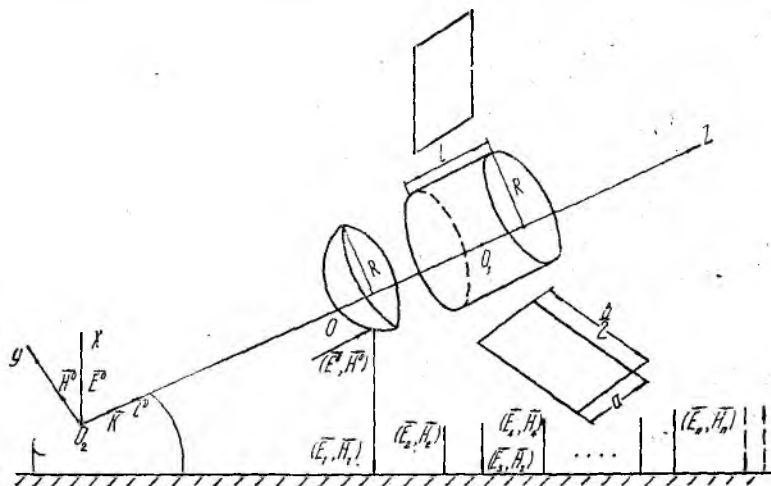


Рис. 1

На рис. 1 представлены лучевая структура дифракционной задачи и схематическое изображение модели ЛА, связанное с декартовой системой координат  $(X, Y, Z)$ . Ось  $OZ$  совпадает с осью ЛА, а ее орт сонаправлен с волновым вектором  $\vec{k}$  падающей волны. Ось  $OX$  соответствует горизонтальному направлению, а ее орт сонаправлен вектору  $\vec{E}^0$  падающей волны (горизонтальная поляризация первичной волны).

Поскольку ЛА приближается к источнику излучения с указанной выше вертикальной скоростью  $v_{\text{верт}}$ , легко получить частотную структуру принимаемых на борту сигналов (с учетом переотражений) [1]:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_0 \left( 1 + \frac{v_{\text{накл}}}{c} \right); \\
 f_2 &= f_0 \left( 1 + \frac{v_{\text{накл}}}{c} + \frac{2v_{\text{верт}}}{c} \right); \\
 f_3 &= f_0 \left( 1 + \frac{v_{\text{накл}}}{c} + 2 \frac{2v_{\text{верт}}}{c} \right); \\
 \hline
 f_n &= f_0 \left( 1 + \frac{v_{\text{накл}}}{c} + (n-1) \frac{2v_{\text{верт}}}{c} \right),
 \end{aligned}$$

где  $f_0$  — частота первичной волны, а  $v_{\text{верт}}$  — значение вертикальной скорости ЛА. Задача состоит в получении оценок интенсивностей электромагнитных волн, принимаемых бортовой антенной на частотах  $f_1, f_2, f_3, \dots$ . Сложность решения обусловлена не только тем, что точный расчет поля, дифрагированного самолетом, является практически невозможным. Интенсивность отраженного от ЛА сигнала к тому же существенно зависит от длины волны, ракурса и вида поляризации. Серьезные затруднения вызывает и радиофизическое описание подстилающей поверхности. Нами выбрана так называемая отражательная трактовка [2] при расчете поля, отраженного от земли.

Поле в антенне приемника ЛА в главном приближении (без учета отражений от подстилающей поверхности). Пусть на идеально проводящее тело сложной формы падает плоская электромагнитная волна

$$\vec{E}^0 = \vec{e}^0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}^0 - i\omega_0 t};$$

$$\vec{H}^0 = \vec{\mathcal{H}}^0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}^0 - i\omega_0 t},$$

где волновой вектор  $\vec{k}_0$  имеет модуль, равный

$$|\vec{k}_0| = \frac{\omega_0}{C} = \frac{2\pi f_0}{C}.$$

Диаграмма антенны источника излучения такова, что указанная первичная волна на трассе источник излучения — антенна приемника ЛА не претерпевает переотражения от подстилающей поверхности. Очевидно, в главном приближении бортовая антенна ЛА принимает поле

$$\vec{E}_0 \{ \varepsilon^0 e^{i k_1 z}, 0, 0 \}; \vec{H}_0 \{ 0, \mathcal{H}^0 e^{i k_1 z}, 0 \}.$$

Здесь

$$k_1 = \frac{2\pi}{C} f_0 \left( 1 + \frac{v_{\text{накл}}}{C} \right),$$

$v_{\text{накл}}$  — значение наклонной (радиальной) скорости ЛА, т. е. скорости в направлении на источник излучения. Роль первой доплеровской частоты играет

$$f_1^{\text{доп}} = \frac{v_{\text{накл}}}{\lambda},$$

где  $\lambda$  — длина первичной волны.

Расчет поля в антенне приемника ЛА в первом приближении (с учетом однократного переотражения на трассе ЛА — подстилающая поверхность — ЛА).

Значения поля  $\{\vec{E}_1, \vec{H}_1\}$ , отраженного от самолета, определяются с помощью «носовой» высокочастотной  $\left( \frac{R}{\lambda} \gg 1 \right)$  диаграммы самолета с учетом его скорости, причем в разнесенном случае. Мы используем теорему Криспина, Гудрига, Сигеля для расчета бистатической эффективной поверхности рассеяния с помощью моностатической [3]. «Носовая» диаграмма ЛА определяется отражением плоской волны от металлической полусферы нашей модели (рис. 1). Такой подход хорошо

согласуется с экспериментальными результатами [4]. Итак, поле  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  с учетом указанных предположений описывается следующим выражением:

$$\vec{E}_1 \left\{ -\frac{\varepsilon^0 R}{2} \frac{e^{ik_2 r_1}}{r_1}; 0; 0 \right\}, \vec{H}_1 \left\{ 0; \frac{\mathcal{H}^0 R}{2 r_1} e^{ik_2 r_1} \cdot \sin \alpha; -\frac{\mathcal{H}^0 R}{2} \cos \alpha \frac{e^{ik_2 r_1}}{r_1} \right\},$$

где  $\alpha$  — угол посадки ЛА;  $r_1$  — расстояние от точки стационарной фазы полусферы до текущей точки луча;

$$k_2 = \frac{2\pi}{C} f_0 \left( 1 + \frac{v_{\text{накл}} + v_{\text{верт}}}{C} \right).$$

Роль второй доплеровской частоты играет

$$f_2^{\text{доп}} = \frac{v_{\text{накл}} + v_{\text{верт}}}{\lambda}.$$

Отраженная от подстилающей поверхности с волновым импедансом  $w = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$  электромагнитная волна в отражательной трактовке имеет вид

$$\vec{E}_2 \left\{ -\frac{\varepsilon^0 R}{2} \frac{w-1}{w+1} \frac{e^{ik_2(2h+y\cos\alpha+z\sin\alpha)}}{h}; 0; 0 \right\}; \vec{H}_2 \{0, H_{2y}, H_{2z}\},$$

где  $H_{2y} = \frac{\mathcal{H}^0 R}{2} \frac{w-1}{w+1} e^{ik_2(2h+y\cos\alpha+z\sin\alpha)} \frac{\sin\alpha}{h}$ ;  $H_{2z} = H_{2y} \cdot \text{ctg} \alpha$ ;

$\mu, \varepsilon$  — проницаемости подстилающей поверхности,

$$\mu = 1, \varepsilon = \varepsilon_1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega_0};$$

$r_2$  — расстояние от точки наблюдения до подстилающей поверхности;

$$k_2 = \frac{2\pi}{C} f_0 \left( 1 + \frac{v_{\text{накл}} + v_{\text{верт}}}{c} \right);$$

$h$  — высота ЛА.

Таким образом, принимаемая бортовой антенной отраженная от подстилающей поверхности волна преобразуется в следующее выражение:

$$\vec{E}_2' \left\{ -\frac{\varepsilon_0 R}{2} \frac{w-1}{w+1} \kappa \frac{e^{ik_2 2h}}{h}; 0; 0 \right\}; \vec{H}_2' \left\{ 0; -\frac{\mathcal{H}^0 R}{2} \frac{w-1}{w+1} \kappa \frac{e^{ik_2 2h}}{h} \sin \alpha; \right. \\ \left. \frac{\mathcal{H}^0 R}{2} \frac{w-1}{w+1} \kappa \frac{e^{ik_2 2y}}{h} \cos \alpha \right\},$$

где

$$k_3 = \frac{2\pi}{C} f_0 \left( 1 + \frac{v_{\text{накл}} + 2v_{\text{верт}}}{c} \right) = \frac{2\pi}{C} f_0 \left( 1 + \frac{v_{\text{накл}}}{c} (1 + 2\sin \alpha) \right),$$

$\kappa$  — коэффициент ослабления приемной антенны ЛА при угле падения  $\left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ .

Расчет поля в антенне приемника ЛА во втором приближении (с учетом двукратного переотражения на трассе ЛА — подстилающая поверхность — ЛА — подстилающая поверхность — ЛА).

Волна, отраженная от несущих плоскостей и цилиндрического фюзеляжа  $\{\vec{E}_3, \vec{H}_3\}$ , складывается из вклада двух плоских металлических пластин  $\{\vec{E}^n, \vec{H}^n\}$  и идеально проводящего цилиндра  $\{\vec{E}^u, \vec{H}^u\}$ . В приближении физической оптики [5] эти вклады описываются соотношениями

$$\vec{E}_3 \{E_x^u + E_x^n; E_y^u + E_y^n; E_z^u + E_z^n\}; \vec{H}_3 \{H_x^u + H_x^n; E_y^u + E_y^n; E_z^u + E_z^n\},$$

где 
$$E_x^u = \frac{iR}{2} \left[ -\frac{\varepsilon_0 R}{2} \frac{\omega - 1}{\omega + 1} \frac{e^{ik_3 2h}}{h} \right] \frac{e^{ik_3 r_2}}{r_2} e^{i \left( \frac{1}{2} + R \right) \sin \alpha (k_2 + k_3)} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\cos \alpha}{\pi k_3 R} \frac{\sin(k_3 e \sin \alpha)}{\sin \alpha}} e^{2ik_3 R \cos \alpha + i \frac{\pi}{4}};$$

$$E_y^u = E_z^u = H_x^u = E_y^n = E_z^n = H_x^n = 0;$$

$$H_y^u = E_x \sin \alpha;$$

$$H_z^u = -E_x \cos \alpha;$$

$$H_y^n = -\frac{ib}{2\pi r_2} \cos \alpha \sin(ka \sin \alpha) e^{ik_3 r_2} \times$$

$$\times \left[ -\frac{\varepsilon_0 R}{2} \frac{\omega - 1}{\omega + 1} \frac{e^{ik_3 2h}}{h} \right] e^{i(k_2 + k_3)L \sin \alpha};$$

$$H_z^n = -H_y^n \operatorname{ctg} \alpha,$$

где  $k_4 = \frac{2\pi}{c} f_0 \left[ 1 + \frac{v_{\text{накл}}}{c} (1 + 3 \sin \alpha) \right],$

$r_2$  — расстояние, отсчитываемое от точки 0 (рис. 1) в направлении к подстилающей поверхности;  $L = |00_1|$ . (данные формулы верны, если  $ka \sin \alpha \gg 1$ , т.е. в высокочастотном случае).

Опуская выражение для переотраженной от подстилающей поверхности волны  $\{\vec{E}_4, \vec{H}_4\}$ , указываем сразу соотношения для принятой бортовой антенной волны после переотражений на трассе источник излучения — ЛА — подстилающая поверхность — ЛА — подстилающая поверхность — ЛА:  $\vec{E} \{E_x; 0; 0\}$ ;  $\vec{H} \{0; H_y; H_z\}$ . Выражение для  $E_x$  (ограничимся только им, чтобы избежать громоздких формул для  $H_y, H_z$ , которые легко можно найти из приведенного выше выражения) определяется как

$$E_x = \left\{ \frac{iR}{2} \left[ -\frac{\varepsilon_0 R}{2} \frac{(\omega - 1)}{(\omega + 2)} \frac{e^{ik_3 2h}}{h} \right] \frac{e^{ik_3 h}}{h} \times \right.$$

$$\left. \times e^{i \left( \frac{1}{2} + R \right) \sin \alpha (k_2 + k_3)} \sqrt{\frac{\cos \alpha}{\pi k_3 R} \frac{\sin(k_3 l \sin \alpha)}{\sin \alpha}} \times \right.$$

$$\left. \times e^{-2ik_3 R \cos \alpha + i \frac{\pi}{4}} \frac{bl}{2\pi h} \operatorname{ctg} \alpha e^{ik_3 h} \cdot \sin(ka \sin \alpha) \times \right.$$

$$\left. \times \left| -\frac{\varepsilon_0 R}{2} \frac{(\omega - 1)}{(\omega + 1)} \frac{e^{ik_3 2h}}{h} \right| e^{iL(k_2 + k_3) \sin \alpha} \right\} e^{ihk_3 x},$$

где  $k_5 = \frac{2\pi}{c} f_0 \left( 1 + \frac{v_{\text{накл}}}{c} (1 + 4 \sin \alpha) \right).$

Полученные результаты позволили провести большой комплекс вычислительных работ, включавших относительный вклад различных частот ( $f_1, f_2, f_3$ ) в энергию излучения, принимаемого антенной бортового навигационного приемника. Варьировались: модели ЛА (само-

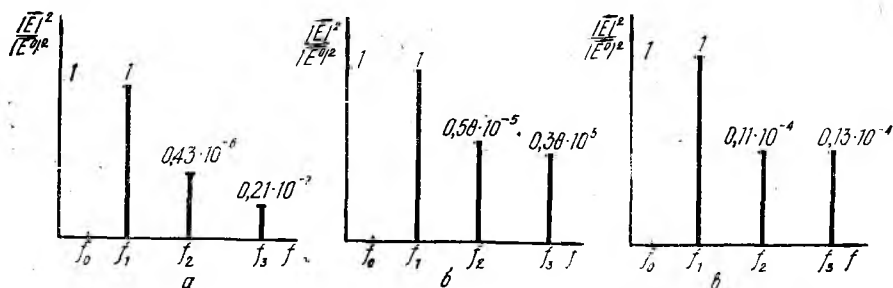


Рис. 2.

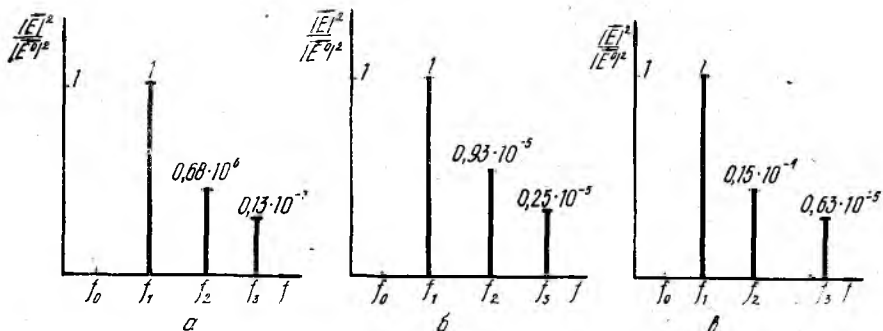


Рис. 3.

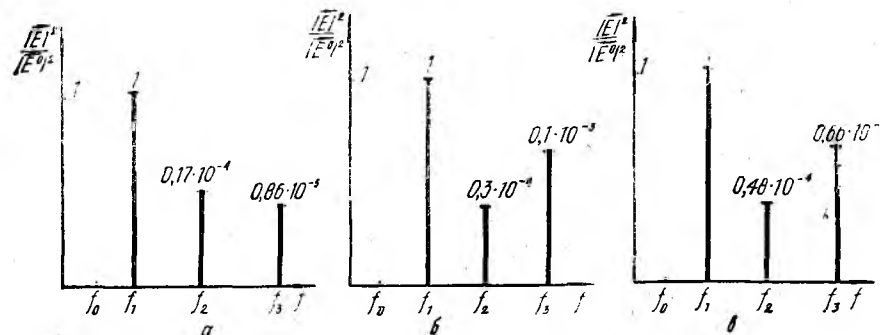


Рис. 4

леты ТУ-154, рис. 2), (ИЛ-62, рис. 3, 4, а, в); высоты  $h$  (от 60 м до 100 м); виды подстилающей поверхности (сухая земля, влажная земля, пресная вода, морская вода). На рис. 2—4 представлены для различных моделей ЛА, видов подстилающей поверхности и высот (рис. 2, 3,  $h = 100$  м) относительные вклады частот в указанную энергию,

причем частоте  $f_1$  на рисунках соответствует в обозначениях отношение

$$\frac{|\vec{E}_0|^2}{|\vec{E}^0|^2}; f_2 = \frac{|\vec{E}_2|^2}{|\vec{E}^0|^2}; f_3 = \frac{|\vec{E}|^2}{|\vec{E}^0|^2}.$$

Таким образом, интенсивности полей, возникающих из-за переотражений от подстилающей поверхности и ЛА довольно значительны. Они, как правило, тем больше, чем выше проводимость подстилающей поверхности и больше характерные размеры ЛА. При перерасчете на ошибки в определении глissады планирования из-за указанных переотражений обнаруживается, что максимальные ошибки составляют 50 % и 25 % допусков для радиомаяков 3-й и 2-й категорий соответственно с углом посадки  $2^\circ 41'$  и высотой 100 м); с уменьшением высоты  $h$  вклады частот  $f_2, f_3$  (а значит, и ошибки в определении глissады) значительно возрастают (при сравнении результатов для высот 100 м и 60 м в три — восемь раз); для хорошо проводящих поверхностей (пресная, морская вода) вклад частот с большими номерами (многократные переотражения) оказывается в ряде случаев выше вкладов частот с меньшими номерами (рис. 4). Этот эффект усиливается с уменьшением высоты; для уменьшения ошибок в определении глissады планирования ЛА настоятельно требуется совершенствование бортовых навигационных антенных систем, чтобы уменьшить (сузить) диаграмму направленности в вертикальной плоскости, т. е. свести к минимуму роль сигналов, отраженных от подстилающей поверхности в заключительной фазе захода на посадку летательных аппаратов.

**Список литературы:** 1. Небабин В. Г., Сергеев В. В. Методы и техника радиолокационного распознавания. М., 1984. 84 с. 2. Черный Ф. Б. Распространение радиоволн. М., 1972. 270 с. 3. Monroes E. Radar cross section handbook. New York. 1970. 788 p. 4. Кинг Р., Тай-цзунь У. Рассеяние и дифракция электромагнитных волн. М., 1962. 188 с. 5. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М., 1962. 145 с.

*Поступила в редколлегию 01.06.88*

УДК 538.574

С. И. ЛАПТА, канд. физ.-мат. наук

### ВОЗБУЖДЕНИЕ ОТРЕЗКА СПИРАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ВОЛНОВОДА ПРОДОЛЬНОМ ДИПОЛЕМ, РАСПОЛОЖЕННЫМ НА ЕГО ОСИ

Исследование рассеяния электромагнитных волн на отрезке спирального волновода представляет интерес как для электроники СВЧ, так и для антенной техники. Однако до последнего времени не удавалось решить задачу со спиральной структурой конечной длины.

Представлено математически обоснованное решение задачи о дифракции на отрезке спирально проводящего волновода (спирально проводящее кольцо) электромагнитных полей, возбуждаемых электри-

ческим (магнитным) диполем, который расположен на его оси, с моментом, ориентированным вдоль нее и гармонически изменяющимся во времени по закону  $e^{-i\omega t}$  ( $\omega = ck$ ). Стенка кольца предполагается бесконечно тонкой и идеально проводящей в спиральном и непроводящей в перпендикулярном к нему направлении. Эта задача обладает аксиальной симметрией.

Рассмотрим сначала случай электрического диполя. Введем цилиндрическую систему координат  $\rho, \varphi, z$  с осью  $Oz$ , совпадающей с осью кольца, и центром  $O$ , равноудаленным от его кромок. Пусть  $d$  — ширина кольца,  $2a$  — его диаметр,  $p$  — момент диполя, который помещен в точке  $M$  ( $\rho = 0, z = z_0$ ),  $\tau$  — направление спиральной проводимости, составляющее с плоскостью  $z = \text{const}$  угол  $\psi$ .

Поле диполя в присутствии кольца удобно искать с помощью электрического и магнитного векторов Герца с единственными отличными от нуля  $z$ -составляющими, которые представим так:

$$\Pi^e(\rho, z) = \Pi_0^e(\rho, z) + \Pi_1^e(\rho, z),$$

$$\Pi^m(\rho, z) = \Pi_1^m(\rho, z),$$

где  $\Pi_0^e(\rho, z) = p \frac{e^{ikR}}{R}$  соответствует диполю в свободном пространстве, а  $\Pi_1^e$  и  $\Pi_1^m$  — рассеянному полю,  $R = \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2}$ .

Функции  $\Pi_1^e$  и  $\Pi_1^m$  должны удовлетворять уравнению Гельмгольца всюду вне кольца, условию на бесконечности в форме принципа предельного поглощения и быть такими, чтобы определяемое посредством их электромагнитное поле удовлетворяло граничному условию на кольце и условию конечности энергии в любой ограниченной области. Будем их искать в виде

$$\Pi_1^e(\rho, z) = \frac{p}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \left\{ \begin{array}{l} H_0^{(1)}(g) J_0\left(g \frac{\rho}{a}\right) \\ J_0(g) H_0^{(1)}\left(g \frac{\rho}{a}\right) \end{array} \right\} e^{is \frac{z}{a}} ds;$$

$$\Pi_1^m(\rho, z) = -i \frac{p}{a} \kappa \operatorname{ctg} \psi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s)}{g} \left\{ \begin{array}{l} H_1^{(1)}(g) J_0\left(g \frac{\rho}{a}\right) \\ J_1(g) H_0^{(1)}\left(g \frac{\rho}{a}\right) \end{array} \right\} e^{is \frac{z}{a}} ds,$$

который уже учитывает удовлетворение уравнению Гельмгольца при  $\rho < a$  и  $\rho > a$ , непрерывность тангенциальных составляющих вектора электрического поля на поверхности  $\rho = a$  и отсутствие проводимости стенки кольца в направлении, перпендикулярном к спиральному. Здесь в фигурных скобках следует брать верхнюю строчку при  $\rho < a$  и нижнюю при  $\rho > a$ ;  $J_n(y)$ ,  $H_n^{(1)}(y)$  — функции Бесселя 1-го и 3-го рода соответственно;  $g = \sqrt{\kappa^2 - s^2}$ , причем  $Jmg > 0$  при  $|s| \rightarrow \infty$  вдоль вещественной оси;  $\kappa = ka$ .

Зная функцию  $x(s)$ , по известным формулам получаем рассеянное поле во всем пространстве. В частности, в дальней зоне рассеянное

поле представляет собой сферическую волну с составляющими в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  с центром в точке  $O$  и углом  $\theta$ , отсчитываемым от оси  $Oz$ :

$$E_{\theta}^1 = H_{\varphi}^1 = i \frac{2p}{a^2} \kappa^2 \sin \theta x (\kappa \cos \theta) J_0(\kappa \sin \theta) \frac{e^{i\kappa r}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right);$$

$$E_{\varphi}^1 = -H_{\theta}^1 = -\frac{2p}{a^2} \kappa^2 \operatorname{ctg} \psi x (\kappa \cos \theta) J_1(\kappa \sin \theta) \frac{e^{i\kappa r}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Плотность поверхностного тока на кольце при этом имеет вид

$$j_{\tau} = -\frac{c\kappa p}{2\pi^2 a^3} \operatorname{cosec} \psi \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{is \frac{z}{a}} ds.$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя искомая функция  $x(s)$  есть преобразование Фурье плотности поверхностного тока на кольце и, следовательно, полностью определяет энергетические характеристики рассеянного поля.

Функция  $x(s)$  — целая функция экспоненциального типа. Поэтому в рассеянном поле в дальней зоне в определенных направлениях присутствует только  $\theta$ -либо только  $\varphi$ -поляризация. Так, единственная  $\theta$ -поляризация рассеянного поля наблюдается в направлениях, определяемых углами

$$\theta_n = \arcsin \frac{\mu_n}{\kappa}$$

( $\mu_n$  —  $n$ -й корень функции Бесселя  $J_1(y)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

В направлениях  $\tilde{\theta}_n$ , для которых

$$\sin \tilde{\theta}_n = \frac{\nu_n}{\kappa}$$

( $\nu_n$  —  $n$ -й корень функции Бесселя  $J_0(y)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\kappa > \nu_1$ ), присутствует только  $\varphi$  — поляризация поля.

Обращение в нуль спиральной составляющей полного электрического поля на поверхности кольца и отсутствие токов на ее дополнении до бесконечно длинного цилиндра приводят к следующей системе парных интегральных уравнений, которым должна удовлетворять искомая функция  $x(s)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s) [g^2 J_0(g) H_0^{(1)}(g) + \kappa^2 \operatorname{ctg}^2 \psi J_1(g) H_1^{(1)}(g)] e^{is \frac{z}{a}} ds =$$

$$= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2 H_0^{(1)}(g) e^{i \frac{g}{a} (z-z_0)} ds, \quad |z| < \frac{d}{2}; \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{is \frac{z}{a}} ds = 0, \quad |z| > \frac{d}{2}. \quad (2)$$

Здесь использовано также известное разложение в интеграл Фурье функции

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}\left(g \frac{\rho}{a}\right) e^{i \frac{s}{a}(z-z_0)} ds$$

и выражение для вронскиана функций Бесселя.

Для нахождения решения системы парных интегральных уравнений (1), (2) удобно свести ее на основе метода, предложенного в работе [1], к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода. Для этого продифференцируем уравнение (2) по  $z$  и обозначим

$$g^2 J_0(g) H_0^{(1)}(g) + \kappa^2 \operatorname{ctg}^2 \psi J_1(g) H_1^{(1)}(g) = \frac{i|s|}{\pi} [1 - \varepsilon(s)].$$

При этом получим, с точностью до другого  $\varepsilon(s)$ , уравнения вида, уже рассмотренного в работе [2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s) |s| [1 - \varepsilon(s)] e^{is \frac{z}{a}} ds = -\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2 H_0^{(1)}(g) e^{i \frac{s}{a}(z-z_0)} ds,$$

$$|z| < \frac{d}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(s) s e^{is \frac{z}{a}} ds = 0, \quad |z| > \frac{d}{2},$$

$$\varepsilon(s) = O(s^{-2}).$$

Используя метод [1], эту систему сводим к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода:

$$x(s) = \eta \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{|t|}{t} \varepsilon(t) V_{\eta t}^{\eta s} dt - \eta \frac{\pi}{2s} \int_{-\infty}^{\infty} g^2 H_0^{(1)}(g) e^{-it \frac{2z_0}{a}} V_{\eta t}^{\eta s} dt,$$

(3)

где

$$\eta = \frac{d}{2a}; \quad V_{\lambda}^{\mu} = \frac{\lambda}{2(\mu - \lambda)} [J_0(\lambda) J_1(\mu) - J_0(\mu) J_1(\lambda)].$$

Решение этого уравнения аналогично [3] можно получить одним из численных методов в широкой области изменения параметров задачи. При этом погрешность, возникающую при замене (3) уравнением с конечными пределами интегрирования, нетрудно оценить, если учесть эквивалентность (3) системе (1), (2).

Второй способ решения уравнения (3) основан на методе последовательных приближений. Аналогично [2] можно показать, что для нормы интегрального оператора уравнения (3) справедлива оценка

$$\|K\| < C\eta (1 + \kappa |\ln \kappa|^{\frac{1}{2}} \operatorname{ctg} \psi),$$

где  $C$  — постоянная.

Следовательно, если ширина кольца достаточно мала по сравнению с его диаметром и с длиной волны либо шагом намотки спирали,  $\|K\| \ll 1$

и можно пользоваться методом последовательных приближений. Ограничиваясь первым приближением, получаем для функции  $x(s)$  то же выражение, что и в работе [2] со сплошным кольцом:

$$x(s) = -\eta \frac{\pi}{2} C_1 \frac{J_1(\eta s)}{s} + \eta^2 \frac{\pi i}{4} C_2 \frac{J_2(\eta s)}{s} + O(\eta^4 \ln \eta),$$

$$C_1 = \int_0^{\infty} g^2 H_0^{(1)}(g) \cos t \frac{z_0}{a} dt = -ia^3 \left( \frac{d^2}{dz_0^2} + k^2 \right) \left( \frac{e^{tkR}}{R} \right) \Big|_{z=0}^{\rho=a},$$

$$C_2 = -a \frac{d}{dz_0} C_1.$$

При этом плотность поверхностного тока с точностью  $O(\eta^3 \ln \eta)$  имеет вид

$$j_{\tau}^p = \eta \frac{ck\rho}{2\pi a^3} \operatorname{cosec} \psi \sqrt{1 - \frac{4z^2}{d^2}} \left( C_1 + C_2 \frac{z}{2a} \right) =$$

$$= -i\eta \frac{ck}{2\pi} \operatorname{cosec}^2 \psi \sqrt{1 - \frac{4z^2}{d^2}} \left( 1 - \frac{z}{2} \frac{d}{dz_0} \right) \bar{E}_{\tau}^{op}.$$

Здесь  $\bar{E}_{\tau}^{op}$  — спиральная составляющая электрического вектора поля источника при  $\rho = a$ ,  $z = 0$ .

В случае магнитного диполя задача решается аналогично, причем она сводится к такой же системе парных интегральных уравнений (1), (2), но с другой правой частью:

$$\frac{\kappa^2}{2} \operatorname{ctg} \psi \int_{-\infty}^{\infty} g H_1^{(1)}(g) e^{-i\frac{s}{a}(z-z_0)} ds,$$

затем к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода, которое отличается от (3) свободным членом:

$$-i\eta \frac{\pi\kappa}{2s} \operatorname{ctg} \psi \int_{-\infty}^{\infty} g H_1^{(1)}(g) e^{-it\frac{z_0}{a}} V_{\eta s}^{\eta} dt.$$

Его приближенное решение:

$$x^m(s) = -\eta \frac{\pi i}{2} C_3 \kappa \operatorname{ctg} \psi \frac{J_1(\eta s)}{s} - \eta^2 \frac{\pi}{4} C_4 \kappa \operatorname{ctg} \psi \frac{J_2(\eta s)}{s} + O(\eta^4 \ln \eta),$$

где

$$C_3 = \int_0^{\infty} g H_1^{(1)}(g) \cos t \frac{z_0}{a} dt = ia^2 \frac{d}{d\rho} \left( \frac{e^{tkR}}{R} \right) \Big|_{z=0}^{\rho=a}, C_4 = -a \frac{d}{dz_0} C_3.$$

Плотность поверхностного тока соответственно равна с точностью  $O(\eta^3 \ln \eta)$

$$j_{\tau}^m = i\eta \frac{ck^2 m}{2\pi a^3} \operatorname{cosec}^2 \psi \cos \psi \sqrt{1 - \frac{4z^2}{d^2}} \left( C_3 + C_4 \frac{z}{2a} \right) =$$

$$= -i\eta \frac{ck}{2\pi} \operatorname{cosec}^2 \psi \sqrt{1 - \frac{4z^2}{d^2}} \left( 1 - \frac{z}{2} \frac{d}{dz_0} \right) \bar{E}_{\tau}^{om},$$

где  $m$  — величина момента магнитного диполя;  $\vec{E}_\tau^{Om}$  — спиральная составляющая электрического вектора поля магнитного диполя при  $\rho = a, z = 0$ .

Сопоставляя эти приближенные решения с решениями задач возбуждения сплошного узкого кольца электрическим и магнитным дipoлями [2], приходим к следующим выводам.

Если в случае сплошного кольца возбуждение электрическим и магнитным диполями совершенно различно, как по краевым особенностям поверхностного тока, так и по поляризации и интенсивности рассеянного поля, при спиральной проводимости ( $\psi \neq 0$ ) рассеянное поле содержит одновременно обе  $\Theta$ - и  $\Phi$ -поляризации (соотношение между ними определяется углом  $\psi$ ), его интенсивность не зависит от вида источника и определяется спиральной составляющей электрического вектора поля источника на кольце. Характер рассеяния поля спирально проводящим кольцом, в том числе и характер краевых особенностей поверхностного тока, — того же типа, что и при возбуждении сплошного кольца электрическим диполем.

Следует отметить, что приведенное решение не допускает предельного перехода  $\psi \rightarrow 0$ , т. е. из него нельзя получить решение задачи возбуждения магнитным диполем сплошного кольца, которое имеет качественно иной характер [2].

**Список литературы:** 1. Сологуб В. Г. О решении одного интегрального уравнения типа свертки с конечными пределами интегрирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 4. С. 837—854. 2. Ланга С. И., Сологуб В. Г. Возбуждение отрезка круглого волновода продольным диполем, расположенным на его оси // Радиотехника. 1974. Вып. 30. С. 146—155. 3. Ланга С. И., Мисюра Н. Н., Сологуб В. Г. Исследование рассеивающих свойств цилиндрических экранов в резонансной области // Распространение и дифракция радиоволн в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах: Сб. науч. тр. К., 1984. С. 146—155.

Поступила в редколлегию 13.06.88

УДК 621.385

К. П. ЯЦУК, канд. физ.-мат. наук, К. А. МАРКОВ

### РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ЛБВ НА СВЯЗАННЫХ ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

При исследовании взаимодействия пучка электронов с полями регулярных замедляющих систем (ЗС) в самосогласованной постановке задача сводится к совместному решению уравнений возбуждения ЗС, уравнений движения и непрерывности пучка. Задавая закон изменения полей  $\sim e^{Tz}$ , систему дифференциальных уравнений преобразуют в дисперсионное уравнение (ДУ) относительно искомой фазовой постоянной  $\Gamma$ . Корни ДУ отыскиваются численными методами, а коэффициент усиления (КУ) рассчитывается по полям трех парциальных волн.

Анализ нерегулярных ЛБВ, т. е. систем, в которых ЗС или пучок изменяют свои параметры вдоль направления распространения, также

можно провести в самосогласованной постановке. При этом получится система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, от которой можно перейти к ДУ путем введения интегрального представления для зависящей от координаты фазы [1]. Однако при усложнении ЗС в результате использования связанных ЗС или введения диэлектриков, экранов и т. д. возникают дополнительные трудности при отыскании корней ДУ и их физической интерпретации [2].

Предлагается для нерегулярных ЛБВ провести решение задачи без перехода к ДУ путем численного интегрирования дифференциальных уравнений с определенными заранее «холодными» характеристиками ЗС и коэффициентом депрессии для пучка.

В качестве примера проанализируем взаимодействие радиально расходящегося пучка с полем связанных логарифмических спиралей на слое диэлектрика с экраном. Используем следующую модель. В плоскости  $z = 0$  цилиндрической системы координат  $r, \varphi, z$  расположена спираль с углом намотки  $\psi_1$ . На расстоянии  $z = -a$  — вторая спираль с углом намотки  $\psi_2$ , под ней — слой диэлектрика толщиной  $(c - a)$  с  $\epsilon > 1$ , на расстоянии  $z = -c$  — металлический экран. Начальные радиусы спиралей —  $r_0$ . Между спиральями симметричной плоскости  $z = -\frac{a}{2}$  расположен дисковый электронный пучок толщиной  $2b < a$ .

Задача решается в линейном приближении, пучок жестко сфокусирован, электроны имеют одно направление скорости  $v_0 = v_{0r}$ , движение пучка дрейфовое, спирали аппроксимируются анизотропно проводящими плоскостями, поля спиралей в пучке симметричны по азимуту. В приближении одной волны система описывается дифференциальными уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dr} + \left( j\gamma_0 + \frac{1}{2r} \right) E &= -\frac{1}{2} \beta_0 K_0 \frac{r_0}{r} I; \\ \frac{dV}{dr} + j\beta_e V - j \frac{2\rho^2}{h} K_0 \frac{r_0}{r} I - E &= 0; \\ \frac{dI}{dr} + j\beta_e I - j\beta_e \frac{I_0}{2V_0} V &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $E, V, I$  — переменные составляющие поля, потенциала и тока пучка;  $K_0, \gamma_0 = \beta_0 + i\alpha$  — сопротивление связи при  $r = r_0$  и фазовое число, равное  $\beta_0$  при отсутствии потерь  $\alpha = 0$ , — характеристики «холодной» системы на заданной частоте  $f$ ;  $\beta_e = \frac{\omega}{v_0}$ ,  $I_0, V_0, \rho^2$  — постоянная распространения, ток, ускоряющее напряжение и коэффициент депрессии пучка,  $\omega = 2\pi f$ ,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $h = 2b$ .

«Холодные» характеристики двух спиралей с диэлектриком и экраном исследованы в работе [3], где на основе численного анализа показано следующее. Для спиралей с  $\Psi_1 = \Psi_2$ , диэлектриком и экраном и для  $\Psi_1 = -\Psi_2$  с диэлектриком и без него существуют две волны связи: «медленная» и «быстрая». В случае  $\Psi_1 = \Psi_2$  сопротивление

связи «быстрой» волны  $R_{CB}^B$  соизмерно с сопротивлением связи «медленной» волны  $R_{CB}^M$ . Для спиралей с противоположной намоткой ( $\Psi_1 = -\Psi_2$ )  $R_{CB}^B$  значительно больше  $R_{CB}^M$ , и в некотором диапазоне частот  $R_{CB}^B$  больше сопротивления связи одинарной спирали  $R_{CB}^O$ . Для случая  $\Psi_1 = \Psi_2$  без диэлектрика и экрана в системе существует одна волна, сопротивление связи которой  $R_{CB}^{+}$  меньше, чем  $R_{CB}^O$  [4].

Расчет коэффициента депрессии для дискового пучка толщиной  $2b$  проведем по методике работы [5], справедливой для случая  $2b < a$ . Сначала получим дисперсионное уравнение, для чего решим совместную систему уравнений Максвелла, уравнений движения, непрерывности и полного тока пучка. Особенность задачи — зависимость от координат постоянной составляющей плотности заряда  $\rho_0(r) = \frac{\rho_0 r_0}{r}$ , где  $\rho_0$  — значение плотности заряда в начале области взаимодействия  $r = r_0$ . При временной зависимости  $e^{i\omega t}$  для радиально расходящегося пучка переменные составляющие полей, скоростей  $\vec{v}$ , плотностей заряда  $\bar{\rho}$  и тока  $\bar{j}$  представим в виде

$$E_z = E_{z0}(z) H_0^{(2)}(\gamma r), \quad E_r = E_{r0}(z) H_1^{(2)}(\gamma r), \quad H_\varphi = H_{\varphi 0}(z) H_1^{(2)}(\gamma r);$$

$$\vec{v} = v(z) H_1^{(2)}(\gamma r), \quad \bar{\rho} = \rho(z) H_0^{(2)}(\gamma r), \quad \bar{j} = j(z) H_1^{(2)}(\gamma r).$$

Здесь  $H_i^{(2)}(\gamma r)$  — функции Ханкеля второго рода нулевого и первого порядков ( $i = 0, 1$ ). Такое задание переменных величин дает возможность при  $\gamma r > 1$  разделить переменные в уравнениях Максвелла и получить решения в аналитическом виде. Так для  $E$ -волны в области пучка (первая область) компоненты  $E'_{r0}$ ,  $E'_{z0}$  выразятся через  $H'_{\varphi 0}$ , а для  $H'_{\varphi 0}$  получится уравнение

$$\frac{\partial^2 H'_{\varphi 0}}{\partial z^2} + \delta^2 H'_{\varphi 0} = 0, \quad (3)$$

где

$$\delta^2 = \kappa^2 \Delta, \quad \kappa^2 = \gamma^2 - k^2, \quad \Delta = \frac{\Omega_H^2 r_0}{(\omega - \gamma v_0) r} - 1, \quad (4)$$

$k = \frac{\omega}{c}$ ,  $\gamma = \frac{\omega}{v_0}$  — волновые числа в свободном пространстве и пучке;

$\Omega_H^2 = 4\pi \frac{e}{m} \rho_0$  — квадрат плазменной частоты при  $r = r_0$ .

В (3) и далее опускается аргумент  $z$  у компонент полей.

Из (3) следуют два частных решения для  $H'_{\varphi 0}$ :

$$H'_{\varphi 0} = A \sin \delta z + B \cos \delta z$$

( $A, B$  — произвольные постоянные).

Одному частотному решению соответствуют четные функции  $z$  поперечных компонент поля  $H'_{\varphi 0}$  и  $E'_{z0}$ , другому — нечетные. Назовем первые «четными» волнами, вторые — «нечетными». Для четных волн поля представим как

$$H'_{\varphi 0} = B \cos \delta z, \quad E'_{z0} = -\frac{i\gamma}{k\Delta} B \cos \delta z, \quad E'_{r0} = \frac{i\delta}{k\Delta} B \sin \delta z, \quad (5)$$

Для нечетных

$$H'_{\varphi 0} = A \sin \delta z, E'_{z0} = -\frac{i\gamma}{k} A \sin \delta z, E'_{r0} = -\frac{i\delta}{k\Delta} A \cos \delta z. \quad (6)$$

В области вне пучка (вторая область)  $\rho_0(r) = 0$ ,  $\delta^2 = -\kappa^2$  и уравнение для  $H'_{\varphi 0}$  примет вид

$$\frac{\partial^2 H'_{\varphi 0}}{\partial z^2} - \kappa^2 H'_{\varphi 0} = 0,$$

а поля запишутся следующим образом:

$$H''_{\varphi 0} = C e^{-\kappa z}, E''_{z0} = -\frac{i\gamma}{k} C e^{-\kappa z}, E''_{r0} = -\frac{i\kappa}{k} C e^{-\kappa z}. \quad (7)$$

Приравнявая тангенциальные составляющие полей (5) — (7) при  $z = b$ , имеем дисперсионные уравнения: для четных волн  $\delta_n b \operatorname{ctg} \delta_n b = -\kappa b$  (8), для нечетных волн  $\delta_n b \operatorname{tg} \delta_n b = \kappa b$  (9). Для медленных волн ( $\kappa \approx \gamma$ ) и слабых пучков ( $\gamma_0 \approx k_0 = \frac{\omega}{v_0}$ )  $\kappa \approx \frac{\omega}{v_0} \equiv \tau$  [5]. При этом для заданных  $\tau_n b$  из уравнений (8) и (9) легко определить  $\delta_n b$ . Тогда согласно (4) выражение для постоянной распространения волн в пучке получим в виде  $\gamma_n = k_0 - \sqrt{p^2 q^2}$ , где  $q^2 = \frac{\Omega_H^2 r_0}{v_0^2}$  — волновое число волны в безграничном радиальном пучке с плазменной частотой  $\Omega_H$  при  $r = r_0$ ;  $p^2$  — коэффициент депрессии, определяемый выражением

$$p^2 = \frac{(\tau_n b)^2}{(\tau_n b)^2 + (\delta_n b)^2}. \quad (10)$$

Из (10) видно, что выражение для  $p^2$  не отличается от полученного в работе [5], но значение его определяется дисперсионным уравнением. В случае дискового пучка находим два ДУ — для четных и нечетных волн. Можно установить соответствие между четными, нечетными волнами пучка и «медленными», «быстрыми» волнами «холодной» ЗС. Для синфазно возбужденных спиралей с  $\Psi_1 = \Psi_2$  радиальные составляющие электрического поля от двух спиралей в плоскости  $z = -\frac{a}{2}$  имеют противоположные направления, чему соответствует уменьшение сопротивления связи  $R_{CB}^{++}$  по сравнению с  $R_{CB}^0$  одинарной спирали. Поперечные составляющие полей ЗС описываются четными функциями  $z$ , и для расчета  $p^2$  следует использовать ДУ для четных волн дискового пучка. В случае  $\Psi_1 = -\Psi_2$  для «быстрых» волн радиальные составляющие полей при  $z = -\frac{a}{2}$  имеют одинаковые направления, что объясняет рост  $R_{CB}^B$  по сравнению с  $R_{CB}^0$ , а поперечные составляющие описываются нечетными функциями  $z$ . Таким образом, рассчитывая  $p^2$  в случае «быстрых» волн ЗС, надо брать ДУ для нечетных волн дискового пучка.

На рис. 1 представлены результаты расчета  $p^2$  по формуле (10) с учетом (8), (9) для четной (кривая 2) и нечетной (кривая 1) волн.

Численное интегрирование системы (1) проводилось на фиксированных частотах методом Рунге — Кутты с условиями на входе  $E_{ВХ} = 1$ ,  $V_{ВХ} = I_{ВХ} = 0$ . Значения  $\gamma_0^{Б,М}$  и  $R_{СВ}^{Б,М}$  брались из работы [3], а коэффициент депрессии — из рис. 1. Коэффициент усиления вычислялся по формуле

$$G_{дв} = 20 \lg \frac{E_r(r)}{E_{r_{ВХ}}} \quad (11)$$

Вначале был проведен расчет  $G$  для параметров лампы, описанной в работе [6]:  $\psi_1 = \psi_2 = 76$ ,  $a = 1,6$  мм,  $b = 1$  мм,  $I = 15$  мА. На рис. 2, а приведены зависимости  $G(r)$  для различных ускоряющих напряжений пучка на частоте 439 МГц. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 — для  $U_0 = 20, 30, 40, 60, 70$  В соответственно. Получены зависимости  $G(U_0)$  (рис. 2, б). Кривая 1 представляет собой пересчет кривых рис. 2, а при  $r = 6$  см, 2 — отражает экспериментальные данные [6], 3 — результаты расчета  $G$  полевым методом [2]. Расчеты и эксперимент согласуются.

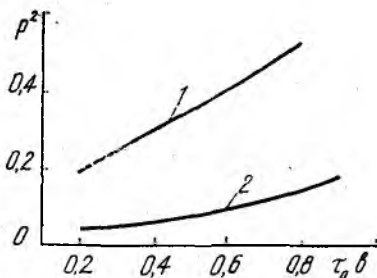


Рис. 1

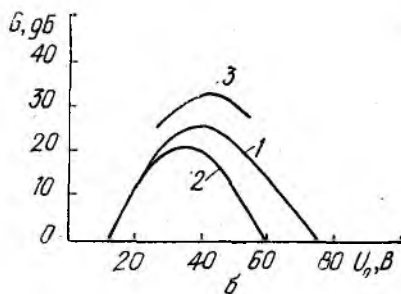
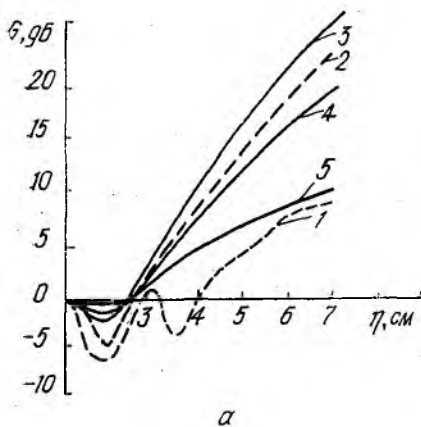


Рис. 2

Затем рассчитывались  $G$  спиралей с одинаковыми и противоположными намотками без диэлектрической подложки и при наличии экранированного слоя диэлектрика толщиной 1,6 мм для  $I = 20$  мА и с остальными параметрами, приведенными для кривых рис. 2. На рис. 3а, б показаны зависимости  $G(U_0)$  для  $\psi_1 = \psi_2$  при  $r = 6$  см и разных частотах, на рис. 3в, г — для  $\psi_1 = -\psi_2$ . Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответственно для частот 200, 400, 600, 800 и 1100 МГц для спиралей без диэлек-

трика (рис. 3, а, в) и с диэлектриком (рис. 3, б, г). Цифры с одним штрихом — для «быстрых»; с двумя — для «медленных» волн.

Из рис. 3,а следует, что для спиралей с  $\psi_1 = \psi_2$  в определенном диапазоне частот наблюдается слабое изменение  $G$  с изменением частоты. При введении диэлектрика с экраном области усиления возникающих двух волн связи смещаются в сторону низких напряжений, а их амплитуды оказываются соизмеримыми и большими, чем при отсутствии диэлектрика. Из рис. 3, в, г видно, что для спиралей с противоположными намотками области усиления «медленных» и «быстрых» волн оказываются или разнесенными по напряжению или сильно отличающи-

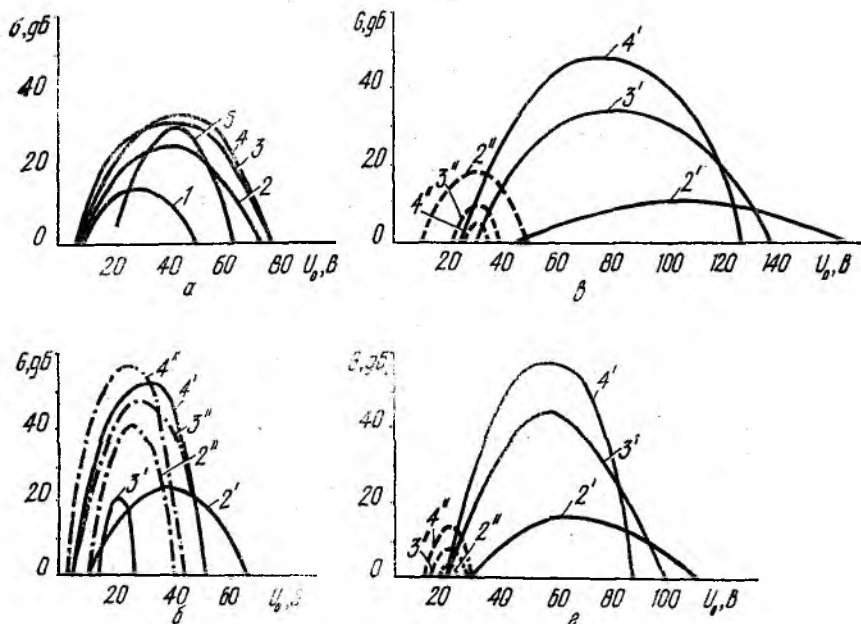


Рис. 3.

мися по амплитудам. При этом усиление на «быстрой» волне для  $\psi_1 = -\psi_2$  оказывается большим, чем в случае  $\psi_1 = \psi_2$ . Введение слоя диэлектрика приводит к сужению интервала усиления по напряжению и увеличению  $G$  у «быстрой» волны при сохранении большого отношения усилений для «быстрых» и «медленных» волн, т. е. в широком диапазоне частот даже при наличии диэлектрика  $G^B > G^M$ . Отметим, что в случае  $\psi_1 = \psi_2$  в результате введения диэлектрика (нарушения симметрии системы) возникают биения двух волн, чего нет при использовании спиралей с  $\psi_1 = -\psi_2$ .

Таким образом, расчет коэффициента усиления нерегулярных ЛБВ путем численного анализа исходных дифференциальных уравнений привел к правильным физическим результатам. Показаны слабая частотная зависимость коэффициента усиления для случая симметричной системы ( $\psi_1 = \psi_2$ ) и возникновение волн биений при нарушении

симметрии. Применение спиралей с противоположными намотками позволяет выделить «быструю» волну без мешающей «медленной» даже при наличии диэлектрика и получить коэффициент усиления больший, чем в случае  $\psi_1 = \psi_2$  без диэлектрика.

Список литературы: 1. Савельев В. С. Расчет взаимодействия радиально расходящегося электронного потока с бегущей в радиальном направлении электромагнитной волной // Радиотехника и электрон. 1967. Т. 12. № 6. С. 1018—1025. 2. Яцук К. П., Гребенюк Ю. И. Анализ радиальной ЛБВ на двух связанных логарифмических спиралях. М. 1986. 13 с. Деп. в ВИНТИ 09.04.86. № 2520—В86. 3. Яцук К. П., Гребенюк Ю. И. Связанные логарифмические спирали с экраном и диэлектриком для радиальной ЛБВ // Вестн. Харьк. ун-та. 1977. № 151. Радиофизика и электрон. Вып. 6. С. 57—61. 4. Евтушенко Ю. Ф., Савельев В. С. Расчет сопротивления связи радиальной линии замедления // Электрон. техника. Сер. 1. Электрон. СВЧ. 1967. Вып. 3. С. 148—152. 5. Лошаков Л. Н. Об учете поля объемного заряда при расчете постоянных распространения в замедляющей системе в присутствии электронного пучка с помощью леммы Лоренца // Радиотехника и электрон. 1958. Т. 4, № 4. С. 688—694. 6. Савельев В. С., Куценко Г. И. Экспериментальные исследования ЛБВ с радиальным электронным потоком // Радиотехника и электрон. 1970. Т. 15, № 12. С. 2567—2573.

Поступила в редколлегию 22.06.88

УДК 621.385

Г. А. ГРОМОВ

### ВЛИЯНИЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ НА СИНХРОННЫЕ РЕЖИМЫ КОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАНСНЫХ ПРИБОРОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Под синхронными режимами колебаний понимают возбуждени в динамической системе колебаний, частота которых совпадает с частотой внешнего регулярного сигнала. Применительно к резонансным приборам с распределенным взаимодействием (ГДИ, оротрон, резонансная ЛОВ и др.) условия существования и характеристики таких режимов исследовались в работах [1—3] для случаев усиления и синхронизации колебаний без учета влияния естественных флюктуаций. Основными источниками естественных флюктуаций в рассматриваемых приборах являются дробовый и тепловой шумы электронного пучка, их спектральные плотности будем считать заданными на входе пучка в пространство взаимодействия. Цель работы — анализ закономерностей изменения спектра выходных колебаний при переходе от режима усиления в режим синхронизации генератора внешним гармоническим сигналом и определение условий существования синхронных колебаний при наличии шумов электронного пучка. В качестве объекта исследования рассматривается однорезонантный прибор, в котором внешний сигнал поступает непосредственно в область пространства взаимодействия [2; 3]. Основные предположения относительно свойств электродинамической системы и электронного пучка совпадают с принятыми в работе [3].

Для определения амплитуды  $F$  и фазы  $\gamma$  возбуждаемых колебаний воспользуемся совместной системой уравнений возбуждения резонатора и уравнения движения частиц пучка [3]. С учетом первых нелинейных членов по амплитуде поля эта система может быть представлена уравнениями

$$\frac{dF}{dt} = F [G\Phi_0\Psi_1(\Phi_s) - 1] - F^3\Phi_0^3G\Psi_3 - A \cos \gamma - \frac{G}{2} \text{Im}(D_0\eta_0 + D_1\eta_1); \quad (1)$$

$$F \frac{d\gamma}{dt} = F [\dot{\gamma} - G\Phi_0\Psi_2(\Phi_s)] + F^3\Phi_0^3G\Psi_4 + A \sin \gamma - \frac{G}{2} \text{Re}(D_0\eta_0 + D_1\eta_1);$$

где

$$D_m = \int_0^1 \xi^m f(\xi) \exp(i\Phi_s \xi) d\xi; \quad m = 0, 1;$$

$\eta_0(t) = \overline{\xi_1(t) \exp(i\varphi)}$ ;  $\eta_1(t) = \overline{\xi_2(t) \exp(i\varphi)}$  — усредненные за период источники флуктуаций.  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  — случайные функции, определяющие начальные флуктуации фазы влета и скорости частиц на входе в пространство взаимодействия [3]. Определение функций  $\Psi_3(\Phi_s)$  и  $\Psi_4(\Phi_s)$  дано в работе [1, 4. II]; остальные обозначения в (1) соответствуют обозначениям работы [3].

В зависимости от величины  $\alpha_0 = G\Phi_0\Psi_1(\Phi_s) - 1 \equiv I_0/I_{\text{пуск}} - 1$  система уравнений (1) описывает режим усиления ( $\alpha_0 < 0$ ) или синхронизации колебаний ( $\alpha_0 > 0$ ) в резонансных приборах с распределенным взаимодействием. Определим флуктуационные характеристики колебаний в резонаторе в предположении, что шум электронного пучка приводит к малым отклонениям амплитуды и фазы колебаний от их значений в синхронном режиме колебаний для  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ . Ограничения, которые должны накладываться при этом на мощность шумов и уровень внешнего сигнала, будут установлены ниже. Указанное предположение позволяет искать решение уравнений (1) в следующем виде:

$$F = F_0 [1 + \tilde{F}(t)]; \quad \gamma = \gamma_0 + \tilde{\gamma}(t), \quad (2)$$

где  $F_0$ ,  $\gamma_0$  — значения амплитуды и фазы поля для регулярной задачи;  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{\gamma}$  — малые слагаемые. Подстановка выражений (2) в систему (1) позволяет легко определить уравнения для флуктуационных компонент амплитуды  $\tilde{F}$  и фазы  $\tilde{\gamma}$ . Дальнейшее исследование этих уравнений можно проводить стандартными методами [4]. В результате приходим к следующим выражениям для спектральных плотностей флуктуаций амплитуды и фазы и их взаимной спектральной плотности:

$$\begin{aligned} S_{FF} &= \frac{d_r B [(\alpha_1 + \Delta_1)^2 + (\delta_1 + \Delta_2)^2 + \Omega^2]}{F_0^2 Z(\Omega)}; \\ S_{\gamma\gamma} &= \frac{d_r B (\alpha_1^2 + \delta_1^2 + \Omega^2)}{F_0^2 Z(\Omega)}; \\ S_{F\gamma} &= \frac{d_r B [-\Delta_2 \alpha_1 - \delta_1 \Delta_1 + i\Omega (2\delta_1 - \Delta_2)]}{F_0^2 Z(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$B = (G^2/8) [S_I |D_0|^2 / I_0^2 + S_v \Phi_0^2 |D_1|^2 |v_0^2];$$

$$Z(\Omega) = [\alpha_1(\alpha_1 + \Delta_1) + \delta_1(\delta_1 - \Delta_2) - \Omega^2] + \Omega^2(2\alpha_1 + \Delta_1)^2;$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 - 3F_0^2 \Phi_0^3 G \Psi_3; \Delta_1 = 2F_0^2 \Phi_0^3 G \Psi_3; d_r = \omega_r / 2Q;$$

$$\delta_1 = \delta_0 + 3F_0^2 \Phi_0^3 G \Psi_4; \Delta_2 = 2F_0^2 \Phi_0^3 G \Psi_4; \delta_0 = \delta_r - G \Phi_0 \Psi_2,$$

( $\Omega$  — безразмерная частота, нормированная на  $\omega_r/2Q$ ), где  $\omega_r$  и  $Q$  — собственная частота и добротность колебательной системы;  $S_I$  и  $S_v$  — спектральные плотности флуктуаций тока и скорости частиц пучка на входе в пространство взаимодействия. Входящая в выражения (3) амплитуда  $F_0$  находится из решения уравнения

$$F_0^2 [(\alpha_0 - F_0^2 \Phi_0^3 G \Psi_3)^2 + (\delta_0 + F_0^2 \Phi_0^3 G \Psi_4)^2] = A^2. \quad (4)$$

Согласно полученным соотношениям для спектральных плотностей (3), спектр колебания в резонаторе состоит из монохроматической линии на частоте внешнего сигнала ( $\Omega = 0$ ) с амплитудой  $F_0$  и расположенного около нее несимметричного пьедестала, описываемого выражением

$$W_n(\Omega) = d_r B [2\Omega^2 + \alpha_1^2 + \delta_1^2 + (\alpha_1 + \Delta_1)^2 + (\delta_1 - \Delta_2)^2 + 2\Omega(2\delta_1 - \Delta_2)] / Z(\Omega). \quad (5)$$

Отметим, что несимметрия пьедестала относительно  $\Omega = 0$  обусловлена не только нелинейными эффектами, но тем, что максимальная мощность шумов достигается не на частоте внешнего сигнала, а вблизи собственной частоты «горячего» резонатора. Действительно, в линейном режиме усиления колебаний ( $F_0^2 \ll 1$ ) формула (5) может быть записана как

$$W(\Omega) = 2d_r B / [(\Omega - \delta_0)^2 + \alpha_0^2], \quad (6)$$

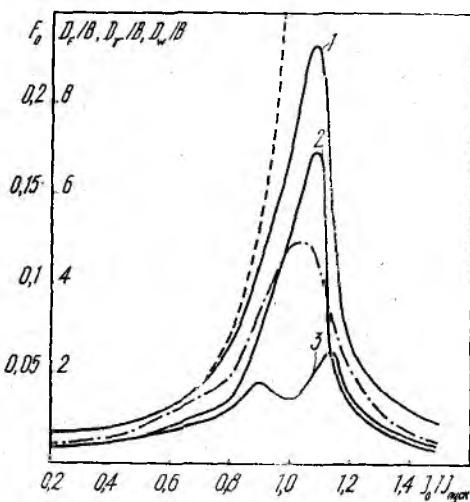
где соотношение  $\Omega = \delta_0$  определяет собственную частоту «горячего» резонатора. При этом характерная ширина спектра шумов определяется его полосой пропускания  $\Delta\omega = \omega_r(1 - I_0/I_{\text{пуск}}) / Q$ . В линейном режиме спектральные плотности флуктуаций амплитуды и фазы одинаковы:

$$S_{FF} = S_{\varphi\varphi} = (B/2F_0^2) \{ [(\Omega + \delta_0)^2 + \alpha_0^2]^{-1} + [(\Omega - \delta_0)^2 + \alpha_0^2]^{-1} \},$$

и, следовательно, они дают одинаковый вклад в мощность шумов на выходе прибора.

Рассмотрим теперь влияние нелинейных эффектов на возбуждение шумовых колебаний в резонаторе с распределенным взаимодействием. На рисунке приведены результаты расчетов дисперсий флуктуаций амплитуды  $D_F$  (кривая 1), фазы  $D_\varphi$  (кривая 2) и выходного колебания  $D_w$  (кривая 3), нормированных на величину  $B$ , в зависимости от тока пучка при  $\Phi_s = -\pi$ ;  $\delta_0 = 0$ ;  $A^2 = 10^{-4}$  для однородного распределения амплитуды колебания в резонаторе  $f(\xi) = 1$ . Штриховой линией на рисунке обозначена зависимость  $D_w = Bd_r/2(1 - I_0/I_{\text{пуск}})$ , следующая из результатов анализа в линейном приближении, а штрихпунктирной линией — зависимость амплитуды регулярных колебаний

в резонаторе от  $I_0/I_{\text{пуск}}$ . Нелинейные эффекты начинают заметно проявляться на дисперсии при значениях силы тока пучка, близких к пусковому значению. Они приводят к заметному уменьшению шумов по сравнению с линейным режимом взаимодействия пучка с полем при  $I_0 < I_{\text{пуск}}$  и перераспределению относительно вклада флюктуаций амплитуды и фазы в мощность шумов выходного колебания. В режиме автоколебаний ( $I_0/I_{\text{пуск}} > 1$ ) определяющую роль играют фазовые флюктуации, что характерно для целого ряда других электронных приборов СВЧ [4]. Следует также отметить, что в общем случае значения силы тока пучка, при которых достигаются максимальные значения  $D_F$ ,  $D_\gamma$ , и амплитуды регулярных колебаний  $F_0$  в резонаторе не совпадают. Это различие заметно возрастает при увеличении уровня внешнего сигнала, что позволяет путем соответствующего выбора рабочего тока пучка и величины  $P_{\text{вх}}$  заметно уменьшить мощность шумов генератора.



Приведенные решения исходной системы уравнений (1) были найдены в предположении о малости отклонений значений фазы и амплитуды колебаний от соответствующих значений для регулярной задачи. Первое из этих требований является наиболее жестким [4], и из анализа условий его выполнения можно определить минимальные значения уровня внешнего сигнала, при которых возбуждаются синхронные колебания в системе, и соответственно найти область применимости приведенных выше соотношений. Рассмотрим решение этой задачи для случая  $I > I_{\text{пуск}}$ , когда можно считать, что условие малости относительных флюктуаций амплитуды поля сохраняется и при уровнях внешнего регулярного сигнала меньших и сравнимых с мощностью шумов в пространстве взаимодействия. Это позволяет во втором уравнении системы (1) считать амплитуду  $F$  равной амплитуде детерминированных колебаний  $F_0$  и для определения функции распределения вероятности фазы  $\omega(\gamma)$  можно воспользоваться аппаратом уравнений Фоккера — Планка [5]. В данном случае уравнение для определения  $\omega(\gamma)$  в стационарном режиме колебаний сводится к известному виду [5]

Здесь коэффициенты  $D$ ,  $D_c$  зависят от параметров рассматриваемой

$$\frac{d^2 \omega}{d\gamma^2} - \frac{d}{d\gamma} [(D - D_c \sin \gamma) \omega(\gamma)] = 0. \quad (7)$$

Здесь коэффициенты  $D$ ,  $D_c$  зависят от параметров рассматриваемой

колебательной системы и пучка и задаются соотношениями

$$D = \frac{4F_0^2}{d_r B G^2} (\delta_0 + F_0^2 \Phi_0^3 G \Psi_A); D_c = \frac{4AF_0}{G^2 B d_r}.$$

Воспользовавшись результатами анализа этого уравнения, проведенного в работах [4; 5], можно утверждать, что в центре полосы синхронизации генератора ( $D = 0$ ) дисперсия флюктуаций фазы является малой, если величина  $D_c > 1$ . Отсюда находим оценку для минимальной мощности синхронизирующего сигнала

$$P_{\text{вх. мин}} > G^2 P_0^2 d_r^2 B^2 / 16 P_{\text{ген}}, \quad (8)$$

где  $P_{\text{ген}}$  — мощность выходных регулярных колебаний генератора,  $P_0$  — мощность пучка. При выводе соотношения (8) использована связь  $F_0^2 = G P_{\text{ген}} / P_0$  [1]. Конкретизируем выражение (8) для приборов с открытыми колебательными системами с гауссовым распределением поля [3]. Вычисляя коэффициенты  $D_0$ ,  $D_1$ , входящие в выражения для  $B$ , находим

$$P_{\text{вх. мин}} > \frac{\pi (G/2)^6 P_0^2 d_r^2}{16 P_{\text{ген}}} \left( \frac{S_l}{l_0^2} + \frac{S_v \Phi_0^2}{4v_0^2} \right)^2 e^{-\Phi_s^2 \omega^2}. \quad (9)$$

Отметим существенную зависимость минимальной мощности синхронизирующего сигнала от параметра эффективности взаимодействия пучка с полем  $G$  и ее уменьшение с уменьшением полосы пропускания резонатора  $d_r$ . При анализе зависимости  $P_{\text{вх. мин}}$  от параметра пространственного рассинхронизма  $\Phi_s$  необходимо учитывать, что максимальная мощность генерации достигается при вполне определенных значениях  $\Phi_s$  [2]. Конкретные расчеты, проведенные для параметров, типичных для генераторов дифракционного излучения, дают следующую оценку:  $P_{\text{вх. мин}} > 10^{-16}$ , т. е. на практике естественные флюктуации пучка в таких приборах не накладывают существенных ограничений на уровень синхронизирующего сигнала.

**Список литературы:** 1. *Вавриш Д. М., Третьяков О. А.*, Теория резонансных усилителей с длительным взаимодействием // Изв. вузов. Радиофизика. Ч. I. 1984. Т. 27. № 2. С. 238—249; Ч. II. 1985. Т. 28. № 1. С. 107—116. 2. *Вавриш Д. М.* Особенности работы резонансных усилителей с распределенным взаимодействием и предварительной модуляцией пучка // Радиотехника и электрон. 1985. Т. 30. № 7. С. 1391—1396. 3. *Вавриш Д. М.* Расчет коэффициента шума резонансных приборов на эффекте дифракционного излучения // Радиотехника. 1985. Вып. 75. С. 61—67. 4. *Малахов А. Н.* Флюктуации в автоколебательных системах. М., 1968. 660 с. 5. *Стратокович Р. Л.* Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М., 1961. 557 с.

Поступила в редколлегию 30.05.88

А. Б. БЕЛОГОРЦЕВ, канд. физ.-мат. наук, Д. М. ВАВРИВ,  
д-р физ.-мат. наук, М. Ф. ПОЛЯШЕНКО, О. А. ТРЕТЬЯКОВ,  
д-р физ.-мат. наук

## О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В МНОГОМОДОВЫХ СИСТЕМАХ

Возникновение случайных колебаний в радиофизических системах возможно не только в результате проявления естественных флуктуаций, но может быть также следствием нелинейных свойств детерминированных систем. Установлено, что способностью генерировать хаотические колебания обладает широкий класс нелинейных радиофизических объектов [1; 2]. Большинство своих свойств хаотические колебания не отличаются от истинно случайных: их корреляционные функции убывают экспоненциально, спектры мощности непрерывны и т. д. В то же время существует ряд свойств, которые разграничивают эти классы случайных процессов, например размерность инвариантных множеств в фазовых пространствах, являющихся образами таких процессов. В этой связи представляется важным провести сопоставление хаотических колебаний и классических моделей случайных процессов по их статистическим характеристикам. Наиболее подробно с этой точки зрения изучены одномерные отображения, для которых в ряде случаев удается провести достаточно полное аналитическое исследование [2; 3]. Вероятностные свойства хаотических колебаний, возникающих в реальных радиофизических системах, практически не изучены.

Приведены результаты исследований статистических характеристик стохастических колебаний, возникающих в одной из типичных моделей динамики поля в многомодовых радиофизических системах.

Рассмотрим совокупность двух нерезонансно взаимодействующих мод, одна из которых является пассивной (затухает в линейном приближении), а другая — активной (нарастает в линейном приближении). Относительно собственных частот мод  $\omega_p$ ,  $\omega_a$  предположим, что они не находятся в сильном рациональном отношении и, следовательно, резонансное взаимодействие между ними отсутствует. Тогда при возбуждении данной системы мод внешним гармоническим источником с частотой  $\omega_0$ , близкой к частоте  $\omega_p$  пассивной моды, динамика колебаний в приближении кубической нелинейности описывается следующей системой укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= (\alpha_p - \gamma_p p^2 - \mu_p a^2) p + R \sin \varphi; & (1) \\ p \frac{d\varphi}{d\tau} &= (-\Delta + \beta p^2 + \kappa a^2) p + R \cos \varphi; \\ \frac{da}{d\tau} &= (\alpha_a - \gamma_a a^2 - \mu_a p^2) a. \end{aligned}$$

Здесь  $p$ ,  $a$  — амплитуды пассивной и активной мод;  $\varphi$  — фаза колебаний пассивной моды;  $\tau$  — медленное время;  $\alpha_p < 0$ ,  $\alpha_a > 0$  — пара-

метры, определяющие устойчивость мод в линейном приближении; параметры  $\gamma_p, \gamma_a$  характеризуют зависимость диссипации энергии системы от амплитуд мод;  $\mu_p, \mu_a$  — параметры диссипативной, а  $\kappa$  — реактивной связи мод;  $\beta$  — параметр неизохронности колебаний пассивной моды;  $R$  — нормированная амплитуда внешнего сигнала;  $\Delta$  — нормированная расстройка между частотами  $\omega_0$  и  $\omega_p$ . Системы типа (1) широко применяются для анализа межмодовых взаимодей-

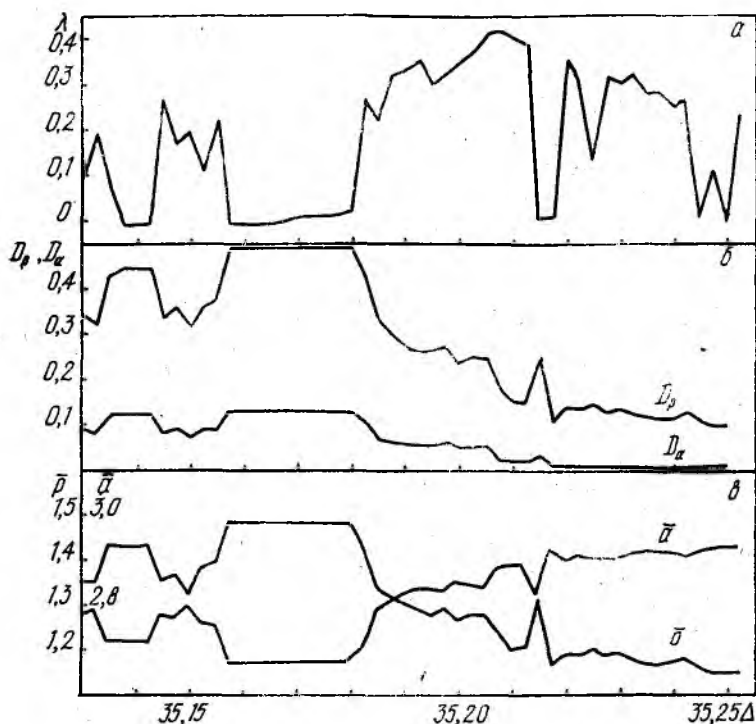


Рис. 1

ствий в электронике СВЧ [4]. Возможность существования хаотических колебаний в моделях с нерезонансным взаимодействием впервые была показана в работе [5].

Система уравнений (1) характеризуется довольно большим числом параметров. Ясно, что провести полное ее исследование при всех возможных комбинациях значений параметров невозможно. Поэтому ограничимся анализом зависимости свойств хаотических колебаний от параметра частотной расстройки  $\Delta$ , зафиксировав остальные таким образом:  $\alpha_p = -1$ ;  $\alpha_a = 1$ ;  $\gamma_p = \gamma_a = \mu_p = \mu_a = 0,1$ ;  $\beta = \kappa = 3$ ;  $R = 6$ . Существование хаотических колебаний в системе (1) показано на рис. 1, а, где приведена рассчитанная численно по стандартной методике [1; 2] зависимость максимального характеристического показателя Ляпунова  $\lambda$  от  $\Delta$ . Она указывает на наличие странного аттрактора в не-

которых интервалах изменения  $\Delta$ , в которых величина  $\lambda$  положительна.

Определение статистических свойств возбуждаемых хаотических колебаний предполагает проведение статистического усреднения величин, характеризующих такие колебания, по ансамблю. В данном случае ансамбль реализаций случайного процесса представляет собой решения уравнений (1), отличающиеся начальными значениями величин  $p$ ,  $\varphi$ ,  $a$ . Отметим, что локальная неустойчивость движения на странном аттракторе приводит к тому, что распределение фазовых траекторий на нем с течением времени стремится к инвариантному. Это свойство исключает зависимость статистических характеристик аттрактора от начального состояния ансамбля, что подтверждается результатами подробных численных экспериментов. Однако при проведении расчетов необходимо учитывать, что выбор начального распределения реализаций оказывает существенное влияние на длительность переходных процессов, а следовательно, и на время расчета статистических характеристик на ЭВМ. В частности, выбор начальных условий в некоторой малой окрестности странного аттрактора, которые были получены путем возмущения одной фазовой траектории, позволял в несколько раз сократить время расчета статистических средних по сравнению с другими способами выбора начальных условий.

Основной вопрос, от которого зависят как методика определения статистических характеристик, так и интерпретация полученных результатов, — вопрос о стационарности хаотических колебаний. Поскольку уравнения (1) автономны и, следовательно, инвариантны относительно произвольного сдвига по времени, можно предположить, что конечномерные распределения порождаемых ими хаотических процессов не зависят от времени. Однако нельзя заранее исключить возможность нестационарности таких процессов, которая может быть вызвана, например, «пульсациями» во времени странного аттрактора в силу динамических свойств системы (1). Для выяснения этого вопроса были проведены численные исследования, на характерных результатах которых мы и остановимся.

Стационарность процесса в широком смысле по определению означает независимость его математического ожидания от времени и инвариантность его корреляционной функции относительно произвольного временного сдвига. Для установления характера такой зависимости применительно к системе (1) проводился расчет средних по ансамблю значений  $p$ ,  $\varphi$ ,  $a$ , а также их дисперсий и законов распределения плотностей вероятности. Строились зависимости амплитуды  $P$  и фазы  $\Phi$  математического ожидания случайного процесса  $pe^{i\varphi}$  от времени в точке  $\Delta = 35,2$ , соответствующей режиму хаотических колебаний при размерах ансамблей от 200 до 3200 реализаций на отрезке безразмерного времени  $60 \leq \tau \leq 105$ . В полученных зависимостях не проявляется выраженной периодичности по времени. Кроме того, с увеличением размера ансамбля  $N$  значение среднего квадратичного отклонения  $\epsilon$  величин  $P$  и  $\Phi$  от их постоянных составляющих на рассматриваемом интервале времени изменяется пропорционально  $N^{-\alpha}$ , где

$\alpha \approx \frac{1}{2}$ . Например, значение среднего квадратичного отклонения  $\varepsilon$  величины  $P(\tau)$  для  $N = 200$  равно 0,045, при  $N = 800$  —  $\varepsilon = 0,018$ , а при  $N = 3200$  величина  $\varepsilon$  уменьшается до  $\approx 10^{-2}$ , что соответствует примерно 0,8 % от постоянной составляющей амплитуды  $P$ . В соответствии с общими положениями математической статистики это дает основание считать, что имеющиеся флуктуации величины  $P$  во времени обусловлены исключительно эффектом конечности ансамбля реализаций, что неизбежно в численных расчетах. Аналогичные закономерности изменения во времени в зависимости от  $N$  имеют место

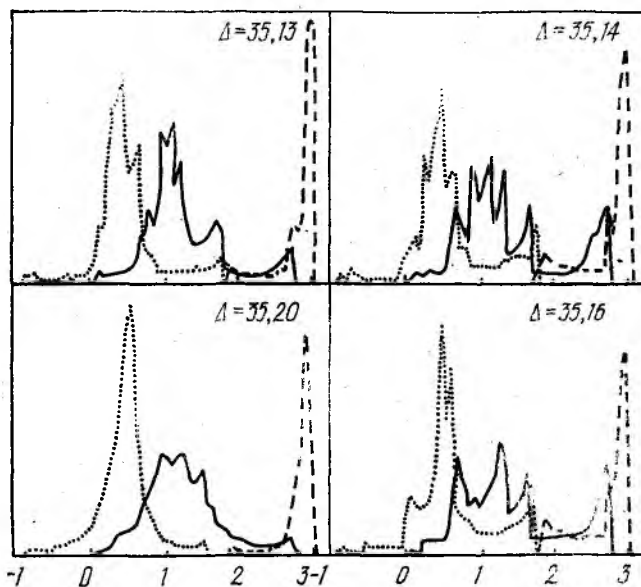


Рис. 2

и для других усредненных по ансамблю величин. Тем самым можно утверждать, что стохастические колебания, соответствующие странному аттрактору системы (1), стационарны.

Совпадение с точностью до 1 % средних по ансамблю величин со средними по времени, вычисленными по отдельным реализациям, свидетельствует об эргодичности хаотических колебаний. Это позволяет рассчитывать статистические характеристики процесса путем анализа только одной реализации. На рис. 1, б, в показаны зависимости от  $\Delta$  средних значений амплитуд обеих мод  $\bar{p}$  и  $\bar{a}$ , а также их дисперсий. Эти величины рассчитывались усреднением по интервалу времени  $\tau$ , равному 2500, при котором погрешность вычисления не превышает 1—2 %. Этот интервал на два порядка больше характерного времени, в течение которого фазовая траектория отслеживает крупномасштабную структуру странного аттрактора ( $T_{\text{хар}} \approx 25$ ).

Из приведенных на рис. 1, б, в зависимостей следует наличие определенной корреляции между моментами 1-го и 2-го порядков и показателем Ляпунова. Отметим, что в областях значений параметра частотной расстройки  $\Delta$ , соответствующих хаотическому поведению решений системы (1), дисперсия этих процессов меньше, чем в «окнах порядка».

Плотности распределения вероятностей амплитуд пассивной моды (сплошные линии), активной моды (штриховые линии) и фазы  $\varphi$  (точечные линии) представлены на рис. 2 для ряда характерных значений  $\Delta$ , соответствующих хаотическим ( $\Delta = 35,13; 35,2$ ) и регулярным ( $\Delta = 35,14; 35,16$ ) колебаниям. Распределение амплитуды пассивной моды в областях порядка имеет вид суперпозиции  $\beta$ -распределений с параметрами  $0 \leq \alpha, \beta < 1$ . В области хаоса провалы  $\beta$ -распределений заполняются, и кривую плотности распределения вероятности можно аппроксимировать гамма-распределением, хотя такая аппроксимация является грубой и отвергается критериями согласия даже при малых уровнях значимости.

Таким образом, проведенные исследования показали, что возникающие в системе (1) стохастические колебания стационарны и, следовательно, для их анализа можно использовать хорошо разработанный математический аппарат теории стационарных случайных процессов. Вероятностные распределения хаотических колебаний описываются известными законами распределения вероятностей неудовлетворительно. Их адекватное математическое отражение нуждается в изучении и разработке новых математических моделей случайных процессов.

Список литературы: 1. Анищенко В. С. Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч. 1, 2. Саратов. 1985. 224 с.; 1986. 200 с. 2. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М. 1987. 424 с. 3. Ulam S. M., von Neumann J. On Combination of Stochastic and Deterministic Processes // Bull. Amer. Math. Soc. 1947. Vol. 53, No 11. P. 1120. 4. Нусинович Г. С. К теории синхронизации многомодовых электронных СВЧ генераторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 11. С. 1689—1698. 5. Белогорцев А. Б., Вавриш Д. М., Третьяков О. А. Влияние пассивной моды на устойчивость синхронных колебаний // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 11. С. 36—39.

Поступила в редколлегию 07.05.88

УДК 621.385

В. Е. КОНОВАЛОВ, П. В. НЕШМОНИН, В. В. КРИВОШЕЯ

### ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ МИНИМУМА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛОВО

Необходимое условие генерации в ЛОВО — обращение в нуль высокочастотного поля в некотором сечении пространства взаимодействия, удаленном от выхода. В том случае, когда высокочастотное поле с удалением от выхода достигает положительного минимума,

ЛОВО может работать в усилительном режиме, если подать входной сигнал в сечении пространства взаимодействия, соответствующем этому минимуму. Распределение амплитуды высокочастотного поля вдоль пространства взаимодействия получается в результате численного решения системы нелинейных уравнений, соответствующих математическим моделям ЛОВО различной строгости [1; 2]. При этом высокочастотное поле — сложная функция продольной координаты, рабочих параметров и граничных условий. Практический интерес имеет нахождение зависимости генерационного или усилительного режимов от рабочих параметров. В общем случае такая зависимость может трактоваться как функция отклика и представлять собой гиперповерхность в  $n$ -мерном пространстве рабочих параметров и граничных условий, а мерность определяется числом варьируемых факторов, т. е. рабочих параметров и граничных условий.

В качестве первого приближения в описании искомой зависимости можно выбрать полиномиальную модель первого порядка:

$$y = \sum_{i=0}^n a_i x_i,$$

где  $y$  — функция отклика, равная амплитуде высокочастотного поля в первом положительном минимуме (усилительный режим) или равная нулю (генерационный режим);  $x_i$  — варьируемые факторы, кроме  $x_0 = 1$ ,  $a_i$  — эффект  $i$ -го фактора, а  $a_0$  — свободный член.

Для нахождения коэффициентов  $a_i$  в записанном уравнении регрессии необходимо выбрать варьируемые факторы модели и произвести расчет функции отклика в некоторых точках факторного эксперимента. В качестве математической модели ЛОВО используем одномерную нелинейную модель [1; 3] со следующими рабочими параметрами и граничными условиями: параметр радиуса действия силы пространственного заряда  $B = 1,0$ ; параметр «холодных» потерь  $d = 0$ ; интервалы варьирования параметров скорости, пространственного заряда и усиления соответственно следующие:  $b = 1,5 - 2,0$ ;  $QC = 0 - 0,25$ ;  $C = 0,05 - 0,1$ ; на выходе безразмерная амплитуда высокочастотного поля варьируется  $A_0 = 0,5 - 1,0$ ; ее производная по продольной координате  $\left. \frac{dA(y)}{dy} \right|_{y=0} = 0$ ; сдвиг фазы между «горячей» волной и волной, движущейся с невозмущенной скоростью пучка,  $\theta(0) = 0$ ; производная по продольной координате этого фазового сдвига  $\left. \frac{d\theta(y)}{dy} \right|_{y=0} = -b$ ; переменная скорость пучка  $U(0, \Phi_0) = 0$ ; дискретизация начальной фазы  $\varphi(0, \Phi_{0,j}) = \Phi_{0,j} = \frac{2\pi j}{m}$ , где  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ . Тогда варьируемым фактором полиномиальной модели  $x_1, x_2, x_3, x_4$  соответствуют следующие граничные условия и рабочие параметры математической модели ЛОВО —  $A_0, b, QC, C$ . Переход от значений рабочих параметров и граничного условия для амплитуды высокочастотного по-

ля на выходе к  $x_i$  и обратно выполняется по соотношениям кодировки и декодировки соответственно:

$$x_i = \frac{D_i - \frac{D_{i\max} + D_{i\min}}{2}}{\frac{D_{i\max} - D_{i\min}}{2}};$$

$$D_i = \frac{D_{i\max} + D_{i\min}}{2} + x_i \frac{D_{i\max} - D_{i\min}}{2}.$$

Здесь  $D_i$  — значение рабочего параметра или граничного условия.

С целью оценки чувствительности выходной зависимой переменной к вариации каждого фактора предпочтительно применять полный факторный эксперимент типа  $2^n$ , где  $n$  — число варьируемых на двух уровнях факторов. При этом граничные значения интервалов варьирования рабочих параметров соответствуют верхним (+1) и нижним (−1) уровням факторов. Такой план будет содержать число экспериментов, равное  $2^n$ , т. е. в нашем случае 16. Запишем матрицу планирования, задающую координаты точек, в которых выполняется машинный эксперимент для нахождения  $y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ): (1),  $a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, abcd$ . Здесь для обозначения верхних уровней факторов  $x_1, x_2, x_3, x_4$  используются буквы латинского алфавита  $a, b, c, d$ , а (1) — обозначает опыт, в котором все факторы находятся на нижнем уровне [4].

Для сокращения числа машинных экспериментов, пренебрегая эффектами взаимодействия нескольких факторов, перейдем к плану дробного факторного эксперимента типа  $2^{4-1}$ , являющегося полурепликой полного факторного эксперимента  $2^4$ . Поскольку при использовании предпочтение отдается дробным факторным планам с наибольшей разрешающей способностью, то выберем генерирующее соотношение для построения плана  $2^{4-1}$  в виде  $x_4 = x_1 x_2 x_3$  с определяющим контрастом, характеризующим, с какими факторами смешана оценка некоторого данного фактора,  $I = x_1 x_2 x_3 x_4$  [5]. В результате получим матрицу планирования дробного факторного эксперимента с разрешающей способностью IV, т. е.  $2^{4-1}_{IV}$ , представленную в таблице.

$x_0$	План				$y_A$	$y_B$	Кодовое обозначение
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$			
+	−	−	−	−	0,08	0,88	(1)
+	+	+	−	−	0,23	0,80	$ab$
+	+	−	+	−	0,46	1,22	$ac$
+	−	+	+	−	0,16	1,02	$bc$
+	+	−	−	+	0,63	0,54	$ad$
+	−	+	−	+	0,09	0,68	$bd$
+	−	−	+	+	0,09	0,88	$cd$
+	+	+	+	+	0,34	1,12	$abcd$

Знаком «+» и «-» обозначены верхний и нижний уровни варьируемых факторов. В столбце  $y_A$  представлены данные расчета амплитуды высокочастотного поля в сечениях первых минимумов распределения поля вдоль пространства взаимодействия ЛОВО, полученные для значений рабочих параметров и граничного условия согласно точкам плана дробного факторного эксперимента типа  $2_{IV}^{4-1}$ . В столбце  $y_L$  приведены отстояния указанных выше минимумов от выхода ЛОВО в нормированных единицах длины  $2\pi CN$ , где  $C$  — параметр усиления;  $N$  — отношение продольной координаты к длине замедленной волны. Общее число точек плана  $2_{IV}^{4-1}$  вдвое меньше, чем для плана полного факторного эксперимента ( $M = 8$ ).

Расчет коэффициентов полиномиальной модели выполняется по формуле

$$b_i = \frac{1}{M} \sum_i^M x_{ji} y_j.$$

Тогда полиномиальные модели для минимума поля  $y_A$  и отстояние минимума поля от выхода ЛОВО  $y_L$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} y_A &= 0,261 + 0,155x_1 - 0,055x_2 + 0,002x_3 + 0,027x_4; \\ y_L &= 0,892 + 0,027x_1 + 0,012x_2 + 0,016x_3 - 0,087x_4. \end{aligned}$$

Об адекватности представления результатов полиномиальной моделью можно судить на основании  $F$ -критерия [5]. Для этого вычисляют  $F$ -отношение:

$$F = \frac{s_R^2}{s_y^2}$$

и проверяют гипотезу об адекватности модели путем сопоставления расчетного значения  $F$  со значением  $F_{кр}$ , найденным из таблиц, 95%-го  $F$ -распределения Фишера при заданных степенях свободы  $\varphi_1$  и  $M - 1$ . Здесь

$$\begin{aligned} s_R^2 &= \frac{S_R^2}{\varphi_1} = \frac{\sum_{j=1}^M (\hat{y}_j - y_j)^2}{M - (n + 1)} \text{ — остаточная дисперсия;} \\ s_y^2 &= \frac{1}{M - 1} \sum_{j=1}^M (y_j - y)^2 \text{ — дисперсия, характеризующая} \\ &\quad \text{ошибку эксперимента;} \end{aligned}$$

$\varphi_1 = M - (n + 1)$  — число степеней свободы эксперимента;  $n + 1$  — число оцениваемых коэффициентов полинома;  $M - 1$  — число степеней свободы при определении дисперсии  $s_y^2$ ;  $y_j$  — результат  $j$ -го машинного эксперимента;  $\hat{y}_j$  — значение, рассчитанное по полиномиальной модели для  $j$ -й точки плана;  $y$  — выбранное среднее по всем результатам машинного эксперимента.

Если  $F_{кр} \geq F$ , модель считается адекватной, а при  $F > F_{кр}$  гипотеза об адекватности отклоняется. В нашем случае при степенях свободы  $\varphi_1 = 3$  и  $M - 1 = 7$   $F_{кр} = 4,35$  и превосходит расчетные значения  $F$ -отношений для обеих моделей  $\hat{y}_A$  и  $\hat{y}_L$ , равные 0,53 и 0,4 соответственно, — модели адекватны.

Кроме того, может быть выполнена проверка значимости коэффициентов модели. Коэффициент  $a_i$  считается значимо отличающимся от нуля, если  $|a_i| > t_{кр} s_i$ , где  $t_{кр}$  — критическое значение распределения Стьюдента для заданного уровня значимости  $\alpha$  и  $\varphi_1$  степеней свободы (если оценка  $\hat{s}_i^2$  имеет  $\varphi_1$  степеней свободы). Оценки  $\hat{s}_i^2$  дисперсий  $\sigma_i^2$  величин  $a_i$  получают по формуле  $\hat{s}_i^2 = C_{ii} s_R^2$ , где  $C_{ii}$  —  $i$ -й элемент главной диагонали дисперсионной матрицы  $C = (x^T x)^{-1}$ ,  $x$  — матрица планирования (таблица).

Проверка значимости коэффициентов при  $1 - \alpha = 0,9$ ,  $\varphi_1 = 3$  показывает, что коэффициенты  $a_2$ ,  $a_3$  и  $a_4$  модели  $\hat{y}_A$  и  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_4$  модели  $\hat{y}_L$  незначимы и, следовательно, могут быть исключены из модели, так как  $t_{кр} s_i$  для обеих моделей равна примерно 0,12.

Окончательно получаем  $\hat{y}_A = 0,261 + 0,155x_1$ ;  $\hat{y}_L = 0,292 + 0,167x_3$ . Разумеется, что представление сложного характера гиперповерхности отклика с овражными ситуациями полиномом первого порядка не может быть точным. Его следует рассматривать как первое приближение, позволяющее сократить затраты для поиска экстремумов, в окрестности которых значительно точнее функцию отклика опишут полиномы более высокого порядка, например второго или третьего. Кроме того, не формализован выбор интервалов варьирования параметров математической модели и, следовательно, остается разумная свобода в их выборе. Тем не менее сравнение результатов машинного эксперимента, полученных в работе [3], с расчетными значениями по приведенным моделям показывает их удовлетворительное соответствие.

Как легко видеть из полиномиальных моделей, в заданных интервалах варьирования рабочих параметров  $b$ ,  $QC$ ,  $C$  и граничного условия  $A_0$  на амплитуду высокочастотного поля в минимуме его распределения вдоль пространства взаимодействия ЛОВО наибольшее влияние оказывает выбор  $A_0$ , а на отстояние минимума от выхода — параметр пространственного заряда  $QC$ .

**Список литературы.** 1. Роу Дж. Теория нелинейных явлений в приборах сверхвысоких частот: Пер. с англ. М., 1969. 615 с. 2. Кац А. М., Ильина Е. М., Манькин И. А. Нелинейные явления в СВЧ приборах О-типа с длительным взаимодействием. М., 1975. 296 с. 3. Коновалов В. Е., Нешмонин П. В., Молчанова О. Г. Регрессионный анализ генерационного режима ЛОВО // Радиотехника. 1986. Вып. 79. С. 115—118. 4. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы планирования эксперимента: Пер. с англ. М., 1981. 520 с. 5. Хартман К., Лецкий Э., Шефер В. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов: Пер. с нем. М., 1977. 552 с.

Поступила в редколлегию 17.08.87

И. А. ВЯЗЬМИТИНОВ, С. С. ВЯЗЬМИТИНОВА,  
В. А. РЕЗУНЕНКО, канд. физ.-мат. наук

### ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДИПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА

В центр идеально проводящей сферы радиуса  $a$  с круговым отверстием, измеряемым полярным углом  $\Theta_0$ , поместим начало декартовой и сферической систем координат. На оси  $oz$  симметрии сферы на расстоянии  $b$  от начала координат разместим электростатический диполь, момент  $p$  которого направим параллельно оси  $ox$ . Найдем потенциал диполя при наличии сферы с отверстием. Для решения задачи применим модификацию методов [1; 2], заключающуюся в новом подходе к обращению матричного оператора задачи и отысканию возникающих констант.

Потенциал  $\varphi_0$  источника и потенциалы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  вторичных полей представим рядами Фурье:

$$\varphi_0 = \frac{p^{(1)}}{4\pi} \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} F(n) P_n^1(\cos \Theta) \frac{1}{b} \begin{cases} \frac{1}{r} \left(\frac{b}{r}\right)^n, & b < r, \\ \frac{1}{b} \left(\frac{r}{b}\right)^n, & b > r; \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi_1 = \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n^1(\cos \Theta) r^n, \quad r < a; \quad (2)$$

$$\varphi_2 = \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} B_n P_n^1(\cos \Theta) \frac{1}{r^{n+1}}, \quad (3)$$

где  $P^{(1)} = |\vec{P}|$ ;  $F(n) = 1$  для диполя, размещенного выше начала координат и  $F(n) = (-1)^{n-1}$  для диполя, размещенного ниже начала координат;  $P_n^1(\cos \Theta)$  — присоединенные функции Лежандра первого рода первого порядка степени  $n$  от аргумента  $\cos \Theta$ . В целях отыскания коэффициентов  $B_n$  потенциала  $\varphi_2$  (3) из граничных условий установившем систему функциональных уравнений для диполя, размещенного вне сферы с отверстием ( $b > a$ ):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) D_n P_n^{(1)}(\cos \Theta) = 0, \quad 0 < \Theta < \Theta_0; \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{D_n + e_n^{(1)}\} P_n^1(\cos \Theta) = 0, \quad \Theta_0 < \Theta < \pi,$$

где

$$D_n = \frac{B_n}{a^n}, \quad e_n^{(1)} = \frac{p^{(1)}}{4\pi} F(n) \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{b}\right)^n; \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Решение системы (4) будем искать в гильбертовом пространстве числовых последовательностей, определяемом условием

$$\sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2 n^2 < \infty, \quad (6)$$

обеспечивающим требуемое поведение поля в окрестности ребра [3]. Проинтегрируем почленно каждое уравнение в (4) и, используя соотношение

$$P_n^1(\cos \Theta) = \frac{d}{d\Omega} P_n(\cos \Theta),$$

получим систему функциональных уравнений по полиномам Лежандра  $P_n(\cos \Theta)$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) D_n P_n(\cos \Theta) = c_1, \quad 0 < \Theta < \Theta_0; \quad (7a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{D_n + e_n^{(1)}\} P_n(\cos \Theta) = c_2, \quad \Theta_0 < \Theta \leq \pi. \quad (7b)$$

В (7a), (7b) константы  $c_1, c_2$  интегрирования подлежат определению. Воспользовавшись известным равенством

$$-(2n+1) P_n(\cos \Theta) \sin \Theta = P'_{n+1}(\cos \Theta) - P'_{n-1}(\cos \Theta),$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $\Theta$ , и проинтегрировав почленно уравнение (7a), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n [P_{n+1}(\cos \Theta) - P_{n-1}(\cos \Theta)] = e_1 \cos \Theta + c_3, \quad 0 < \Theta < \Theta_0. \quad (8)$$

В уравнения (7b) и (8) подставим вместо  $P_n(\cos \Theta)$  их интегральные представления Мелера—Дирихле

$$P_n(\cos \Theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\Theta} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi \, d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \Theta)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi \, d\varphi}{(\cos \Theta - \cos \varphi)^{1/2}},$$

учтя, что  $1 = P_0(\cos \Theta)$ ,  $\cos \Theta = P_1(\cos \Theta)$ .

Затем в (7b), (8) перенесем все слагаемые налево, меняя порядки суммирования и интегрирования в обоих уравнениях и объединяя все слагаемые под знаком одного интеграла, получаем вместо сумматорных уравнений интегральные уравнения типа Абеля [4]:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\varphi) \, d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \Theta)^{1/2}} = 0; \quad \int_0^{\pi} \frac{g(\varphi) \, d\varphi}{(\cos \Theta - \cos \varphi)^{1/2}} = 0.$$

Эти уравнения имеют единственные нулевые решения

$$f(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \Theta_0; \quad g(\varphi) = 0, \quad \Theta_0 < \varphi \leq \pi. \quad (9)$$

Записывая явный вид  $f(\varphi)$  и выполняя линейные  $\diamond$  преобразования вместо уравнения  $f(\varphi) = 0$  (9) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi \sin \varphi = -\frac{1}{2} c_1 \cos \frac{3}{2} \varphi - \frac{1}{2} c_3 \cos \frac{1}{2} \varphi, \quad 0 < \varphi < \theta_0. \quad (10)$$

Упростим уравнение (10). Для этого покажем, что константы  $c_1$  и  $c_3$  связаны соотношением  $c_1 + c_3 = 0$ . Действительно, в силу принадлежности коэффициентов  $D_n$  (10) гильбертовому пространству  $l_2$ , ряд в (10) сходится на  $[0, \Pi]$  и имеет непрерывную сумму. Поэтому устремим переменную  $\varphi$  в (10) к нулю и получим требуемое соотношение для  $c_1, c_3$ . Исключим константу  $c_3$  из (10), подставив вместо  $c_3$  равную ей константу  $-c_1$ . Приведя разность  $\cos 3/2\varphi$  и  $\cos 1/2\varphi$  к виду, удобному для логарифмирования, получим вместо (10) следующее уравнение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi = c_1 \sin \frac{1}{2} \varphi, \quad 0 < \varphi < \theta_0. \quad (11)$$

Рассмотрим уравнение  $g(\varphi) = 0$  из (9). Преобразовав его аналогично уравнению для  $f(\varphi)$ , запишем это уравнение так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi = c_2 \sin \frac{1}{2} \varphi - \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi, \quad \theta_0 < \varphi < \pi. \quad (12)$$

Ряды в (11), (12) допускают почленное дифференцирование. Выполнив дифференцирование, устанавливаем эквивалентную исходной системе (4) систему функциональных уравнений по элементарным функциям, которую представим следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi = \\ & = \begin{cases} \frac{1}{2} c_1 \cos \frac{1}{2} \varphi, & 0 < \varphi < \theta_0; \\ \frac{1}{2} c_2 \cos \frac{1}{2} \varphi - \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)} \left(m + \frac{1}{2}\right) \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi, & \theta_0 < \varphi < \pi. \end{cases} \quad (13) \end{aligned}$$

В (13) слева и справа содержатся ряды Фурье в  $l_2$  по ортогональной на  $[0, \Pi]$  системе функций. Считая правую часть в (13) известной функцией, обратим левую часть и получим

$$\begin{aligned} D_n &= \left[ \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \beta_{n, 0} (e_1 - e_2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)} \left(m + \frac{1}{2}\right) [\pi \delta_{n, m} - \beta_{n, m}] \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \right. \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\beta_{n,m} = \frac{\sin(n-m)\Theta_0}{n-m} + \frac{\sin(n+m+1)\Theta_0}{n-m};$$

$$\frac{\sin(n-m)\Theta_0}{n-m} \Big|_{n-m} = \Theta_0; \quad (15)$$

$\delta_{n,m}$  — символ Кронекера.

Найдем константы  $c_1, c_2$ . Для этого построим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Умножая левые и правые части (13) на  $\cos(\varphi/2)$  и интегрируя по аргументу  $\varphi$  на соответствующих интервалах изменения  $\varphi$ , получим первое уравнение системы. Второе уравнение системы выведем из (11), (12). Для этого умножим левые и правые части (11), (12) на  $\sin(\varphi/2)$  и проинтегрируем по  $\varphi$ . Сложив левые и правые части проинтегрированных уравнений, получим второе уравнение системы. В итоге система приобретает вид

$$c_1\beta_{0,0} + c_2|\pi - \beta_{0,0}| = - \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)}(2m+1)\beta_{m,0}; \quad (16)$$

$$c_1\alpha_{0,0} + c_2|\pi - \alpha_{0,0}| = - \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)}\alpha_{m,0},$$

где

$$\sigma_{n,m} = \frac{\sin(n-m)\Theta_0}{n-m} - \frac{\sin(n+m+1)\Theta_0}{n+m+1}. \quad (17)$$

Из (16) следует, что при  $\Theta_0 = 0$  или  $\Theta_0 = \Pi$  константы  $c_1, c_2$  равны нулю. Если  $\Theta_0 \neq 0, \Theta_0 \neq \Pi$ , то определитель матрицы системы (16) отличен от нуля и система имеет нетривиальное единственное решение. Найдя это решение, запишем для (14) разность констант  $c_1, c_2$ :

$$c_1 - c_2 = (2 \sin \Theta_0)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)} [\alpha_{m,0} - (2m+1)\beta_{m,0}]. \quad (18)$$

Подставим (18) в (14), в итоге получим явное решение системы функциональных уравнений (4) по присоединенным функциям Лежандра  $P_n^1(\cos \Theta)$ :

$$D_n = [\psi(2n+1)]^{-1} \times \quad (19)$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(1)} \{t_{m,0}\beta_{n,0} - (2m+1)[\pi\delta_{n,m} - \beta_{n,m}]\},$$

где

$$t_{m,0} = \frac{\alpha_{m,0} - (2+1)\beta_{m,0}}{\sin \Theta_0};$$

$e_m^{(1)}$  введено в (5);  $\beta_{m,0}$  — (15);  $\alpha_{n,m}$  — (17).

Этим завершено полное обращение матричного оператора задачи. Отметим, что в классических работах, например [5], матричные операторы родственных задач обращаются частично и решение задачи сводится к исследованию интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Ряд в (19) сходится достаточно быстро для любых значений параметров  $\Theta_0, a, b$  ( $a < b$ ), что позволяет эффективно численно и аналитически исследовать любые характеристики структуры.

Для аналитических выкладок удобно использовать асимптотическую оценку искомых коэффициентов  $D_n$  (19) при  $n \rightarrow \infty$ :

$$D_n = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \Theta_0}{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} C(a, b, \Theta_0) + o(n^{-2}). \quad (20)$$

В (20) множитель  $C(a, b, \Theta_0)$  не зависит от  $n$ , является непрерывной функцией от  $\Theta_0$  и имеет вид

$$C(a, b, \Theta_0) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{(1)} \left[ t_{m,0} \cos \frac{1}{2} \Theta_0 + (2m+1) \cos \left(m + \frac{1}{2}\right) \Theta_0 \right].$$

Коэффициенты  $D_n$ , через которые выражены в (5) коэффициенты  $B_n$  потенциала  $\varphi_2$ , связаны простыми соотношениями с коэффициентами  $A_n$  потенциала  $\varphi_1$  внутри сферы:

$$A_n = D_n a^{-n-1} + e_n^{(1)} a^{-n}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (21)$$

Применяя (20), (21) для отыскания распределения поверхностной плотности заряда и опуская громоздкие преобразования, находим, что с точностью до непрерывной функции поверхностная плотность заряда пропорциональна величине  $(\Theta - \Theta_0)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\Theta > \Theta_0$ . Отсюда следует, в частности, выполнение условия на ребре.

Рассмотрим задачу о диполе, размещенном внутри сферы с отверстием ( $a > b$ ). Задавая потенциал источника и вторичные потенциалы согласно (1)–(3), получаем для отыскания коэффициентов  $\bar{D}_n$  из граничных условий систему функциональных уравнений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{(2n+1) \bar{D}_n - (2n+1) e_n^{(0)}\} P_n^1(\cos \Theta) = 0, \quad 0 \leq \Theta < \Theta; \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{D}_n P_n^1(\cos \Theta) = 0, \quad \Theta_0 < \Theta \leq \pi,$$

где

$$\bar{D}_n = \frac{B}{a^{n+1}}; \quad e_n^{(0)} = \frac{P^{(1)}}{4\pi} F(n) \frac{1}{b^2} \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}. \quad (23)$$

Решение системы (22) ищем в пространстве  $\bar{l}_2$  (6).

Обращая матричный оператор задачи аналогично задаче о диполе вне сферы, получаем явное решение системы функциональных уравнений (22):

$$\bar{D}_n = \left[ \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \right]^{-1} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(0)} \{ t_{m,0} \beta_{n,0} + (2m+1) \beta_{n,m} \}. \quad (24)$$

Это решение так же эффективно для исследования задачи, как и в предыдущем случае.

как и выше, между коэффициентами потенциалов внутри и вне сферы  $\varphi_2$  имеет место линейное соотношение, аналогичное (21)

$$A_n = \bar{D}_n a^{-n} - e_n^{(0)} a^{-d}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Если диполь, в частности, размещен в центре сферы, то согласно (23) (24) находим коэффициенты  $D_n$  потенциала  $\varphi_2$  (3) вне сферы с ответом:

$$\bar{D}_n = \frac{1}{\pi \left( n + \frac{1}{2} \right)} \cdot \frac{p^{(1)}}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \{ t_{1,0} \beta_{n,0} + 3\beta_{n,1} \}.$$

При этом соотношение (25) приобретает вид

$$A_1 = \bar{D}_1 a^{-1} - \frac{p^{(1)}}{4\pi} a^{-3}; \quad A_n = \bar{D}_n a^{-n}, \quad n \geq 2.$$

Метод обращения матричного оператора электростатической задачи, развитый в работе, успешно применим также и для решения соответствующих задач магнитостатики.

Список литературы: 1. *Радин А. М., Ревуненко В. А., Шестопалов В. П.* Излучение волн сферой с отверстием // Журн. вычислит. математики и матем. физики. 1977. 17. № 2. С. 394—406. 2. *Шестопалов В. П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. К., 1983. 252 с. 3. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М., 1974. 327 с. 4. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения М., 1960. 299 с. 5. *Collins W. D.* On same dual series equations and their application to electrostatic problems far spheroidal caps, — «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1961. 57, P. 367—384.

# СОДЕРЖАНИЕ

Волощук Ю. И., Посошенко В. А. Энергетический подход к проблеме выделения сигналов, отраженных от метеорных следов, из шума	3
Смордов П. С. Поиск псевдослучайных сигналов на основе использования корректирующих свойств модулирующих последовательностей	6
Лученко Ф. В., Рассомахин С. Г. Метод экстраполяции сигналов с ограниченным спектром	10
Стасев Ю. В. Составные фазоманипулированные сигналы с малыми первыми пиками корреляционных функций	14
Николаев Ю. И., Приходько С. И., Чистяков И. В., Снисаренко А. Г. Характеристики процедур синхронизации сверточных кодов	20
Иванов М. А., Макаренко Б. И., Яковлев И. А. Расчет помехоустойчивости высокоскоростных систем цифровой связи на программируемых микрокалькуляторах	24
Быков В. Н., Вильчинский А. С., Кулаков В. А., Султанов А. С. Помехоустойчивость автокорреляционного метода приема шумовых сигналов	32
Щербак В. И. Структурный анализ оптимальных измерителей параметров сигналов, синтезированных по критерию максимального правдоподобия.	37
Омельченко В. А., Омельченко А. В., Драган Я. П., Колесников О. А. Распознавание гауссовских периодически коррелированных случайных сигналов. Сообщение 2	42
Сныткин И. И. Статистические характеристики взаимокорреляционных свойств систем оптимальных дискретных сигналов, существующих в простых и расширенных полях Галуа $GF(p)GF(p^n)$	50
Болковой С. Н. О задаче Дирихле для нелинейно возмущенной системы уравнений Гельмгольца	55
Письменецкий В. А. Анализ структур Фурье-процессоров с помощью теоремы отсчетов	58
Гороховатский В. А. Выбор порогов в иерархических статистических алгоритмах анализа изображений	63
Горбенко И. Д., Зотов И. В., Мельничук В. П. Синтез ансамблей сигналов с заданными свойствами методом децимации	68
Королев А. В., Петухов В. А. Метод кодирования видеoinформации цифровых цветных изображений	71
Федоренко Ю. П., Федоренко В. Н. Исследование параметров пространственного распределения электронной концентрации ионосферы при помощи ее радиопросвечивания с навигационных ИСЗ	76
Мозила А. А., Хлопов Г. И., Шестопалов В. П. Траекторный спектральный анализ	86
Маслов А. Ф., Нестеров К. П., Жолобенко А. Б. Модель взаимно коррелированных радиосигналов на выходах элементов антенной решетки, работающей в неоднородной среде	93
Кравченко А. Г., Шкуруний О. К. Особенности приема антенными системами снижающегося летательного аппарата сигналов от посадочных радиомаячных систем	
Лапта С. И. Возбуждение отрезка спирально проводящего дольным диполем, расположенным на его оси	
Яцук К. П., Марков К. А. Расчет коэффициента на связанных замедляющих системах	
Громов Г. А. Влияние естественных флюктуаций уровней резонансных систем с распределенной Белогорцев А. Б., Вавриш Д. М., Поляшенко М. стических свойств хаотических колебаний в	
Коновалов В. Е., Нешмонин П. В., Кривошей В. В. минимальная модель для минимума высокочастотного поля в пространстве взаимодействия ЛОВО.	122
Вязьмитинов И. А., Вязьмитинова С. С., Резуненко В. А. Электростатический потенциал горизонтального диполя в присутствии сферического сегмента	126

