

О.В. СЫТНИК, д-р физ.-мат. наук, В.М. КАРТАШОВ, д-р техн. наук, А.А. СУПРУН
**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СЕЛЕКЦИЯ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ИСТОЧНИКОВ
 ПО СОБСТВЕННЫМ ЧИСЛАМ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ**

Введение

Проблеме пространственно-временной обработки широкополосных сигналов в адаптивных антенных решетках (ААР) уделяется большое внимание при разработке радиолокационных систем различного назначения. Способность ААР оценивать угловые направления на источники сигналов с разрешением, существенно превышающим ограничения по критерию Рэлея [1], достигается благодаря специальным методам и алгоритмам обработки с использованием статистически достоверных оценок пространственно-временной ковариационной матрицы наблюдаемых сигналов [2]. Алгоритмы Эпплбаума [3], Уидроу [4], Прони [5] MUSIC [5], Кейпона [6], Гриффитса [7] и др., разработанные в 60-е – 80-е годы прошлого столетия, и ставшие уже классическими в технике пространственно-временной обработки сигналов в ААР. В качестве моделей сигналов используют, как правило, аппроксимации узкополосных гауссовских процессов некоррелированных между собой и с собственным шумом приемников антенных элементов ААР.

При приеме широкополосных сигналов эффективность работы таких алгоритмов снижается. Для устранения этого недостатка в работе [2, 8] предложено в каждом канале ААР использовать многоотводную линию задержки, с помощью которой формируется пространственно-временная ковариационная матрица, и затем вычисляются весовые коэффициенты каждого канала ААР.

Цель настоящей работы – разработка статистически оптимальных алгоритмов пространственно-временной обработки сигналов ААР для получения эффективных оценок углового положения группы широкополосных источников сигналов.

Модель наблюдения

Рассмотрим ААР, состоящую из $M + 1$ идентичных всенаправленных широкополосных антенных элементов, расположенных на одинаковых расстояниях d друг от друга. Сигнал с антенного элемента с индексом 0 поступает на сумматор, формирующий выходной сигнал ААР без усиления, т.е. весь спектр входных сигналов, передается на выход ААР без искажений. Выходные сигналы остальных M антенных элементов проходят через многоотводные линии задержки, усиливаются усилителями с комплексными коэффициентами усиления $\dot{w}_i$, и суммируются с сигналом антенного элемента с индексом 0.

В дальней зоне ААР находятся N источников ($N < M$), излучающих сигналы мощностью s_n , где $n=1,2,...,N$. s_0 – мощность собственного теплового шума приемной системы. Направление прихода фронта волны относительно нормали к азимутальной плоскости решетки каждого из источников обозначим θ_n , центральную частоту несущей – f_0 , эффективную ширину спектра – β .

Спектральная плотность сигналов, поступающих на входы усилителей приемных каналов ААР от n -го источника, в общем виде может быть записана как

$$S_n(f) = \frac{s_n}{\beta \cdot f_0} \left[\dot{S} \left(\frac{2\Delta f}{\beta \cdot f_0} \right) + \dot{S} \left(\frac{-2\Delta f}{\beta \cdot f_0} \right) \right], \quad (1)$$

где $\Delta f = f - f_0$.

Применяя обратное преобразование Фурье и разложение в ряд Маклорена [9], представим ковариационную функцию в виде

$$R_n(t) = s_n \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{np} \frac{(\pi \beta f_0 t)^p}{p!} \cos\left(\omega_0 t + \frac{p\pi}{2}\right), \quad (2)$$

где

$$\alpha_{np} = \int_{-1}^1 \dot{S}_n(f) f^p df, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (3)$$

Очевидно, что каждому α_{np} можно поставить во взаимно однозначное соответствие p -й момент нормализованной спектральной плотности $\dot{S}_n(f)$, который пропорционален производной автоковариационной функции.

Обозначим вектор входных сигналов как $\bar{X}$

$$\bar{X} = [x_1, x_2, \dots, x_{MJ}]^T, \quad (4)$$

где верхний индекс T обозначает операцию транспонирования.

Представление ковариационной матрицы

Соответствующая ковариационная матрица

$$\bar{R} = E\{\bar{X}\bar{X}^T\}, \quad (5)$$

где $E\{\}$ – символ операции вычисления математического ожидания.

С учетом (2) ковариационная матрица (5) может быть представлена в виде

$$\bar{R} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N A_{np} \beta^n, \quad (6)$$

где нижний индекс np указывает на p -ю спектральную компоненту n -го источника сигнала.

Рассмотрим элемент (g, h) множества $\{A_{np}\}$, где g – соответствует j_g отводу от линии задержки m_g антенного элемента и h соответствует j_h отводу от линии задержки m_h антенного элемента, т.е. $g = m_g J + j_g$ и $h = m_h J + j_h$. Тогда с учетом (2) n -й источник формирует сигнал

$$\begin{aligned} |A_{np}|_{gh} &= \frac{s_n \alpha_{np} \pi^p}{p!} f_0^p [(j_g \tau + m_g \tau_n) - (j_h \tau + m_h \tau_n)]^p \times \\ &\times \cos\left[\omega_0 (j_g \tau + m_g \tau_n) - (j_h \tau + m_h \tau_n) + \frac{p\pi}{2}\right], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\tau_n = d \sin(\theta_n / c) \quad (8)$$

представляет собой задержку во времени прихода фронта плоской волны между соседними антенными элементами от n -го источника.

Для случая, когда шум приемника пренебрежимо мал, (7) можно записать как:

$$|A_{0p}|_{gh} = \begin{cases} 0, & m_g \neq m_h \\ \frac{s_0 \alpha_0 p \pi^p}{p!} [f_0 \tau (j_g - j_h)]^p, & m_g = m_h. \end{cases}$$

Подставляя (7) и (9) в (6) после некоторых преобразований получим выражение матрицы $\bar{R}$

$$\bar{R} = [\beta^0 U_0 \dots \beta^I U_I] \begin{bmatrix} E_{00} & \dots & E_{0I} \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{I0} & \dots & E_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^0 U_0^T \\ \vdots \\ \beta^I U_I^T \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $I = J/2 - 1$ и U_p , и E_{pq} имеют следующую структуру.

Набор матриц размера $(MJ \times 2M)$ со взаимно ортогональными столбцами $\bar{U}_p^T \bar{U}_q = 0$ $p \neq q$, обозначим $\bar{U}_0, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_I$ полученных процедурой ортогонализации Грамма – Шмидта [10] матриц $\bar{C}_0, \bar{C}_1, \dots, \bar{C}_I$ где

$$\begin{aligned} \bar{U}_0 &= \bar{C}_0 \\ \bar{U}_1 &= \left[\bar{I}_{MJ} - \bar{U}_0 (\bar{U}_0^T \bar{U}_0)^{-1} \bar{U}_0^T \right] \bar{C}_1 \\ &\dots \dots \dots \\ \bar{U}_I &= \left[\bar{I}_{MJ} - \sum_{p=0}^{I-1} \bar{U}_p (\bar{U}_p^T \bar{U}_p)^{-1} \bar{U}_p^T \right] \bar{C}_I, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\bar{C}_p$ определяется как:

$$\bar{C}_p = (f_0 \tau)^p \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 \tau + \frac{\pi p}{2}) & \dots & -\sin(\omega_0 \tau + \frac{\pi p}{2}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ J^p \cos(J\omega_0 \tau + \frac{\pi p}{2}) & \dots & -J^p \sin(J\omega_0 \tau + \frac{\pi p}{2}) \end{bmatrix} \otimes \bar{I}_M, \quad (12)$$

где символ $\otimes$ – символ Кронекера; $\bar{I}_M$ – единичная матрица размера $(M \times M)$.

Поскольку $\bar{C}_p$ зависит только от величины задержки сигнала в элементе и от числа элементов, то и матрицы $\bar{U}_p$ также зависят только от этих параметров. В этом случае $(2M \times 2M)$ матрица сигналов $\bar{E}_{pq} = \bar{E}_{qp}^T$, а ее разложение в ряд Маклорена [9] можно представить в виде

$$\bar{E}_{pq} = \frac{\pi^{p+q}}{p!q!} \sum_{n=0}^N s_n \alpha_{n,p+q} \bar{Q}_n \bar{Q}_n^T + o(s), \quad (13)$$

где $\bar{Q}_n^T = \bar{I}_{2M}$, если $n = 0$ и

$$\bar{Q}_n^T = \begin{matrix} \cos(\omega_0 \tau_n) \sin(\omega_0 \tau_n) & \dots & \cos(M \omega_0 \tau_n) \sin(M \omega_0 \tau_n) \\ -\sin(\omega_0 \tau_n) \cos(\omega_0 \tau_n) & \dots & -\sin(M \omega_0 \tau_n) \cos(M \omega_0 \tau_n) \end{matrix}, \text{ если } n=1, \dots, N. \quad (14)$$

Используя разложение (13) представим ковариационную матрицу наблюдаемых сигналов в виде:

$$\bar{R}_{pq}^0 = (\bar{R}_{pq}^0)^T = \frac{\pi^{p+q}}{p!q!} \sum_{n=0}^N s_n \alpha_{n,p+q} \bar{Q}_n \bar{Q}_n^T. \quad (15)$$

Очевидно, что при использовании аппроксимации первого порядка, модель ковариационной матрицы зависит только от источников сигналов и не зависит от величины задержки сигнала в элементе и от их числа, а также не зависит от эффективной ширины спектра сигнала. В этом случае полученная модель есть ни что иное как ковариационная матрица узкополосного сигнала для спектральной компоненты s_n взвешенная с множителем $\frac{\pi^{p+q}}{p!q!} \alpha_{n,p+q}$.

Учитывая (15), выражение для матрицы $\bar{R}$ можно представить в виде

$$\bar{R} = [\beta^0 \bar{U}_0 \quad \dots \quad \beta^I \bar{U}_I] \begin{bmatrix} R_{00}^0 & \dots & R_{0I}^0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ R_{I0}^0 & \dots & R_{II}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^0 \bar{U}_0^T \\ \vdots \\ \beta^I \bar{U}_I^T \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Представление ковариационной матрицы в виде (17) интересно еще и тем, что она может быть разделена на две части соответствующие источникам $\bar{R}_{pq}^0$ и антенной решетке $\beta \bar{U}_p$. Покажем это на примере антенной решетки, состоящей из трех антенных элементов с четырьмя линиями задержки в приемных каналах. Величина задержки $\tau = 1/4 f_0$. В дальней зоне такой антенны находится один источник сигнала, спектральная плотность сигнала которого равномерна во всей полосе. Таким образом, $M=2$, $J=4$, $f_0 \tau = 1/4$, $N=1$ и $\hat{S}_1(f) = \hat{S}_0(f) = 1/2$ если $-1 < f < 1$ и $\hat{S}_0(f) = 0$ для всех других значений частоты f .

Согласно (3) $\alpha_{1p} = \alpha_{0p}$, а $\alpha_{00} = 1$, $\alpha_{01} = 0$ и $\alpha_{03} = 1/3$. Используя соотношения (10) – (12) и учитывая аппроксимацию первого порядка ковариационной матрицы (13), (14) получим выражение для матрицы $\bar{R}$ в виде (16)

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \beta_{14} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{14} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \beta_{14} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{14} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} s_0 + s_1 & 0 & s_1 \cos(\omega_0 \tau_n) & s_1 \sin(\omega_0 \tau_n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 + s_1 & -s_1 \sin(\omega_0 \tau_n) & s_1 \cos(\omega_0 \tau_n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 \cos(\omega_0 \tau_n) & -s_1 \sin(\omega_0 \tau_n) & s_0 + s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 \sin(\omega_0 \tau_n) & -s_1 \cos(\omega_0 \tau_n) & 0 & s_0 + s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi^2 (s_0 + s_1) / 3 & 0 & \pi^2 s_1 \cos(\omega_0 \tau_n) / 3 & \pi^2 s_1 \sin(\omega_0 \tau_n) / 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi^2 (s_0 + s_1) / 3 & -\pi^2 s_1 \sin(\omega_0 \tau_n) / 3 & \pi^2 s_1 \cos(\omega_0 \tau_n) / 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi^2 s_1 \cos(\omega_0 \tau_n) / 3 & -\pi^2 s_1 \sin(\omega_0 \tau_n) / 3 & \pi^2 (s_0 + s_1) / 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi^2 s_1 \sin(\omega_0 \tau_n) / 3 & \pi^2 s_1 \cos(\omega_0 \tau_n) / 3 & 0 & \pi^2 (s_0 + s_1) / 3 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_{14} & 0 & \beta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{14} & 0 & -\beta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{14} & 0 & \beta_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{14} & 0 & -\beta_{14} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Собственные числа ковариационной матрицы

Поскольку $\bar{R}_{pq}^0 = (\bar{R}_{pq}^0)^T$ вторая матрица в (16) может быть представлена своим разложением как

$$\begin{bmatrix} R_{00}^0 & \dots & R_{0l}^0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ R_{l0}^0 & \dots & R_{ll}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{00}^0 \\ \vdots \\ R_{l0}^0 \end{bmatrix} (R_{00}^0)^{-1} \begin{bmatrix} R_{00}^0 \\ \vdots \\ R_{l0}^0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ R_{l1}^1 \\ \vdots \\ R_{ll}^1 \end{bmatrix} (R_{ll}^1)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ R_{l1}^1 \\ \vdots \\ R_{ll}^1 \end{bmatrix}^T + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_{ll}^l \end{bmatrix} (R_{ll}^l)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_{ll}^l \end{bmatrix}^T, \quad (18)$$

где $\bar{R}_{pq}^{r+1} = \bar{R}_{pq}^r - \bar{R}_{pr}^r (\bar{R}_{rr}^r)^{-1} (\bar{R}_{qr}^r)^T$, $r=0, \dots, l-1$, $p, q=r, \dots, l$. Матрица $\bar{R}_{pp}^p$ – положительно определенная несингулярная матрица.

Подставив (18) в (10) получим следующее представление матрицы $\bar{R}$:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{V}_0 & \dots & \bar{V}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^0 (\bar{R}_{00}^0)^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \beta^{l-2} (\bar{R}_{ll}^l)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_0^T \\ \vdots \\ \bar{V}_l^T \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где $\bar{V}_p = \beta^0 \bar{U}_p \bar{R}_{pp}^p + \dots + \beta^{l-p} \bar{U}_l \bar{R}_{lp}^p$.

Из последнего выражения следует, что поскольку столбцы $\bar{U}_0, \dots, \bar{U}_l$ взаимно ортогональны, то и столбцы $\bar{V}_0, \dots, \bar{V}_l$ также будут ортогональны. Это означает, что уравнение (19) является блочно-спектральным разложением ковариационной матрицы.

Анализ собственных чисел ковариационной матрицы свидетельствует, что даже если источники помеховых сигналов имеют равномерную спектральную плотность мощности в полосе приемной антенны, собственные числа матрицы можно разделить на два набора. Один из них соответствует сигналам источников помех, действующих на антенную решетку в области боковых лепестков, а другой, значения собственных чисел ковариационной матрицы в котором по абсолютной величине меньше чем в первом наборе, порожден тепловым собственным шумом приемников системы наблюдения.

Выводы

Таким образом, так же как и в случае узкополосной адаптивной антенной решетки для широкополосных приемных систем селекция помеховых источников осуществляется на основе анализа собственных чисел пространственно-временной ковариационной матрицы сформированной с учетом наличия линий задержки в каждом из каналов приема. Блочная структура ковариационной матрицы, вычисляемой процессором ААР, эквивалентна разбиению всей полосы частот на несколько частотных участков. В каждом из которых вычисляются парные корреляционные связи между компонентами сигнала, принятыми разными антенными элементами в один и тот же момент времени. Этим обеспечивается сохранение инфор-

мации об углах падения плоских волн порожденных источниками помех на плоскость решетки. В последующем эти данные используются для вычисления вектора весовых коэффициентов адаптивной антенны. Очевидно, что количество элементов весового вектора будет равно произведению числа антенных элементов решетки на число линий задержки.

Список литературы 1. Арманд, Н.А., Крапивин, В.Ф., Мкртчян, Ф.А. Методы обработки данных радиофизического исследования окружающей среды. – М. : Наука, 1987. – 270 с. 2. Монзинго, Р.А., Миллер, Т.У. Адаптивные антенные решетки – М. : Радио и связь. – 1986. – 448 с. 3. Applebaum, S.P. Adaptive Arrays // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1976. – Vol. AP-24, №5, September. – P. 585 – 598. 4. Widrow, B., Mante, P.E., Griffiths, L.J. at all. Adaptive Antenna Systems // Proc. IEEE. – 1967. – Vol. 55, December. – P. 2143 – 2159. 5. Марпл, С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М. : Мир, 1990. – 584 с. 6. Сапон, J. Application of Detection and Estimation Theory to Large Array Seismology. // Proc. IEEE. – 1970. – Vol. 58, May. – P. 760 – 770. 7. Griffiths, L.J. A simple Algorithm for Real Time Processing in Antennas Arrays // Proc. IEEE. – 1969. – Vol. 57, October. – P. 1696 – 1707. 8. Lacoss, R.T. Adaptive Combining of Wideband Array Data for Optimal Reception // IEEE Trans. Geosci. Electron., – 1968. – Vol. GE-6, May. – P. 78 – 86. 9. Корн, Г., Корн, Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. : Наука, 1984. – 832 с. 10. Ланкастер, П. Теория матриц : пер с англ. – М. Наука, 1982. – 272 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 17.09.2012