

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОТНОШЕНИЯ СИГНАЛ-ШУМ АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

При оптимальной обработке сигналов адаптивной антенной решеткой (ААР) с помощью весовых коэффициентов (ВК), найденных по заданному критерию на основании анализа сигнально-помеховой обстановки, на выходе сумматора вследствие неточности ВК, вызванных искажением входного сигнала, несоответствием математической модели физической, ошибками численного метода и его реализации, происходит размывание сигнала. Поэтому выходной сигнал будет отвечать в той или иной мере критерию оптимальности в зависимости от величины ошибок ВК.

Вопрос влияния ошибок ВК или, что эквивалентно, токов возбуждения для передающих антенн на характеристики излучения посвящено много работ [1,2].

Целью настоящего сообщения является исследование влияния ошибок ВК на выходной сигнал ААР в зависимости от сигнально-помеховой обстановки при оптимальной обработке узкополосного сигнала в установившемся режиме по критерию максимума отношения сигнал-шум (ОСШ).

Постановка и решение задачи

Будем полагать, что в некотором направлении на ААР, состоящую из N идентичных и одинаково ориентированных элементов, поступает монохроматический сигнал.

Пусть $X_i(t)$ – сигнал, который принимает i -й элемент решетки, W_i – весовой коэффициент i -го канала. Тогда выходной сигнал $S(t)$ антенны определяется как скалярное произведение в N -мерном комплексном пространстве вектора весовых коэффициентов

$$\bar{W} = (W_1^0(1 + \varepsilon_1), W_2^0(1 + \varepsilon_2), \dots, W_N^0(1 + \varepsilon_N))$$

на сигнальный вектор

$$\bar{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)),$$

то есть

$$S(t) = (\bar{W}, \bar{X}(t)) = \sum_{i=1}^N W_i^0(1 + \varepsilon_i) X_i^*(t),$$

где W_i^0 ($i = \overline{1, N}$) – компоненты вектора ВК, найденного из задачи максимизации ОСШ, а ε_i – носительные центрированные ошибки этих компонент; * – знак комплексного сопряжения.

Будем теперь полагать, что в направлениях \bar{u}_0 и \bar{u}_1 ($|\bar{u}_0| = |\bar{u}_1| = 1$) на ААР поступает полезный сигнал и сигнал помехи. Кроме того, естественно предположить, что каждый канал решетки содержит составляющую теплового шума. Следовательно, общий сигнальный вектор представим в виде:

$$\bar{X} = \bar{X}_c + \bar{X}_\Pi + \bar{X}_\text{ш} = \bar{X}_c + \bar{X}_\text{м},$$

где \bar{X}_c , \bar{X}_Π и $\bar{X}_\text{ш}$ – соответственно полезный, помеховый и шумовой вектора; $\bar{X}_\text{м} = \bar{X}_\Pi + \bar{X}_\text{ш}$ – мешающий вектор.

При работе ААР в узкополосном режиме сигнальный вектор и вектор помехи можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \bar{X}_c &= A_0 e^{i(\omega_0 t + \psi_0)} f(\bar{u}_0) \bar{V}_0, \\ \bar{X}_\Pi &= A_1 e^{i(\omega_0 t + \psi_1)} f(\bar{u}_1) \bar{V}_1, \end{aligned}$$

где ω_0 , A_0 , ψ_0 – частота, амплитуда и фаза полезного сигнала; A_1 , ψ_1 – амплитуда и фаза помехи; $\bar{V}_i = (1, e^{ik \bar{r}_2 \bar{u}_i}, \dots, e^{ik \bar{r}_N \bar{u}_i})$ ($i = \overline{0, 1}$) – нормированные сигнальный и помеховый вектора. В приведенных выражениях $f(\bar{u})$ и \bar{r}_i ($i = \overline{1, N}$) – соответственно диаграмма направленности эле-

мента решетки и радиус-вектор его положения; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны. Начало выбранной системы координат совмещено с положением первого элемента ААР.

Относительно фаз полезного сигнала и помехи ψ_1, ψ_2 будем полагать, что это независимые друг от друга случайные величины с равномерным законом распределения на интервале $(0; 2\pi)$.

Вектор теплового шума определим следующим образом:

$$\bar{X}_{\text{ш}}(t) = \left(X_1^{\text{ш}}(t), X_2^{\text{ш}}(t), \dots, X_N^{\text{ш}}(t) \right),$$

где $X_i^{\text{ш}}(t)$ ($i = \overline{1, N}$) – узкополосный стационарный случайный процесс независимый от ψ_0 и ψ_1 с мощностью $\sigma_{\text{ш}}^2$ на единичной нагрузке.

Рассмотрим задачу влияния неточности вектора ВК на максимум отношения ОСШ. С этой целью запишем выражение на сумматоре ААР для мощностей сигнала и шума, вызванного мешающим вектором:

$$P_s = \left| \overline{(\bar{W}, \bar{X}_c)} \right| = A_0^2 |f(\bar{u}_0)|^2 \left| \overline{(\bar{W}, \bar{V}_0)} \right|^2,$$

$$P_M = \left| \overline{(\bar{W}, \bar{X}_M)} \right| = (R_M \bar{W}, \bar{W}).$$

Здесь $R_M = \left\| r_{ij}^{(M)} \right\|_{i,j=1}^N$ – ковариационная матрица, составленная с компонент мешающего вектора, а черта означает усреднение случайных процессов.

Легко показать, что

$$M[P_s] = (R_s \bar{W}_0, \bar{W}_0) \left(R_s = \left\| (1 + M[\varepsilon_i^* \varepsilon_j]) V_i^0 V_j^{0*} \right\|_{i,j=1}^N \right),$$

$$M[P_M] = (\bar{R}_M \bar{W}_0, \bar{W}_0) \left(\bar{R}_M = \left\| r_{ij}^{(M)} (1 + M[\varepsilon_i^* \varepsilon_j]) \right\|_{i,j=1}^N \right),$$

где M – знак математического ожидания, а V_i^0 ($i = \overline{1, N}$) – компоненты вектора \bar{V}_0 . Поэтому максимальное значение ОСШ равно:

$$\frac{M[P_s]}{M[P_M]} = A_0^2 |f(\bar{u}_0)|^2 \frac{(R_s \bar{W}_0, \bar{W}_0)}{(\bar{R}_M \bar{W}_0, \bar{W}_0)}. \quad (1)$$

В этом соотношении оптимальный вектор ВК \bar{W}_0 , как известно [3], находится из матричного уравнения

$$R_M \bar{W}_0 = \bar{V}_0. \quad (2)$$

Полученные соотношения (1), (2) для максимального значения ОСШ позволяют полностью провести, зная корреляционную матрицу $\left\| M[\varepsilon_i^* \varepsilon_j] \right\|_{i,j=1}^N$, анализ влияния ошибок вектора ВК на выходной сигнал ААР в зависимости от сигнально-помеховой обстановки. Для качественной оценки рассмотрим модель некоррелированных ошибок вектора ВК, то есть случай, когда $M[\varepsilon_i^* \varepsilon_j] = \sigma_w^2 \delta_{ij}$, где σ_w^2 – дисперсия ошибок, а δ_{ij} – символ Кронекера.

Отбросив в правой части равенства (1) множитель $A_0^2 |f(\bar{u}_0)|^2$, отношение сигнал-шум представим в виде:

$$\frac{|\overline{W}_0, \overline{V}_0|^2 + \sigma_w^2(\overline{W}_0, \overline{W}_0)}{(\overline{R}_M \overline{W}_0, \overline{W}_0)} = \frac{|\overline{W}_0, \overline{V}_0|^2}{(\overline{R}_M \overline{W}_0, \overline{W}_0)} + \sigma_w^2 \frac{(\overline{W}_0, \overline{W}_0)}{(\overline{R}_M \overline{W}_0, \overline{W}_0)}.$$

Первое слагаемое правой части полученного соотношения представляет величину оптимального ОСШ, а второе – ошибку в определении значения ОСШ, вызванную неточностью формирования оптимального вектора ВК. Если сравнить величины максимального ОСШ в отсутствие ошибок

$\frac{|\overline{W}_0, \overline{V}_0|^2}{(\overline{R}_M \overline{W}_0, \overline{W}_0)}$ с полученным значением, то отношение сигнал-шум в этом случае уменьшается, так

как его знаменатель $(\overline{R}_M \overline{W}_0, \overline{W}_0) = (\overline{R}_M \overline{W}_0, \overline{W}_0) + \sigma_w^2(\overline{W}_0, \overline{W}_0)$. Кроме того, на максимальное значение ОСШ накладывается еще и ошибка $\sigma_w^2 \frac{(\overline{W}_0, \overline{W}_0)}{(\overline{R}_M \overline{W}_0, \overline{W}_0)}$. Для оценки этой ошибки разложим оптимальный вектор \overline{W}_0 по ортонормированному базису, составленному из собственных векторов \overline{W}_i ($i = \overline{1, N}$) матрицы \overline{R}_M :

$$\overline{R}_M \overline{W}_i = \lambda_i \overline{W}_i,$$

где собственные значения λ_i всегда положительны, так как матрица \overline{R}_M при наличии теплового шума положительно определена.

Пусть $c_i = (\overline{W}_0, \overline{W}_i)$ – коэффициенты Фурье разложения вектора \overline{W}_0 . Тогда в силу ортонормированности базиса $\{\overline{W}_i\}_{i=1}^N$

$$\frac{\sigma_w^2(\overline{W}_0, \overline{W}_0)}{(\overline{R}_M \overline{W}_0, \overline{W}_0)} = \frac{\sigma_w^2 \sum_{i=1}^N |c_i|^2}{\sum_{j=1}^N \lambda_j |c_j|^2} = \frac{\sigma_w^2 \sum_{i=1}^N |c_i|^2}{\lambda_{\max} \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{\lambda_{\max}} |c_j|^2}.$$

Здесь $\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$. Так как $\lambda_i/\lambda_{\max} \leq 1$ для всех $i = \overline{1, N}$, то

$$\frac{\sigma_w^2}{\lambda_{\max}} \leq \frac{\sigma_w^2(\overline{W}_0, \overline{W}_0)}{(\overline{R}_M \overline{W}_0, \overline{W}_0)}.$$

С другой стороны

$$\frac{\sigma_w^2(\overline{W}_0, \overline{W}_0)}{(\overline{R}_M \overline{W}_0, \overline{W}_0)} \leq \frac{\sigma_w^2}{\lambda_{\min}}, \quad \lambda_{\min} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}.$$

Таким образом, ошибка оптимального ОСШ при неточном формировании оптимального вектора ВК всегда не меньше $\sigma_w^2/\lambda_{\max}$ и не больше $\sigma_w^2/\lambda_{\min}$.

Список литературы: 1. Шифрин Я.С. Вопросы статистической теории антенн. М.: Сов. радио, – 1970. – 384с. 2. Корниенко Л.Г., Шифрин Я.С. Статистический анализ антенн по их интегральным параметрам // Проблемы антенной техники. М.: Радио и связь, – 1989. – 368с. 3. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки. М.: Радио и связь, – 1986. – 448с.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 22.10.2001