КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

УДК: 519.85

ИССЛЕДОВАНИЕ ОЦЕНОК МИНИМУМА ВЫПУКЛЫХ ПРОДОЛЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЕВКЛИДОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ МНОЖЕСТВАХ

ГРЕБЕННИК И.В., ЛАПКО Д.А.

Исследуется задача оптимизации на евклидовом комбинаторном множестве, отображенном в пространство R^n. Для выпуклого и сильно выпуклого продолжения целевой функции задачи строятся и исследуются оценки минимума на комбинаторном множестве. Подробно рассматриваются оценки в задаче оптимизации квадратичной функции на евклидовом множестве перестановок. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Рассмотрим задачу дискретной оптимизации следующего вида:

$$\bar{\varphi}(x) \to \min, \quad x \in E \subset R^n, \tag{1}$$

где E – евклидово комбинаторное множество [1], отображенное в пространство R^n. Элементами множества E являются векторы, координаты которых принимают значения упорядоченных наборов из элементов множества

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \quad a_1 \le a_2 \le ... \le a_n .$$

Примерами евклидовых комбинаторных множеств являются комбинаторные множества перестановок, размещений с повторениями и без повторений, сочетаний и др. Элементы евклидовых комбинаторных множеств – это вершины комбинаторных многогранников, исследованию которых посвящены, в частности, работы [2-4].

Осуществим выпуклое продолжение $\varphi(x)$ функции $\bar{\varphi}(x)$ на выпуклое замкнутое множество $X \supseteq convE$, где $convE$ – выпуклая оболочка множества E. В некоторых случаях выпуклое продолжение может быть построено с сохранением выражения $\bar{\varphi}(x)$. В то же время, для некоторых классов евклидовых комбинаторных множеств удаётся построить выпуклое (сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$) продолжение $X \supseteq convE$ на множество для произвольных $\bar{\varphi}(x)$. В работе [5] доказывается существование такого продолжения для множеств E, совпадающих с вершинами своей выпуклой оболочки, т.е. удовлетворяющих условию

$$E = vert\ convE . \tag{2}$$

Условию (2) удовлетворяют евклидовы комбинаторные множества перестановок, сочетаний, размещений без повторений из n элементов по n-1, размещений с повторениями из 2 элементов по n и др. Евклидовы множества размещений с повторениями и без повторений произвольного вида путём декомпозиции могут быть разбиты на множества, удовлетворяющие условию (2). Конструктивные методы для построения выпуклых и сильно выпуклых продолжений функций, заданных на классах множеств, удовлетворяющих (2), приводятся в работах [6-8].

В результате построения выпуклого продолжения сформулируем задачу оптимизации, эквивалентную задаче (1):

$$\varphi(x) \to \min, \quad x \in E \subset R^n, \tag{3}$$

где $\varphi(x) = conv\ \bar{\varphi}(x)$ – выпуклая (сильно выпуклая с параметром $\rho > 0$) функция, удовлетворяющая условию

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}(x), \quad \forall x \in E . \tag{4}$$

В целях разработки методов решения задач оптимизации (1), (3) исследуем экстремальные свойства их целевых функций $\bar{\varphi}(x)$, $\varphi(x)$ на евклидовых комбинаторных множествах. Рассмотрим оценки минимума функций, заданных на евклидовых комбинаторных множествах, полученные в работах [7,9]. В их основе лежат известные теоремы об экстремальных свойствах выпуклых функций на выпуклых замкнутых множествах. Приведём выражения для оценок.

Пусть $\bar{\varphi}(x)$ – функция цели задачи (1), а $\varphi(x)$ – её выпуклое дифференцируемое продолжение на выпуклое замкнутое множество $X \supseteq convE$. Тогда для любого $x \in X$

$$\min_{y \in E} \bar{\varphi}(x) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \min_{y \in E} (\nabla\varphi(x), y) . \tag{5}$$

В случае, если $\varphi(x)$ – сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$ продолжение $\bar{\varphi}(x)$ на выпуклое замкнутое множество $X \supseteq convE$, а $y^0 = \arg\min_{y \in X} \varphi(y)$, то

$$\min_{y \in E} \bar{\varphi}(y) \ge \varphi(y^0) + \rho \min_{y \in E} \left\| y - y^0 \right\|^2 . \tag{6}$$

Если $\varphi(x)$ – сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$ дифференцируемое продолжение $\bar{\varphi}(x)$ на $X \supseteq convE$, то $\forall x \in X$:

$$\min_{y \in E} \bar{\varphi}(y) \ge \varphi(x) - \frac{1}{4\rho} \left\| \nabla\varphi(x) \right\|^2 +$$

$$+\rho \min_{y\in E}\left\| y - x + \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x)\right\|^2 . \qquad (7)$$

Задача отыскания минимума по $y \in E$ в правых частях неравенств (5)-(7) решается в зависимости от вида множества E. Решения задач об отыскании минимумов линейных функций и функций вида $g(x) = \|x - C\|^2$ на классах евклидовых комбинаторных множеств приведены в [7,9].

Отметим, что оценки минимума $\varphi(x)$ (5), (7) справедливы для произвольной точки $x \in X$. С другой стороны, конструктивные методы построения сильно выпуклых продолжений $\varphi(x)$ на $X \supseteq convE$ позволяют получить сильно выпуклое продолжение с заданным значением параметра $\rho > 0$. Поэтому в (6), (7) имеется возможность выбора значения ρ. Оценивая снизу минимум функции, естественно стремиться к получению возможно более точной, а значит, возможно большей по величине оценки. Рассмотрим задачу её получения. Введём обозначения

$$e_1(x) = \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \min_{y\in E}(\nabla\varphi(x), y), \qquad (8)$$

$$e_2(\rho) = \varphi(y^0) + \rho \min_{y\in E}\left\| y - y^0\right\|^2 , \qquad (9)$$

$$e_3(x) = \varphi(x) - \frac{1}{4\rho}\ \|\nabla\varphi(x)\|^2 +$$

$$+\rho \min_{y\in E}\left\| y - x + \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x)\right\|^2 . \qquad (10)$$

Задачу отыскания максимальных значений $e_1(x), e_2(\rho), e_3(x,\rho)$ можно решить только после определения минимумов в правых частях соотношений (8)-(10). Как отмечалось ранее, эти задачи решаются по-разному для разных классов множеств E. Их решение определяется структурой и комбинаторными свойствами соответствующих комбинаторных множеств.

Рассмотрим оценки (8)−(10) на примере комбинаторного множества E_{nk} перестановок из n элементов, k из которых различны, порожденного числами $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$. Оценки (5)-(7) для этого случая получены в работе [9] и их правые части (8)-(10) имеют следующий вид :

$$e_1(x) = \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{m_j}} a_j , \qquad (11)$$

где последовательность $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ такова, что

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{m_1}} \ge \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{m_2}} \ge ... \ge \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_{m_n}} .$$

В выражениях для $e_2(\rho)$ и $e_3(x,\rho)$ необходимо учесть способ построения сильно выпуклого продолжения для функций, заданных на множестве E_{nk}. Пусть $\varphi(x)$ − результат построения выпуклого продолжения функции $\bar{\varphi}(x)$, заданной на множестве E_{nk}, на выпуклое замкнутое множество $X \supseteq E_{nk}$ [8]. Предположим, что $\varphi(x)$ сильно выпукла на X с параметром $\rho_0 \ge 0$. Тогда функция $f(x)$ вида

$$f(x) = \varphi(x) + \rho_1(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2) \qquad (12)$$

сильно выпукла на X с параметром $\rho = \rho_1 + \rho_0$. Кроме того, из (12) следует, что для всех $x \in E_{nk}$ $f(x) = \varphi(x)$. При этом значение $\rho_1 > -\rho_0$ можно выбирать произвольным образом . Это следует из справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. *Функция $f(x)$ вида (12) является сильно выпуклой с параметром $\rho = \rho_0 + \rho_1, (\rho_0 \ge 0)$ при всех значениях $\rho_1 > -\rho_0$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая. При $\rho_1 \ge 0$ утверждение теоремы легко вытекает из того, что $f(x)$ — неотрицательная линейная комбинация двух сильно выпуклых функций $\varphi(x)$ и $g(x) = \rho_1\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + a_i^2)$. Рассмотрим случай, когда $-\rho_0 < \rho_1 < 0$. Доказательство приведём по аналогии с доказательством теоремы о сильной выпуклости функции в [10].

Так как функция $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром ρ_0 на X, то для неё справедливо неравенство:

$$\varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y) - \alpha(1-\alpha)\rho_0\|x - y\|^2,$$

$$\forall x, y \in X, 0 \le \alpha \le 1. \qquad (13)$$

Функция $g(x) = \rho_1\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + a_i^2) = \rho_1\|x\|^2 - \rho_1 C$, где $C = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, является сильно выпуклой с параметром ρ_1. Для $g(x)$ неравенство (13) превращается в тождественное равенство:

$$\rho_1(\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 - C) = \alpha\rho_1(\|x\|^2 - C) +$$

$$+(1-\alpha)\rho_1(\|y\|^2 - C) - \alpha(1-\alpha)\rho_1\|x - y\|^2 ,$$

$$\forall x, y \in X, \quad 0 \le \alpha \le 1 . \qquad (14)$$

Справедливость равенства (14) может быть проверена непосредственно. Сложим почленно равенство (14) и неравенство (13). Имеем:

$$\phi(\alpha x + (1-\alpha)y) + \rho_1(\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 - C) \le$$

$$\le \alpha\phi(x) + \alpha\rho_1(\|x\|^2 - C) + (1-\alpha)\varphi(y) +$$

$$+(1-\alpha)\rho_1(\|y\|^2 - C) - \alpha(1-\alpha)(\rho_0 + \rho_1)\|x - y\|^2 .$$

С учетом выражения для $f(x)$

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)+$$

$$+\alpha(1-\alpha)(\rho_0+\rho_1)\|x-y\|^2. \qquad (15)$$

В силу предположения теоремы $\rho_0+\rho_1>0$. Это означает, что $f(x)$ сильно выпукла на X с параметром $(\rho_0+\rho_1)$.

Отметим, что при $\rho_0=-\rho_1$ функция $f(x)$ является выпуклой на X.

Заменим в соотношениях (9),(10) $\varphi(x)$ на $f(x)$ и получим выражение для $e_2(\rho), e_3(x,\rho)$, для множества E_{nk}:

$$e_2(\rho)=\varphi(y^0)+\rho_1(\sum_{i=1}^{n} y^0{}_i{}^2-\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2)+$$

$$+(\rho_1+\rho_0)\left\|y^0-y^*\right\|^2, \qquad (16)$$

где $y^0=\arg\min\limits_{y\in X} f(y)$, $y_{m_j}{}^0=a_j$, $j=1,...,n$, последовательность $\{m_1,m_2,...,m_n\}$ такова, что $y^0_{m_1}\le y^0_{m_2}\le ...\le y^0_{m_n}$. Очевидно, что $y^0=y^0(\rho)$:

$$e_3(x,\rho)=\varphi(x)+\rho_1\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-a_i^2)-$$

$$-\frac{1}{4(\rho_1+\rho_0)}\|\nabla\varphi(x)+2x\rho_1\|^2+$$

$$+(\rho_1+\rho_0)\left\|y^*+\frac{1}{2(\rho_1+\rho_0)}\nabla\varphi(x)-\frac{\rho_0}{\rho_1+\rho_0}x\right\|^2. \qquad (17)$$

Здесь $y^*_{m_j}=a_j, j=1,...,n$, последовательность $\{m_1,m_2,...,m_n\}$ такова, что

$$\frac{1}{\rho_1+\rho_0}(\rho_0 x_{m_1}-\frac{\nabla\varphi(x_{m_1})}{2})\le\frac{1}{\rho_1+\rho_0}(\rho_0 x_{m_2}-\frac{\nabla\varphi(x_{m_2})}{2})\le ...$$

$$...\le\frac{1}{\rho_1+\rho_0}(\rho_0 x_{m_n}-\frac{\nabla\varphi(x_{m_n})}{2}). \qquad (18)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Для оценки $e_3(x,\rho)$ справедливо тождество $e_3(x,\rho_1+\rho_0)\equiv e_3(x,\rho_0)$ при всех $x\in X$, где $\rho_0>0$ — параметр сильной выпуклости функции $\varphi(x)$ вида* (4).

Доказательство. Рассмотрим последнее слагаемое в соотношении (17). Из (18) следует, что y^* не зависит от ρ_1 при условии $\rho_1+\rho_0>0$. Докажем, что разность $e_3(x,\rho_0+\rho_1)-e_3(x,\rho_0)=0$:

$$e_3(x,\rho_0+\rho_1)-e_3(x,\rho_0)=\varphi(x)+\rho_1\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-a_i^2)-$$

$$-\frac{1}{4(\rho_0+\rho_1)}\|\nabla\varphi(x)+2x\rho_1\|^2+$$

$$+(\rho_1+\rho_0)\left\|y^*-\frac{1}{\rho_1+\rho_0}(x\rho_0-\frac{\nabla\varphi(x)}{2})\right\|^2-$$

$$-(\varphi(x)-\frac{1}{4\rho}\|\nabla\varphi(x)\|^2+\rho\left\|y^*-x+\frac{\nabla\varphi(x)}{2\rho_0}\right\|^2)=$$

$$=\rho_1\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-a_i^2)-\frac{1}{4}(\frac{\|\nabla\varphi(x)+2x\rho_1\|^2}{\rho_1+\rho_0}-\frac{\|\nabla\varphi(x)\|^2}{\rho_0})+$$

$$+((\rho_1+\rho_0)\left\|y^*-\frac{1}{\rho_1+\rho_0}(x\rho_0-\frac{\nabla\varphi(x)}{2})\right\|^2-$$

$$-\rho_0\left\|y^*-*x-\frac{\nabla\varphi(x)}{2\rho_0}\right\|^2). \qquad (19)$$

Рассмотрим отдельно каждое из двух последних слагаемых.

Приводя к общему знаменателю и раскрывая скобки, получаем:

$$\frac{1}{4}(\frac{\|\nabla\varphi(x)+2x\rho_1\|^2}{\rho_1+\rho_0}-\frac{\|\nabla\varphi(x)\|^2}{\rho_0})=\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_0}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{\rho^2{}_1}{\rho_1+\rho_0}\|x\|^2-\frac{\rho_1}{4\rho_0(\rho_1+\rho_0)}\|\nabla\varphi(x)\|^2.$$

Упрощая и раскрывая скобки в последнем слагаемом (18), получаем

$$(\rho_1+\rho_0)\left\|y^*-\frac{1}{\rho_1+\rho_0}(x\rho_0-\frac{\nabla\varphi(x)}{2})\right\|^2-\rho_0\left\|y^*-*x-\frac{\nabla\varphi(x)}{2\rho_0}\right\|^2=$$

$$=\rho_1\|y\|^2++\frac{\rho_0{}^2-\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\|x\|^2+(1-\frac{\rho_0}{\rho_1+\rho_0})*$$

$$*\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}-\frac{\rho_1}{4\rho_0(\rho_1+\rho_0)}\|\nabla\varphi(x)\|^2.$$

С учётом полученных выражений имеем

$$e_3(x,\rho_0+\rho_1)-e_3(x,\rho_0)=\rho_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\rho_1\sum_{i=1}^{n}a_i^2-$$

$$-\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_0}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}-\frac{\rho^2{}_1}{\rho_1+\rho_0}\|x\|^2+$$

$$+\frac{\rho_1}{4\rho_0(\rho_1+\rho_0)}\|\nabla\varphi(x)\|^2+\rho_1\|y\|^2+\frac{\rho_0{}^2-\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\|x\|^2+(1-$$

$$-\frac{\rho_0}{\rho_1+\rho_0})\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}-\frac{\rho_1}{4\rho_0(\rho_1+\rho_0)}\|\nabla\varphi(x)\|^2=$$

$$=\|x\|^2(\rho_1+\frac{(\rho_0^2-\rho_0)}{\rho_1+\rho_0}-\frac{\rho_1^2}{\rho_1+\rho_0})+\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}(1-\frac{\rho_0+\rho_1}{\rho_1+\rho_0})=0.$$

Из произвольности выбора точки $x\in X$ и значения $\rho_1>-\rho_0$ следует справедливость утверждения теоремы.

Следовательно, оценка $e_3(x)$ принимает вид

$$e_3(x) = \varphi(x) - \frac{1}{4\rho_0}\|\nabla\varphi(x)\|^2 +$$

$$+ \rho_0\left\| y^* - x + \frac{1}{2\rho_0}\nabla\varphi(x)\right\|^2, \qquad (20)$$

где $y^*_{m_j} = a_j, j = 1,...,n$, а последовательность $\{m_1, m_2,..., m_n\}$ такова, что

$$x_{m_1} - \frac{1}{2\rho_0}\nabla\varphi(x_{m_1}) \le x_{m_2} - \frac{1}{2\rho_0}\nabla\varphi(x_{m_2}) \le ... \le x_{m_n} - \frac{1}{2\rho_0}\nabla\varphi(x_{m_n}).$$

Полученные соотношения для оценок минимума функций на евклидовом множестве перестановок E_{nk} (11), (16), (20) дают возможность выполнить в явном виде постановку следующих задач оптимизации:

$$e_1(x) \to \max, x \in X, \qquad (21)$$

$$e_2(\rho) \to \max, \rho \ge \rho_0, \qquad (22)$$

$$e_3(x) \to \max, x \in X. \qquad (23)$$

Результатом решения поставленных задач будут искомые эффективные значения оценок (5)-(7) минимума выпуклых продолжений функций, заданных на множестве перестановок. Сложность зависимостей $e_1(x), e_2(\rho), ..., e_3(x,\rho)$, не позволяет решить задачи оптимизации (21)-(23) аналитически. Однако они могут быть успешно решены одним из численных методов недифференцируемой оптимизации. Опишем решение этих задач на множестве E_{nk}.

Рассмотрим поведение оценок $e_1(x), e_2(\rho), e_3(x,\rho)$ на примере квадратичной функции $\varphi(x)$ вида

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i, \qquad (24)$$

где C – положительно-определённая симметричная матрица размерности $n \times n, B \in R^n, x \in R^n$. С функциями вида (24) проведём вычислительные эксперименты. В качестве тестового примера выберем $\varphi(x)$ с матрицей C вида

$$C = \begin{matrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 30 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 20 \end{matrix},$$

которая является положительно-определённой с минимальным собственным числом $\rho_0 \approx 2.74$. $B = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$. Переменная X принимает значения из множества $E_4 = E_{44}$, порождённого числами $(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$.

Функция достигает своего минимума 609 на перестановке $x^* = (3\ \ 2\ \ 4\ \ 1)$. Вычислим значения оценок e_1, e_3 в характерных точках множества X, а затем решим задачи оптимизации (21),(23).

Для оценок e_1, e_3 в качестве таких точек выберем значения в точках множества E_4, а также значение в точке минимума $\varphi(x)$ на X: $y^0 = \arg\min_{x \in X}\varphi(x)$.

Сравним полученные значения с результатом решения задач оптимизации (21),(23).

Для заданных C и B $y^0 = (0.03\ \ 0\ \ 0.24\ \ -0.02)$

Для оценки $e_1(x)$ получены следующие результаты:

$$\max_{x \in E_4} e_1(x) = 577 \text{ в точке } x = x^* = (3\ \ 2\ \ 4\ \ 1),$$

$$\min_{x \in E_4} e_1(x) = 291 \text{ в точке } x = (1\ \ 4\ \ 2\ \ 3),$$

$$e_1(y^0) = -0.39,$$

$$\max_{x \in X} e_1(x) = 602.6 \text{ в точке } x = (3\ \ 1.6\ \ 4\ \ 1.4).$$

Для оценки $e_3(x)$ получены следующие результаты:

$$\max_{x \in E_4} e_3(x) = 589.3 \text{ в точке } x = x^* = (4\ \ 2\ \ 1\ \ 3),$$

$$\min_{x \in E_4} e_3(x) = 345 \text{ в точке } x = (1\ \ 4\ \ 2\ \ 3),$$

$$e_3(y^0) = 82.77,$$

$$\max_{x \in X} e_1(x) = 603.91 \text{ в точке } x = (3.53\ \ 1.79\ \ 1.47\ \ 2.24).$$

Для вычисления эффективного значения оценки $e_2(\rho)$ решим задачу (22). Её решению соответствует $e_2(\rho) = 102.09$ при $\rho_1 = 25000$.

В табл. 1 приведены результаты 100 опытов с квадратичной функцией вида (19) при различных C и B, все матрицы C являются симметричными положительно-определёнными. Для каждой тестовой задачи вычислялась числовая характеристика d_i, характеризующая степень приближения оценки e_i к точному решению задачи. В нижней строке приведены значения среднего арифметического $\bar{d}_i$ по каждой строке.

Для иллюстрации эффективности оценок с учётом их оптимизации рассмотрим их применение в схеме метода ветвей и границ. В качестве правила деком-

Таблица 1

$\min_{x \in E}\varphi(x)$	ρ_0	$e_1(x)$	$e_2(\rho)$	$e_3(x)$
692.83	7.74	656.54(94.76)	257.01(37.10)	691.08(99.75)
458.74	6.73	448.35(97.35)	227.82(49.66)	458.74(100.00)
481.72	7.51	472.30(98.04)	254.16(52.76)	478.95(99.42)
…	…	…	…	…
$\bar{d}_i$		97.30	43.78	99.83

позиции выберем простейшее, заключающееся в том, что на каждом i-м уровне будем фиксировать i-ю координату x и присваивать ей поочерёдно одно из оставшихся после предыдущих фиксаций возможное решение. Пример дерева для оценки $e_1(x)$ приведен в табл. 2. Здесь Y_i – множество, на котором строятся перестановки на i-м уровне. При n=4 $Y_0 = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$. На n-2 уровне спуск заканчивается, так как мощность Y_2 равна 2.

В качестве показателя эффективности работы оценок было выбрано число отсечённых ветвей дерева методом ветвей и границ на каждом из уровней, по которому можно определить число отсечённых вершин. Так, в лучшем случае значение показателя будет равно для n=2 (1,1).

При n=8 получены следующие результаты: значения показателя эффективности и время работы программы в секундах для оценок e_1, e_2, e_3 соответственно равны

(8, 25, 64, 51, 44, 4), 288 с,

(8, 56, 336, 1619, 3716, 1588), 172 с,

(3, 6, 6, 6, 6, 6), 164 с

при числе ветвей на каждом из уровней

(8, 56, 336, 1680, 6720, 20160).

Таким образом, в результате анализа вычислительных экспериментов можно сделать следующие выводы.

1. Оптимизация оценок $e_1(x), e_2(\rho), e_3(x)$ приводит к их существенному улучшению по сравнению с оценками, вычисленными при произвольных x и ρ.

2. Для сильно выпуклых дифференцируемых функций наиболее эффективной является оценка $e_3(x)$. Оценку $e_2(\rho)$ целесообразно применять при недифференцируемой функции $f(x)$.

3. Использование оценок $e_1(x), e_2(\rho), e_3(x)$ в методе ветвей и границ с тривиальной схемой ветвления показывает следующее. С одной стороны, вычисление оценок позволяет отсечь значительное число ветвей дерева и существенно сократить перебор. С другой стороны, попытки решить задачи более высокой размерности приводят к значительному увеличению затрат времени, что требует применения более эффективных схем ветвления и проведения дальнейших исследований.

Литература: 1. *Стоян Ю.Г.* Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. Х., 1980. 22с. (Препринт АН УССР/Ин-т пробл. машиностроения, 85). 2. *Емеличев В.А., Ковалёв М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. М:. Наука, 1981. 344с. 3. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка, 1986. 268с. 4. *Стоян Ю.Г., Гребенник И.В., Емец О.А.* Комбинаторные множества размещений и их свойства. Х., 1990. 38с. (Препринт АН УССР\Ин-т пробл. машиностроения, 342). 5. *Яковлев С.В.* Теория выпуклых продолжений функции на вершинах выпуклых многогранников //ЖВМ и МФ. 1994. Т.34, №7. С.1112-1119. 6. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Емец О.А.. Валуйская О.А.* Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере// Кибернетика и системный анализ. 1998. №2. С.27-36. 7. *Яковлев С.В., Гребенник И.В.* О некоторых классах задач оптимизации на множествах размещений и их свойствах// Изв. вузов. Математика. 1991. №11. С.74-86. 8. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике // ДАН УССР, Сер А. 1988. №5. С.68-70. 9. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике// ДАН УССР, Сер.А. 1988. №3. С.238-240. 10. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552с.

Поступила в редколлегию 16.10.2001

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Новожилова М.В.

Гребенник Игорь Валериевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры системотехники ХНУРЭ. Научные интересы: комбинаторная оптимизация, вычислительные методы, математическое моделирование. Увлечение: волейбол. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.

Лапко Дмитрий Александрович, студент 4-го курса ХНУРЭ. Научные интересы: комбинаторная оптимизация, вычислительные методы, математическое моделирование. Увлечение: классическая гитара. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.

Таблица 2

x_1	1			2			3			4		
Y_1	(2 3 4)			(1 3 4)			(1 2 4)			(1 2 3)		
$e_1(x)$	782			680			604			615		
x_2	2	3	4	1	3	4	1	2	4	1	2	3
Y_2	(3 4)	(2 4)	(2 3)	(3 4)	(1 4)	(1 3)	(2 4)	(1 4)	(1 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2)
$e_1(x)$	783	803	960	708	720	879	617	609	875	627	621	728
$\varphi(x_3^1)$	888	989	1041	813	963	1017	803	852	932	708	759	785
$\varphi(x_3^2)$	783	803	960	708	720	879	617	609	875	627	621	728
min	783	803	960	708	720	879	617	609	875	627	621	728