

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ R -ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ РАЦИОНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

*Л. А. Беленькая, В. А. Склепус, Ю. Г. Стоян,
В. М. Черепашин, Ю. В. Шагаев*

Х а р ь к о в

Техническая подготовка производства новых изделий на промышленном предприятии представляет собой сложный комплекс взаимоувязанных между собой работ, своевременное выполнение которых в большой степени зависит от используемых при их планировании методов. Все большее распространение при планировании технологической подготовки получают методы, основанные на использовании сетевых графиков, которые имеют существенные преимущества по сравнению с ранее применявшимися.

Одна из основных задач при планировании технической подготовки производства новых изделий — рациональное использование ресурсов на протяжении времени выполнения этого комплекса работ. Под рациональным использованием ресурсов понимается отсутствие значительных отклонений в их потребности на каждом отдельном календарном промежутке времени.

Анализ работ ряда авторов показывает, что при различии используемых алгоритмов по рациональному распределению ресурсов во времени в общей постановке решаемой задачи наметилось два основных направления.

Первый — оговариваются уровни (предельные значения) ресурсов, т.е. то количественное значение их, которым можно воспользоваться при выполнении работ. В этом случае ограничения по ресурсам (при условии их рационального использования во времени) определяют продолжительность выполнения всего комплекса работ.

Второй — оговаривается время окончания проекта при условии отсутствия ограничений на используемые ресурсы; производится такое распределение работ во времени, при котором отклонения в их потребности от среднего значения на протяжении всей разработки минимальны.

Из практики планирования крупных разработок видно, что в общей постановке задач по рациональному распределению ресурсов предпочтение должно быть отдано первому направлению, так как весьма редко исходными условиями решения задачи может быть оговорено отсутствие ограничений по используемым ресурсам. В этом случае всегда необходимо, чтобы выполнялось требование сведения к минимуму общей про-

должительности комплекса работ при количественном использовании ресурса, соответствующем его граничному значению в рассматриваемый промежуток времени.

В предложенных алгоритмах по оптимизации распределения используемых ресурсов во времени в основу итерационных преобразований положен сетевой граф общего комплекса с фиксированными значениями сроков начала либо окончания работ (обычно это ранние сроки начала работ). Используя возможность некоторого перемещения выполнения не критических работ в пределах известных для их значений резервов времени, в соответствии с определенными правилами производится перераспределение ресурсов.

Значительное влияние субъективного фактора на этапе построения сетевой модели и определенная трудность расчетов по оптимизации больших систем приводит к получению локальных оптимумов.

Более эффективно решение задачи по рациональному распределению ресурсов во времени при разработке алгоритма, с помощью которого на основе некоторых исходных данных удастся построить сетевую модель при сведении к минимуму влияния субъективного фактора на ее топологию и выполнения условия имеющихся ограничений по ресурсам. При построении такого алгоритма может быть использован математический аппарат R -функций.

Решаемая задача может быть сформулирована следующим образом. Весь перечень работ, который необходимо выполнить по каждому заказу R ($R = 1, \dots, S$), представляется в виде списка с указанием общей трудоемкости по каждой работе i -го вида ($i = 1, \dots, n$) (ее объема, который соответствует продолжительности выполнения данной работы единицей ресурса вида j ($j = 1, \dots, m$)) и количества ресурса j -го вида, используемого для ее выполнения. Все работы, входящие в список, объединяются в группы L ($L = 1, \dots, H$; $H \geq S$) согласно следующим признакам: работы i , входящие в группу L , должны принадлежать одному заказу R и выполняться одним видом ресурса j при условии логической последовательности выполнения работ внутри заказа (если в каждом из R заказов будет одна и только одна группа работ с использованием j -го вида ресурса, то $H = S$; $i = 1, 2, \dots, n_L$).

Для групп работ, выполняемых одним видом ресурса, устанавливается последовательность их выполнения из условия «степени интенсивности» выполнения работ внутри группы L

$$\gamma^{(L)} = \frac{\sum_i A_i^{(L)}}{B_j (\max [D_k] - t^0)}, \quad (1)$$

$$(L = 1, \dots, H)$$

где $A_i^{(L)}$ — общая трудоемкость работы i -го вида L -й группы;

B_j — наличие ресурса j -го вида;

D_k — директивный срок окончания комплекса работ по данному заказу;

t^0 — возможный срок начала работ.

Предпочтение отдается группе, для которой

$$\gamma = \max [\gamma^{(L)}] \quad (2)$$

Такая последовательность позволяет несколько свободней маневрировать ресурсами при выполнении последующих заказов ввиду их меньшей напряженности.

Приоритет групп примерно с равной степенью срочности определяется из соотношения

$$\lambda^{(R)} = \frac{\sum_L \sum_i A_i^{(L)}}{\sum_L \sum_i A_i^{(L)}}, \quad (k = 1, 2, \dots, S), \quad (3)$$

где $\sum_L \sum_i A_i^{(L)}$ — общая трудоемкость первых по последовательности выполнения работ R -го заказа;

$\sum_L \sum_i A_i^{(L)}$ — трудоемкость остальных работ R -го заказа.

Предпочтение отдается группе, для которой значение $\lambda^{(R)}$ является минимальным. При этом работы последующей группы начинаем выполнять при условии, что начаты все работы предшествующей группы и имеется свободный ресурс. Внутри же групп работы могут выполняться параллельно во времени, если это допускает количество имеющегося в наличии ресурса, либо последовательно при недостатке в данном виде ресурса.

Условия, которые должны выполняться при этом, могут быть сформулированы следующим образом.

1. Для количества ресурса j -го вида, используемого для выполнения i -й работы $b_i^{(L)}$, известно минимальное и максимальное количественное значение

$$\alpha_i^{(L)} \leq b_i^{(L)} \leq \beta_i^{(L)}. \quad (4)$$

Работы планируются при условии максимального «насыщения» их ресурсами, т. е. $b_i^{(L)} = \beta_i^{(L)}$; это позволяет уменьшить состав работ, параллельно выполняемых во времени и, таким образом, сосредоточить внимание на этих работах и строго их контролировать.

2. Количество используемого ресурса $b_i^{(L)}$ не меняется во времени

$$b_i^{(L)} = \text{const}. \quad (5)$$

3. Принимаем, что для продолжительности работы $a_i^{(L)}$ и количества используемого ресурса $b_i^{(L)}$ справедлива следующая зависимость:

$$a_i^{(L)} = \frac{A_i^{(L)}}{b_i^{(L)}}, \quad (6)$$

причем, работа не прерывается до полного ее окончания, т. е.

$$a_i^{(L)} = \text{const}. \quad (7)$$

Рассмотренной выше задаче можно дать геометрическую интерпретацию.

Рассмотрим полубесконечную полосу, ширина которой характеризует наличие ресурса j -го вида B_j , тогда как направление полосы совпадает с осью времени t . Работу i -го вида L -й группы с использованием j -го ресурса можно представить как прямоугольник $A_i^{(L)}$ со сторонами $b_i^{(L)}$ и $a_i^{(L)}$ и площадью $A_i^{(L)} = b_i^{(L)} \times a_i^{(L)}$ при условии (5), (7).

Положение прямоугольника на плоскости можно характеризовать параметрами подвижной системы координат X_i, Y_i , связанной с прямоугольником так, как показано на рис. 1.

Очевидно, в данной задаче положение каждого прямоугольника будет характеризоваться только двумя параметрами x_i и y_i при $\theta_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Тогда оптимальное использование j -го ресурса во времени можно представить как размещение L групп ($L = 1, \dots, H$) прямоугольников на полубесконечной полосе шириной B_j , чтобы не получилось наложения и соблюдалась последовательность размещения отдельных групп прямоугольников, т.е. указанные выше ограничения, причем длина полосы $T_{\text{опт}}$, занимаемой прямоугольниками, должна быть минимальной.

Для решения поставленной задачи был разработан алгоритм, аналогичный описанному в работах [1, 2].

Он разбивается на три основных этапа.

1. На основании исходных данных:

1) прямоугольники объединяются в группы, согласно указанным выше признакам;

2) определяются размеры всех прямоугольников

$$a_i^{(L)} \text{ и } b_i^{(L)},$$

3) устанавливается последовательность размещения групп прямоугольников;

4) для каждого вида ресурса устанавливается ширина полосы B_j и затем решается задача использования каждого вида ресурса отдельно.

II. Рассмотрим решение такой задачи для одного вида ресурса.

Пусть имеется H групп прямоугольников по n_L прямоугольников в каждой L -й группе. Совместим ось времени t с осью абсцисс системы координат ox , а ширину полосы — с осью ординат oy (рис. 1). Тогда параметры каждого i -го прямоугольника L группы длиной $a_i^{(L)}$ и шириной $b_i^{(L)}$ соответственно $x_i^{(L)}$ и $y_i^{(L)}$.

С помощью датчика равномерно-распределенных случайных чисел находим последовательность размещения прямоугольников в каждой группе, которая совместно с последовательностью выборки групп даст возможность получить некоторый вариант размещения прямоугольников на данной полосе B_j , т.е. вариант использования j -го вида ресурса.

Такой вариант получаем следующим образом:

1) прямоугольники размещаются на данной полосе последовательно по одному, причем размещенные ранее фигуры считаются неподвижными;

2) из всех возможных положений размещаемого прямоугольника на незанятой части полосы выбирается положение с минимальной абсциссой параметра размещения;

3) если условию п. 2 удовлетворяет несколько возможных положений фигуры, то выбирается положение с минимальной ординатой. Ограничения, наложенные на параметры размещения прямоугольников $\Theta_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), позволяют значительно упростить алгоритм постановки прямоугольника и проверки на непересечение с поставленными ранее фигурами. Эту проверку можно заменить проверкой на непересечение с границей, разделяющей свободную зону полосы от занятой, которая в данном случае состоит из вертикальных и горизонтальных отрезков прямых. Условия непересечения прямоугольника с горизонтальным отрезком можно записать так:

$$F(x_i, y_i) = (x_i^{(L)} - x'_{p\max}) \vee_k^* (x'_{p\min} - x_i^{(L)} - a_i^{(L)}) \vee_k^* (y'_p - y_i^{(L)} - b_i^{(L)}) \vee_k^* (y_i^{(L)} - y'_p) \geq 0. \quad (8.1)$$

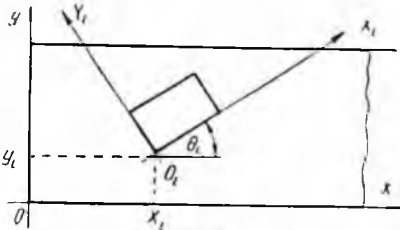


Рис. 1.

Соответственно с вертикальным отрезком

$$F(x_i, y_i) = (x_i^{(L)} - x_q^*) \vee_a^k (x_q^* - x_i^{(L)} - a_i^{(L)}) \vee^k (y_i^{(L)} - y_{q\max}^*) \vee_a^k (y_{q\min}^* - y_i^{(L)} - b_i^{(L)}) > 0, \quad (8.2)$$

где $x_i^{(L)}, y_i^{(L)}$ — параметры размещения i -го прямоугольника;

$a_i^{(L)}, b_i^{(L)}$ — размеры i -го прямоугольника;

$x_p^*, x_{p\min}^*, x_{p\max}^*$ — координаты концов p -го горизонтального отрезка;

$x_q^*, y_{q\min}^*, y_{q\max}^*$ — координаты концов q -го вертикального отрезка;

$\vee_a^k$ — операция R -дизъюнкции [5].

Все возможные положения прямоугольника на незанятой части полосы, которые могут удовлетворять условиям, изложенным в п. п. 1—3, совместно с условиями непересечения (8.1, 8.2), характеризуется следующими параметрами размещения:

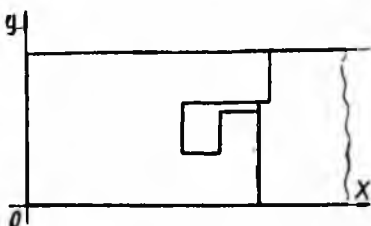


Рис. 2.

$x_i^{(L)} = x_q^*$, при этом

$$y_q^* < y_{q+1}^*, y_i^{(L)} + b_i^{(L)} > y_{q+1}^*; \quad (9)$$

$y_i^{(L)} = y_p^*$, при этом

$$x_p^* > x_{p+1}^*, x_i^{(L)} + a_i^{(L)} > x_{p+1}^*.$$

где $x_i^{(L)}, y_i^{(L)}$ — координаты возможных положений i -го прямоугольника;

$x_p^*, y_p^*, x_{p+1}^*, y_{p+1}^*$ — координаты начала и конца некоторого p горизонтального отрезка;

$x_q^*, y_q^*, x_{q+1}^*, y_{q+1}^*$ — координаты начала и конца некоторого q вертикального отрезка.

После того как найдем положение прямоугольника, удовлетворяющего этим требованиям, производится изменение границы свободной части полосы. При этом она спрямляется в тех точках, где расстояние между противоположными отрезками меньше $\min(a_{\min}^{(L)}, b_{\min}^{(L)})$ (рис. 2). Аналогичным образом производится размещение всех остальных прямоугольников.

Следует заметить, что в исходном состоянии линия, ограничивающая свободную часть полосы, состоит из двух полубесконечных горизонтальных лучей и вертикального отрезка, ограничивающего полосу слева.

Перед размещением каждой следующей L -й группы прямоугольников производится видоизменение границы поставленных ранее фигур $(L-1)$ -й группы (рис. 3), т.е. граница спрямляется по линии $x = A$,

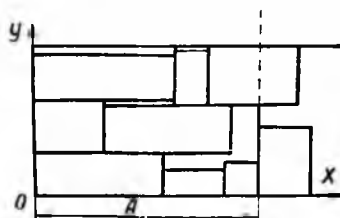


Рис. 3.

$$A = \max(x_i^{(L-1)}), \quad (10)$$

где $x_i^{(L-1)}$ ($i = 1, \dots, n_L$), ($L = 1, \dots, H$) — параметр размещения i -го прямоугольника $(L-1)$ -й группы.

При этом преобразование точек границы удовлетворяет следующему соотношению:

$$x'_p = \begin{cases} x_p, & \text{если } x_p \geq A, \\ A, & \text{если } x_p \leq A. \end{cases} \quad (11)$$

$$y'_p = y_p.$$

В результате такого размещения всех групп прямоугольников будет получен некоторый вариант размещения, который является локальным экстремумом функции цели.

Если в таком размещении переставить хотя бы одну пару фигур, можно получить новый вариант плотного размещения, который также является относительным локальным экстремумом функции цели. Но число таких экстремумов при данной постановке задачи будет не менее

$$N = \prod_{L=1}^H N_L; \quad (N_L = n_L!) \quad (12)$$

n_L — число прямоугольников в L -й группе.

Например, при $H = 5$, $n_L = 5$ число вариантов размещения не менее $24,9 \cdot 10^9$.

III. Возникает необходимость упорядоченного перебора вариантов для исключения заведомо плохих вариантов. Для этого был применен метод, использующий асимптотические средства функции цели.

Функция цели в поставленной задаче имеет следующий вид:

$$x(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{l=1}^{n_L} \bigvee_{L=1}^H \alpha^k x_l^{(L)} + a_1^{(L)}. \quad (13)$$

Можно ограничиться случаем когда $\alpha = 1$, $r \leq \frac{1}{2} n^{\frac{1}{6}}$. Тогда после несложных преобразований ее можно привести к виду

$$x(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{2r}) + \psi_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{3r}) + \dots + \psi_{r/2}(x_{n-2r}, x_{n-2r+1}, \dots, x_n), \quad (14)$$

где каждое слагаемое зависит не более, чем от r соседних переменных,

$$n = \sum_{L=1}^H n_L. \quad (15)$$

Как показано в работе [3], распределение значений функции цели асимптотически сходится к нормальному при $n \rightarrow \infty$. На основании центральной статистической теоремы [4] можно заключить, что экспериментальные значения в силу формулы (15) при $n \rightarrow \infty$ также распределяются по закону, сходящемуся к нормальному.

Используя специфику данной задачи, из всего множества L_1 экстремальных значений функции цели с математическим ожиданием M_1 и вторым центральным моментом σ_1 можно выделить подмножество L_2 с соответствующими параметрами распределения M_2 и σ_2 , причем $M_2 < M_1$ и $\sigma_2 < \sigma_1$. Если в некотором варианте производить случайную перестановку только одной пары фигур некоторой группы, то получим варианты, значение функции цели в которых образуют подмножество экстремумов, распределенных по закону, сходящемуся к нормальному с дисперсией σ_2 меньшей, чем σ_1 .

Если в качестве исходного варианта каждый раз брать лучший из предыдущих вариантов, будет происходить сдвиг математического ожидания в сторону глобального минимума функции цели, т.е. оптимального размещения прямоугольников.

Скорость спуска с приближением к глобальному экстремуму уменьшается, поэтому она может служить критерием окончания спуска из некоторого случайного варианта размещения фигур. Конкретно ее можно оценить экономической целесообразностью продолжения спуска.

Ввиду того, что число прямоугольников конечно, для получения варианта, достаточно близкого к оптимальному, имеет смысл сделать несколько таких спусков из различных начальных последовательностей (точек).

Для получения коэффициента заполнения [6] не менее 0,9 при количестве прямоугольников, равном 50, необходимо в среднем затратить 15—20 мин на ЭЦВМ типа М-20.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Г. Стоян, В. М. Черепашин. Об одном способе рационального размещения кругов в полосе. Тезисы докладов и сообщений на Всесоюзном межвузовском симпозиуме по прикладной математике и кибернетике. Горький, 1967.
2. Ю. Г. Стоян, А. Г. Глушко, В. М. Черепашин. Алгоритм рационального размещения плоских фигур сложной формы на материале. «Кибернетика в машиностроении», 1969, № 10.
3. И. Б. Моцкус. Многоэкстремальные задачи в проектировании. Изд-во «Наука», 1967.
4. М. Лоев. Теория вероятностей. Физматгиз, 1962.
5. В. Л. Рвачев. Геометрические приложения алгебры логики. Изд-во «Техника», Киев, 1967.
6. Л. Тот. Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве. Физматгиз, 1958.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ЛИКВИДАЦИИ УЗКИХ МЕСТ МЕТОДОМ СИМПЛЕКС-ПЛАНИРОВАНИЯ

Э. А. Дедиков, С. А. Канцедал, Я. Н. Рысухин

Х а р ь к о в

Планирование ликвидации узких мест с целью выбора напряженного годового плана машиностроительного предприятия предлагается осуществлять на основании решения задачи нелинейного программирования [1]. В связи с недифференцируемостью и предполагаемой многоэкстремальностью целевой функции в качестве метода решения задачи используется динамическое программирование, для чего выведены необходимые рекуррентные соотношения.

Реалистичный подход к некоторым производственным ситуациям при составлении модели плана нередко требует учета ряда ограничений вследствие чего решение задачи указанным методом становится весьма затруднительным из-за быстрого роста объема вычислений.

В данной работе для решения этой задачи предполагается другой, более эффективный вычислительный метод, учитывающий возможную замену точной модели [1] приближенной.

1. Аппроксимирующая модель

В выражении

$$\Phi МП = Z a_1 \left(\frac{\Theta + \Delta \Theta}{\Theta_0} - 1 \right) + Z a_2 \left(\frac{P + \Delta P}{\Phi + \Delta \Phi} - \alpha \right), \quad (1)$$