тельных чисел, над которыми задано линейное пространство. Из этого примера наглядно видно, что имея информацию о предикате E и не имея ее об операторе F, мы фактически знаем разбиение плоскости, осуществляемое предикатом E в виде семейства параллельных прямых $\{M_u\}_{u \in E_1}$, т.е. знаем $KerF$ неизвестного оператора, но никак не образ. Точнее, зафиксировав вектор e на оси ОХ, $\mathrm{ImF} = L`$ можно получить в виде $L` = \lambda e = OX$. С другой стороны, зафиксировав другой вектор $e` \in E_2$, мы можем найти $u` = \alpha`(x)e`$, для которого $E(x, \alpha`(x)e`) = 1$, т.е. образ оператора будет представлять прямую $L`` = \lambda e`$, вообще говоря, не совпадающую с $L`$, но изоморфную ей. Это обстоятельство зафиксировано в ходе доказательства теоремы. При этом оператор изменился, поскольку числа $\alpha(x)$ б и $\alpha`(x)$ не равны. Однако для нового оператора $F`$ осталось равенство $E(x,y) = D_{L`}(F`x, F`y)$. Связь между $F$ и $F`$ осуществляется с помощью некоторого изоморфизма $\varphi : L` \to L``$ и выглядит $F` = \varphi F$. Подобный произвол вполне естественен с точки зрения идентификации компараторным способом и допустим с точки зрения математического моделирования (математическая модель получается с точностью до изоморфизма). Но поскольку выбор вектора e (это видно из примера) неоднозначен, зависит от исследователя и влияет на образ оператора (в данном примере число $\alpha(x)$), то возникает два вопроса: 1) каким образом осуществлять этот выбор? 2) каким образом может быть найдена связь между ImF и ImF' при двух различных выборах? Ответ на первый вопрос можно получить, рассматривая наш пример. Действительно, вектор e в данном случае может быть любым с точностью до одного ограничения: $Fe \neq 0$, т.е. он должен принадлежать $KerF$. Но оператор F нам неизвестен, и при произвольном выборе e наверняка обеспечить это условие невозможно. Однако если выбор e осуществляется наугад, то вероятность события, что $Fe \neq 0$, будет равна 1, поскольку $KerF$ подпространство более низкой размерности, чем L, а следовательно, мера его 0, если считать меру L равной 1. Этот факт наблюдается не только в нашем примере, но и в остальных ситуациях. Поэтому на практике выбор e, а в общем случае базисы $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots \in L$ можно осуществлять произвольно. В этом заключается ответ на первый вопрос. Ответ на второй вопрос выходит за рамки данной статьи.

В заключение отметим, что набор свойств теоремы является необходимым и достаточным, другими словами, *характеристическим* для линейного предиката E, заданного на $< L, P >$. Проверка этих свойств в эксперименте позволяет классифицировать произвольный предикат как линейный. В этом смысле центральным результатом данной статьи является теорема существования линейных предикатов и процедура идентификации линейных операторов в произвольном линейном пространстве.

Литература: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Т.3. Харьков: Основа, 1989. 180 с. 2. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

Поступила в редколлегию 02.11.2000

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Шабанов-Кушнаренко С.Ю.

Воскобойник Олег Николаевич, соискатель ХТУРЭ. Научные интересы: математические методы анализа сложных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-72.

Иващенко Валерий Владимирович, соискатель ХТУРЭ. Научные интересы: математические методы анализа сложных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-72.

УДК 519.85

ОЦЕНКИ МИНИМУМА ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК ЭКСТРЕМУМА НА ЕВКЛИДОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ МНОЖЕСТВАХ

ГРЕБЕННИК И.В.

Рассматривается задача оптимизации на комбинаторном множестве, отображенном в евклидово пространство. Для выпуклого продолжения целевой функции задачи, имеющего ограниченное множество точек экстремума, строятся оценки минимума на комбинаторном множестве. Приводятся классы целевых функций и комбинаторных множеств, для которых получены в явном виде решения вспомогательных задач.

Рассмотрим задачу оптимизации вида

$$\overline{\varphi}(x) \to \min, \quad x \in E \subset R^n, \qquad (1)$$

где E – евклидово комбинаторное множество [1], отображенное в пространстве R^n. Элементами множества являются векторы, значения координат которых представляют собой упорядоченные наборы из элементов множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_m$. Примерами евклидовых комбинаторных множеств являются множества перестановок, размещений с повторениями и без повторений, сочетаний и др. Элементы евклидовых комбинаторных множеств – это вершины комбинаторных многогранников, исследованию которых посвящены, в частности, работы [2-4].

Предположим, что существует выпуклое продолжение $\varphi(x)$ функции $\overline{\varphi}(x)$ на выпуклое замкнутое множество $X \supseteq conv\,E$, где $conv\,E$ – выпуклая оболочка множества E. В ряде случаев оно может быть сделано с сохранением выражения $\overline{\varphi}(x)$. В то же время, для некоторых классов множеств удается осуществить выпуклое (сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$) продолжение на $X \supseteq conv\, E$ для любых $\overline{\varphi}(x)$. В работе [5] доказывается существование такого продолжения для множеств, совпадающих с множеством вершин своей выпуклой оболочки, т.е. удовлетворяющих условию

$$E = vert\ conv\, E\ . \tag{2}$$

Заметим, что условию (2) удовлетворяют евклидовы комбинаторные множества перестановок, сочетаний, размещений без повторений из n элементов по $n-1$, размещений с повторениями из 2 элементов по n и др. Евклидовы множества размещений с повторениями и без повторений общего вида путем декомпозиции могут быть разбиты на множества, удовлетворяющие условию (2). Методы построения выпуклых и сильно выпуклых продолжений для классов множеств, удовлетворяющих условию (2), приведены в работах [6-8].

В результате построения выпуклого продолжения может быть сформулирована задача оптимизации, эквивалентная (1):

$$\varphi(x) \to \min, \quad x \in E \subset R^n, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ – выпуклая (сильно выпуклая) на выпуклом замкнутом множестве $X \supseteq conv\, E$ функция, такая что $\varphi(x) = \overline{\varphi}(x) \quad \forall x \in E.$

Исследуем некоторые экстремальные свойства задачи (3). Заметим, что оценки минимума выпуклых функций на классах евклидовых комбинаторных множеств рассмотрены в [7,9]. Пусть $\varphi(x)$ – выпуклая функция, множество точек её минимума обозначим U_*:

$$U_* = \left\{x \in R^n \mid \varphi(x) = \varphi\left(y^*\right)\right\}, \quad y^* = \arg\min_{x\in X} \varphi(x). \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда множество U_* ограничено. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\varphi(x)$ – выпуклая на выпуклом замкнутом множестве $X \supseteq conv\, E$ функция, U_* – множество точек ее минимума, удовлетворяющее условию* (4)*, причем U_* ограничено, т.е. существует такое число $R > 0$, что*

$$U_* \subset S_* = \left\{x \in R^n \left| \left\|x - y^*\right\| < R \right.\right\} \subset X,$$

где y^* – какая-либо фиксированная точка из множества U_*. Тогда справедлива оценка

$$\min_{x\in E} \varphi(x) \ge \left\|x^* - y^*\right\| \frac{\varphi_R^* - \varphi\left(y^*\right)}{R} + \varphi\left(y^*\right), \tag{5}$$

где $\varphi_R^* = \min_{x\in\partial S_*} \varphi(x)$, ∂S_* – граница множества S_*,

$$x^* = \arg\min_{x\in E} \|x - y\|, \quad x \in X \setminus S_*.$$

Доказательство. Получим вначале следующую оценку для $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \ge \left\|x - y^*\right\| \cdot \frac{\varphi_R^* - \varphi\left(y^*\right)}{R} + \varphi\left(y^*\right), \tag{6}$$

где $x \in X \setminus S_*, \varphi_R^*$ – минимум $\varphi(x)$ на границе множества S_*. Доказательство справедливости оценки (6) проведем по схеме доказательства теоремы в [10], приведенного там для аналогичной оценки в случае, когда $\varphi(x)$ выпукла на R^n.

Предположим, что множество S_*, содержащее U_*, построено и не пусто. Предположим также, что не пусто множество $X \setminus S_*$. Случай $X = S_*$ свидетельствует либо о том, что $\varphi(x) = const$ на X, либо о том, что множество $S_* \supset U_*$ может быть уменьшено и тогда $X \setminus S_* \ne \varnothing$. Возьмем любую точку $x \in X \setminus S_*$. Рассмотрим точку $y \in \partial S_*$:

$$y = y^* + R \cdot \frac{x - y^*}{\left\|x - y^*\right\|} = \frac{R}{\left\|x - y^*\right\|} \cdot x + \left(1 - \frac{R}{\left\|x - y^*\right\|}\right) \cdot y^*.$$

С учетом выпуклости $\varphi(x)$ на X имеем

$$\varphi_R^* \le \varphi(y) \le \frac{R}{\left\|x - y^*\right\|} \varphi(x) + \left(1 - \frac{R}{\left\|x - y^*\right\|}\right) \varphi\left(y^*\right).$$

Отсюда сразу получаем неравенство (6). В обеих его частях возьмем минимум по $x \in E$. Имеем

$$\min_{x\in E} \varphi(x) \ge \left(\min_{x\in E} \left\|x - y^*\right\|\right) \cdot \frac{\varphi_R^* - \varphi\left(y^*\right)}{R} + \varphi\left(y^*\right).$$

Отсюда непосредственно следует справедливость утверждения теоремы.

Рассмотрим решение задачи об отыскании минимума нормы разности $\left\|x - y^*\right\|$ в правой части соотношения (5). Решение задачи нахождения $x^* = \arg\min_{x\in E} \|x - c\|^2, c \in R^n$ определяется структурой и комбинаторными свойствами класса множеств E, для которого решается задача. Решения ее для различных классов множеств $\varphi(x)$ приведены, например, в [7,9]. Так, для множества перестановок E_{nk} из n элементов, k из которых различны, порожденного числами $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, решение x^* имеет вид [9]:

$$x^*_{m_j} = a_{l_j},\ \ m_j, l_j \in J_n,\ \ j \in J_n,$$

последовательности $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ и $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ таковы, что

$$y^*_{m_1} \ge y^*_{m_2} \ge \ldots \ge y^*_{m_n},$$
$$a_{l_1} \ge a_{l_2} \ge \ldots \ge a_{l_n},$$

а $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Остановимся подробнее на способе построения множества S_* и на определении минимума $\varphi(x)$ на его границе φ^*_R. Отметим вначале, что если функция $\varphi(x)$ строго выпукла (сильно выпукла), то множество U_* состоит из единственного элемента y^*. Такое множество U_* можно получить, если построить сильно выпуклое с параметром ρ продолжение функции $\bar{\varphi}(x)$ на выпуклое замкнутое множество $X \supset conv\,E$, воспользовавшись способами, описанными в [6-8].

В случае, если $U_* \cap conv\,E = \varnothing$ и U_* содержит более одного элемента, в качестве S_* может быть принят любой шар с центром в точке $u \in U_*$, содержащий U_* и имеющий с множеством E пустое пересечение. Если U_*, содержащее более одного элемента, полностью содержится внутри многогранника $conv\,E$, то в качестве S_* может быть взят шар, границей которого является описанная вокруг многогранника сфера, если ее центр $u_0 \in U_*$. В случаях, когда эти условия не выполняются или необходимо варьировать границы множества S_*, всегда можно добиться сокращения количества элементов U_* до одного путем построения сильно выпуклого продолжения $\bar{\varphi}(x)$ на $X \supseteq conv\,E$. Поэтому можем считать далее, что U_* состоит из одного элемента y^*. Случай, когда $y^* \in E$, не представляет интереса, так как тогда y^* – решение задачи (3). В случае $y^* \bar{\in} E$ в качестве S_* может быть выбрана внутренность шара с центром в точке y^* и радиусом, не превышающим $r = \min\limits_{x \in E} \|x - y^*\|$. Очевидно, что внутри такого шара не будет ни одной точки множества E и условие $x \in X \setminus S_*$, для которого получена оценка (5), будет выполнено. При этом остается свобода выбора значения R для оценки (5) из интервала $[\varepsilon, r[$, где $\varepsilon > 0$ – близкое к нулю число, минимальный радиус шара S_*.

Задачу определения φ^*_R – минимума $\varphi(x)$ на сфере S – границе шара S_* – рассмотрим для двух случаев. В первом случае будем считать, что задача $\varphi(x) \to \min$, $x \in S$ может быть решена непосредственно. Решение такой задачи для случая, когда $\varphi(x)$ – квадратичная функция вида $\varphi(x) = (Wx, x) + (v, x)$, где W – положительно-определенная эрмитова матрица $n \times n$, а $v \in R^n$, приведено в [7]. При этом отыскиваются локальные экстремумы $\varphi(x)$ на сфере $\|x\|^2 = R^2$, которые имеют следующий вид:

$$x = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(v, l_i)}{\lambda_i - \lambda} l_i,\quad \lambda \ne \lambda_i,\quad i \in I_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ – собственные числа матрицы W; $l_1, l_2, \ldots, l_n$ – соответствующие им собственные векторы, а λ определяется как решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(v, l_i)}{\lambda_i - \lambda}\right)^2 = 4R^2. \qquad (7)$$

На каждом из интервалов $(-\infty, \lambda_1), (\lambda_1, \lambda_2), \ldots (\lambda_n, +\infty)$ функция, стоящая в левой части уравнения (7), является выпуклой. Поэтому корни уравнения, которых существует не более, чем $2n$, могут быть легко определены.

Если $v_i = 0$ для всех $i \in J_n$, то точки локальных экстремумов $\varphi(x)$ на сфере определяются как

$$x^{(j)} = \pm l_i R.$$

В случае, когда решение задачи отыскания минимума функции $\varphi(x)$ на сфере S затруднено, можно воспользоваться оценкой величины φ^*_R, которая может быть получена следующим образом. В сферу $S = \partial S_*$ впишем гиперкуб Π_{y^*} с центром в точке y^* таким образом, чтобы единичные базисные векторы пространства R^n были ортогональны его граням. Длина ребра такого гиперкуба ρ связана с радиусом описанной вокруг него сферы S соотношением [11]:

$$p = \frac{2 \cdot R}{\sqrt{n}},$$

где R – радиус сферы S. Поскольку минимум $\varphi(x)$ на X – точка y^* – является центром гиперкуба Π_{y^*}, то отыскание минимума $\varphi(x)$ на границе Π_{y^*} сведется к решению $2n$ задач оптимизации. Каждая из них представляет собой задачу определения минимума выпуклой функции на грани Π_{y^*} - куба в пространстве размерности $n-1$. Решение этих задач не представляет принципиальных трудностей. В результате получим $\widetilde{\varphi}_{\Pi}$ - минимум $\varphi(x)$ на границе гиперкуба Π_{y^*}. Ввиду выпуклости $\varphi(x)$ и того, что сфера с центром $y^* = \arg\min_{x \in X} \varphi(x)$ описана вокруг гиперкуба Π_{y^*}, справедлива следующая оценка:

$$\varphi\left(y^*\right) \leq \widetilde{\varphi}_{\Pi} \leq \varphi_R^* . \qquad (8)$$

Тогда найденное значение минимума $\widetilde{\varphi}_{\Pi}$ можно использовать для получения более слабой оценки, чем (5):

$$\min_{x \in X} \varphi(x) \geq \left\| x^* - y^* \right\| \cdot \frac{\widetilde{\varphi}_{\Pi} - \varphi\left(y^*\right)}{R} + \varphi\left(y^*\right), \qquad (9)$$

которая непосредственно следует из (5) и полученного соотношения (8).

Рассмотрим вопрос выбора величины R радиуса шара S_* в правых частях оценок (5) и (9). Как следует из доказанной теоремы, эти оценки справедливы при любых значениях $R \in [\varepsilon, r[$, а значит R можно выбрать таким образом, чтобы правые части неравенств (5) и (9) обратились в максимум.

Значение R, максимизирующее эти величины, выбирается неоднозначно. Его выбор зависит, в частности, от вида функции $\varphi(x)$. Так, если правая часть неравенства (5) или (9) является возрастающей или убывающей функцией R, то следует принять соответственно $R = r$ или $R = \varepsilon$. Для выяснения характера такой зависимости желательно иметь ее в явном виде, что далеко не всегда возможно. В качестве примера рассмотрим квадратичную функцию $\varphi(x)$ вида $\varphi(x) = (Wx, x)$, где матрица W является положительно-определенной $n \times n$ матрицей. Подставим $\varphi(x)$ в правую часть соотношения (5). Учтем при этом, что точки экстремумов $\varphi(x)$ на сфере радиуса R в этом случае имеют вид $x^{(j)} = \pm l_i R$, а безусловный минимум $\varphi(x)$ достигается в точке $y^* = 0$ и равен нулю. Тогда правая часть выражения (5) примет следующий вид:

$$\left\| x^* \right\| \cdot \frac{(WRl_i, Rl_i)}{R} = \left\| x^* \right\| \cdot R(Wl_i, l_i), \qquad (10)$$

где l_i – собственный вектор матрицы W, соответствующий точке минимума $\varphi(x)$ на сфере, а $x^* \in E$ – ближайшая к $y^* = 0$ точка множества E. Зависимость оценки от R здесь возрастающая, так что можно принять $R = r - \varepsilon$. Зададим конкретное значение матрицы W и рассмотрим в качестве E множество перестановок E_3, порожденное числами 1,2,3:

$$W = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Матрица W является положительно-определенной. Подставим в соотношение (10) значения $\left\| x^* \right\| = \sqrt{14}$, $R = 3.74 < \sqrt{14}$ и вычислим оценку для собственного вектора матрицы W, отвечающего минимуму $\varphi(x)$ на сфере радиуса R с центром в нуле. Имеем $\min_{x \in E_3} \varphi(x) \geq 98.74$. При этом минимум R на множестве W достигается при $x = (1,3,2)$ и равен 133.

Полученные оценки минимума выпуклых функций с ограниченным множеством точек экстремума могут быть использованы при реализации различных методов оптимизации на евклидовых комбинаторных множествах.

Литература: 1. *Стоян Ю.Г.* Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. Х., 1980. 22с. (Препринт АН УССР/Ин-т пробл. машиностроения; 85). 2. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981. 344с. 3. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка, 1986. 268с. 4. *Стоян Ю.Г., Гребенник И.В., Емец О.А.* Комбинаторные множества размещений и их свойства. Х., 1990. 38с. (Препринт АН УССР\Ин-т пробл. машиностроения; 342). 5. *Яковлев С.В.* Теория выпуклых продолжений функции на вершинах выпуклых многогранников // ЖВМ и МФ. 1994. Т.34, №7. С.1112-1119. 6. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Емец О.А., Валуйская О.А.* Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере // Кибернетика и системный анализ. 1998, №2. С.27-36. 7. *Яковлев С.В., Гребенник И.В.* О некоторых классах задач оптимизации на множествах размещений и их свойствах // Изв. вузов. Математика. 1991. №11. С.74-86. 8. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике // ДАН УССР, Сер.А. 1988. №5. С.68-70. 9. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике // ДАН УССР, Сер.А. 1988. №3. С.238-240. 10. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552с. 11. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648с.

Поступила в редколлегию 03.04.2001

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Новожилова М.В.

Гребенник Игорь Валериевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры системотехники ХТУРЭ. Научные интересы: комбинаторная оптимизация, вычислительные методы, математическое моделирование. Увлечение: волейбол. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.