

ЕВРИСТИЧНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РОЗРІДЖЕНОГО ПАКУВАННЯ КРУГІВ

Обидало О. С.,

e-mail: oleksandr.obydalo@nure.ua

Наукові керівники – д.т.н., проф. Гребеннік І. В.

д.т.н., проф. Романова Т.Є.

Харківський національний університет радіоелектроніки, кафедра КМІТ
м. Харків, Україна

Sparse packing refers to the placement of objects within a container maximizing the minimum Euclidean distance between them, as well as between the objects and the container boundary. This formulation is motivated by modern environmentally friendly and energy-efficient technologies, such as ultrasonic hardening and processing with detonating gas mixtures, used for cleaning complex shaped parts, obtained by 3D printing, from particles of non-sintered powder. The paper studies the problem of sparse packing of circles in a circular container. A heuristic algorithm employing nonlinear optimization and simulated annealing is proposed. Numerical experiments are provided to demonstrate the effectiveness of the approach.

Задачі пакування кругів мають широкий спектр застосувань у різноманітних галузях науки та техніки, в тому числі біології, медицині, логістиці, адитивному виробництві. Моделям та методам розв'язання щільного пакування кругів присвячено багато публікацій [1, 2]. У даному дослідженні розглядається задача розрідженого пакування кругів [3] у наступній постановці.

Нехай $\mathfrak{S} = \{C_i(v_i), i = 1, \dots, n\}$ – множина кругів із заданими радіусами r_i , та змінними центрами $v_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$. Позначимо круговий контейнер з радіусом R та центром $(0, 0)$ як C_0 . Необхідно знайти розміщення множини кругів $\mathfrak{S}$ у контейнер C_0 , яке максимізує мінімальну евклідову відстань між кругами, а також між кругами та об'єктом $C'_0 = R^2 \setminus C_0$:

$$\max_{v, d} d \quad (1)$$

за умов

$$-(x_i^2 + y_i^2) + (R - r_i - d)^2 \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2)$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j + d)^2 \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (3)$$

$$d \geq 0, \quad (4)$$

де $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Модель (1)–(4) є неперервною задачею нелінійного програмування з лінійною цільовою функцією, містить $2n + 1$ змінних та $\frac{n(n-1)}{2} + n$ нелінійних обмежень. Нерівність (2) відповідає умові включення кругів C_i

в контейнер C_0 , а нерівність (3) – умові розміщення кругів C_i та C_j на відстані не менше ніж d .

Для пошуку локально-оптимальних розв'язків задачі (1)–(4) застосовано евристику на основі методу відпалу [4], яка включає такі кроки:

Крок 1 – *Ініціалізація*. Задаються параметри: початкова температура $T_0 = 2$, кінцева температура $T_{\min} = 10^{-5}$, кількість ітерацій $N_{\max} = 30000$. Коефіцієнт геометричного охолодження визначається за формулою

$$\alpha = \left(\frac{T_{\min}}{T_0} \right)^{1/N_{\max}}.$$

Початковий розв'язок формується шляхом розміщення центрів кругів у вершинах правильного n -кутника з радіусом $r = \max(0.1, R - r_{\max} - \delta)$, де $r_{\max} = \max_{i=1, \dots, n} r_i$, а $\delta > 0$ – невеликий запас, що забезпечує початкове розміщення кругів всередині контейнера. Отримана конфігурація проєктується на допустиму область.

Крок 2 – *Генерація кандидата*. На кожній ітерації t випадково обирається круг $C_i(v_i)$. Центр $v_i = (x_i, y_i)$ змінюється відповідно до $v'_i = v_i + (\Delta x, \Delta y)$, де Δx та Δy – випадкові величини, рівномірно розподілені на інтервалі $(-\sigma_t, \sigma_t)$. Розмір кроку $\sigma_t = \frac{T_t}{T_0}$ адаптивно зменшується разом зі зниженням температури: великі збурення на початку забезпечують глобальний пошук, малі наприкінці – локальне уточнення. Після збурення новий центр проєктується на область контейнера, щоб круг не виходив за його межі.

Крок 3 – *Прийняття нового розв'язку за критерієм Метрополіса*. Нехай $v = (v_1, \dots, v_n)$ – поточна конфігурація центрів кругів, а $v' = (v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)$ – кандидатна конфігурація, отримана на Кроці 2. Обчислюється значення цільової функції (мінімальної евклідової відстані) для нового розв'язку: $d_{\text{new}} = d(v')$ та різниця між найкращим відомим та новим розв'язком $\Delta = d_{\text{best}} - d_{\text{new}}$. Якщо $\Delta \leq 0$ (покращення), кандидат приймається безумовно: Якщо $\Delta > 0$ (погіршення), кандидат приймається з ймовірністю $P = e^{-\Delta/T_t}$.

Це дозволяє алгоритму долати локальні оптимуми на ранніх етапах, коли температура T_t є високою, забезпечуючи глобальний пошук, а згодом – локальне уточнення розв'язку.

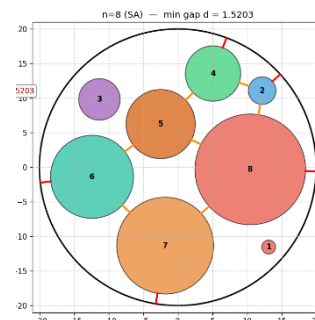
Крок 4 – *Охолодження*. Температура оновлюється за правилом $T_{t+1} = \alpha \cdot T_t$, монотонно спадаючи від T_0 до $T_{\min}$. Це поступове зниження температури зменшує як ймовірність прийняття гірших розв'язків, так і величину випадкових збурень σ_t , забезпечуючи поступовий перехід від глобального до локального пошуку.

Крок 5 – *Завершення*. Після виконання $N_{\max}$ ітерацій алгоритм повертає найкращий знайдений розв'язок (v_{best}).

Особливістю реалізації є жадібна стратегія генерації кандидатів: нові кандидати v' формуються від найкращого розв'язку v_{best} ,

а не від поточної конфігурації v . Це дозволяє ефективно шукати високоякісні розв'язки.

Результати обчислювальних експериментів, отриманих евристичним алгоритмом та глобальним солвером Baron [5] для прикладів пакування кругів радіусами $r_i = i$, $i = 1, \dots, n$, у круговому контейнері C_0 радіуса R : $n = 5, 6, 7$, $R = 15$; $n = 8$, $R = 20$, наведені у Таблиці 1. На рисунку показано приклад розрідженого пакування $n = 8$ кругів отриманих евристичним методом.



Таблиця 1 – Порівняння результатів, отриманих евристичним алгоритмом та глобальним солвером Baron

n	d (метод відпалу)	Час (сек.)	d^* (solver Baron)	Час (сек.)
5	3.460199	4.086	3.75115	0.25
6	2.173939	5.407	2.28972	0.65
7	0.674254	6.645	0.828836	7.94
8	1.5203	8.452	1.884467	628.23

Висновки. Запропонована евристика на основі методу відпалу демонструє ефективність при значно меншому часі обчислень порівняно з глобальним солвером, особливо для задач із кількістю об'єктів понад шість (див. табл. 1). Метод забезпечує надійні розв'язки задачі розрідженого пакування з масштабованою обчислювальною складністю.

Подальші дослідження планується спрямувати на розробку адаптивних алгоритмів навчання з підкріпленням, здатних динамічно керувати процесом пошуку та узагальнювати рішення для різних типів контейнерів і конфігурацій об'єктів.

Список використаних джерел:

1. M. Hifi, R. MHallah, A literature review on circle and sphere packing problems: Models and methodologies, *Advances in Operations Research* 2009 (2009) 150624.
2. Y. Kumar, K. Deep, Metaheuristic algorithms for circle packing problem: A comprehensive review, in: *International Conference on Metaheuristics and Nature Inspired Computing*, Springer, 2023, pp. 44–56.
3. Romanova, T., Pankratov, A., Litvinchev, I., Plankovskyy, S., Tsegelnyk, Y., Shypul, O. (2021). Sparsest packing of two-dimensional objects. *International Journal of Production Research*, 59(13), 3900–3915.
4. Gomez, A., de la Fuente, D., Puente, J., Parreño, J. (2005). The Resolution of Packing Problems Using Simulated Annealing and Genetic Algorithms. *Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering*, 51(5), 234–239.
5. Sahinidis, N., BARON 21.1.13: Global Optimization of Mixed-Integer Nonlinear Programs, User's manual, 2021.