



Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_

(підпис)

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2019 р.

## ЗАВДАННЯ НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Семенцовій Наталії Андріївні

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Дослідження адаптованості динамічних процесів в системах з захистом

затверджена наказом по університету від 31 жовтня 2019 р. № 1601 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 9 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи модель захисту, що допускає катастрофу типу збірки, з двома керуючими параметрами.

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Системний аналіз проблеми дослідження адаптованості динамічних процесів у системах із захистом та постановка задач дослідження

2. Класи об'єктів моделювання

3. Особливості моделювання технічних систем із захистом

4. Аналіз систем динамічного захисту з швидкими і повільними фазовими змінними

5. Дослідження залежності адаптованості системи з захистом від збурення

6. Дослідження адаптованості системи для кривої катастроф типу збірки

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Системний аналіз проблеми \_\_\_\_\_

3. Постановка задачі \_\_\_\_\_

4. Залежність адаптованості системи з захистом від збурення \_\_\_\_\_

5. Адаптованості системи для кривої катастроф типу збірки \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2019 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2019 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2019 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2019 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2019 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2019 р.	виконано

Дата видачі завдання 2 вересня 2019 р.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ доц. Наумейко І.В.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 70 с., 6 табл., 20 рис., 1 дод., 33 джерела.

АДАПТОВАНІСТЬ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ, ЗБІРКА, ЗБУРЕННЯ,  
КЕРУЮЧИЙ ПАРАМЕТР, КРИВА КАТАСТРОФ, СИСТЕМИ З ЗАХИСТОМ.

Об'єкт дослідження – система з захистом від збурення.

Мета роботи – дослідити адаптованість динамічних процесів в системах із захистом від збурення для кривої катастроф типу збірки.

Метод дослідження – пошук стійких стаціонарних точок системи, пошук кривих катастроф, виведення явної формули для міри адаптованості системи.

Результатами дослідження є:

– явні формули для знаходження кута між дотичними до кривих катастроф, у напрямі якого не існує перетинів зі складками, у двовимірному просторі керуючих параметрів;

– явні формули для знаходження кута для центру області, у напрямі якого не існує перетинів зі складками, та знаходження відношення площі області, що належить еліпсу та лежить між складками, та площі всього еліпсу у двовимірному просторі керуючих параметрів як міра адаптованості системи;

– явна формула знаходження адаптованості системи, положення якої у просторі керуючих параметрів визначається точкою та обмежене заданою еліптичною областю, з заданими імовірностями збурення в залежності від напрямку (кута).

## ABSTRACT

Introductory note: 70 pages, 6 tables, 20 figures, 1 appendix, 33 sources.

ADAPTABILITY OF DYNAMIC PROCESSES, ASSEMBLY, CURVE OF CATASTROPHE, CONTROL PARAMETER, PERTURBATION, SYSTEMS WITH PROTECTION.

The object of analysis is a system with protection from perturbation.

The purpose of the work is to investigate the adaptability of dynamic processes in the systems with protection of disturbance for the cusp catastrophe.

The research method is to investigate stable stationary points and catastrophe curves, the derivation of explicit formula for the measure of the system's adaptability.

The results of analysis are:

- explicit formulas for finding the angle between the tangents to the catastrophe curves in the direction of which there are no intersections with folds in the two-dimensional space of control parameters;

- explicit formulas for finding the direction in which there are no intersections with the folds for the center of the region, and finding the relative area of the region that belongs to the ellipse and lies between the folds in the two-dimensional control space as the measure of system adaptability;

- explicit formula to determine adaptability of the system which position in the control space determined and bounded with the given elliptical region, accounting the given perturbation probabilities in the direction (angle).

## ЗМІСТ

	С.
Вступ .....	8
1 Системний аналіз проблеми дослідження адаптованості динамічних процесів у системах із захистом та постановка задач дослідження .....	9
1.1 Системний аналіз проблеми дослідження адаптованості динамічних процесів у системах із захистом .....	9
1.1.1 Вербальна модель системи .....	9
1.1.2 Морфологічний опис системи .....	10
1.1.3 Функціональна модель системи .....	11
1.1.4 Інформаційна модель системи .....	12
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми дослідження адаптованості динамічних процесів у системах із захистом .....	13
1.2.1 Вибір критеріїв якості та розрахунок вектору локальних пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій .....	13
1.2.2 Вибір альтернатив та розрахунок векторів локальних пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій .....	15
1.2.3 Оцінка узагальнених пріоритетів .....	17
1.3 Постановка задач дослідження .....	18
1.3.1 Змістовна постановка задачі .....	18
1.3.2 Формальна постановка задачі .....	19
2 Класи об'єктів моделювання .....	20
3 Особливості моделювання технічних систем із захистом .....	21
4 Аналіз систем динамічного захисту з швидкими і повільними фазовими змінними .....	23
5 Дослідження залежності адаптованості системи з захистом від збурення ....	25
5.1 Адаптованість динамічних процесів в системах синергетичного захисту .....	25
5.2 Залежність адаптованості системи з захистом від збуренням .....	28

	7
6 Дослідження адаптованості системи для кривої катастроф типу збірки .....	31
6.1 Криві катастроф типу збірки у просторі керуючих параметрів .....	31
6.2 Відстань до кривої катастроф (збірка) у двовимірному просторі параметрів як міра адаптованості системи .....	32
6.3 Кут між дотичними до кривих катастроф (збірка) у двовимірному просторі параметрів як міра адаптованості системи .....	38
6.4 Адаптованість системи, положення якої обмежене заданою еліптичною областю .....	43
6.5 Адаптованість системи, положення якої обмежене заданою еліптичною областю, з заданими імовірностями збурення .....	51
Висновки .....	59
Перелік джерел посилання .....	60
Додаток А Адаптованість системи, що допускає катастрофу типу збірки .....	63

## ВСТУП

Під поняттям адаптованості динамічного процесу зазвичай мають на увазі деяку міру можливості системи зберігати незмінність основного ходу процесу при деякому впливі. В роботі ми спробуємо сформулювати поняття адаптованості математичною мовою для так званих систем з динамічним захистом. Слід відразу зазначити, що на теперішній час не існує остаточного загального визначення для поняття адаптованості.

Поняття адаптованості має багато спільного із такими поняттями, як: катастрофа, біфуркація, стійкість і багатьма іншими. Однак, це не дає в достатній мірі вичерпного визначення про адаптованість, в усякому разі на термінологічному рівні. Тому ми змушені проводити аналіз, використовуючи власні уявлення про адаптованість, які, однак, можуть виявитися придатними для об'єктивного системного дослідження.

Лише відштовхуючись від прийнятого математичного опису системи можливо визначити конкретне математичне формулювання для міри адаптованості, як і для поняття стійкості. Ми будемо дотримуватися опису системи за допомогою звичайних диференціальних рівнянь. Саме за допомогою цієї моделі проводилась більшість досліджень.

На теперішній час дослідження, пов'язані з поняттям адаптованості, все ще знаходяться на рівні вихідних визначень навіть в рамках моделей, що характеризуються диференціальними рівняннями, і до сих пір немає реальних математичних результатів.

# 1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ АДАПТОВАНOSTІ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У СИСТЕМАХ ІЗ ЗАХИСТОМ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 1.1 Системний аналіз проблеми дослідження адаптованості динамічних процесів у системах із захистом

### 1.1.1 Вербальна модель системи

Промислове виробництво було і є досі однією з найприбутковіших галузей для багатьох країн світу, як і для України. Більшість з цих виробництв можуть спричинити значні проблеми, як екологічні, так і соціальні. Саме тому сучасні виробництва несуть значні витрати, щоб зменшити ризики, підвищити безпеку та ефективність.

Саме тому з цим механізми захисту людей і навколишнього середовища є особливо актуальними.

Зазвичай, підвищуючи ефективність виробництва, знижується рівень безпеки, та навпаки. Саме тому необхідно об'єднати ці два критерії в одну систему.

У зв'язку з цим будемо розглядати відому модель «Людина-Машина-Середовище» як систему, залежну від двох конкуруючих критеріїв – безпека та ефективність. У такій системі, разом зі змінами керуючих параметрів, буде змінюватися її внутрішній стан.

Будь-який реальний процес ми представляємо у вигляді системи, яка потім піддається системному аналізу для визначення оптимальних умов її існування і прийняття необхідних рішень. Для дослідження систем використовуються математичні методи.

### 1.1.2 Морфологічний опис системи

Морфологічна модель представлена на рис. 1.1, на якому прийняті наступні позначення:

- М – метасистема математика,
- А – теорія хаосу,
- А1 – математичне забезпечення,
- А11 – довідники,
- А12 – методи,
- А13 – математична модель,
- А2 – інформаційні ресурси,
- А21 – програмне забезпечення,
- А22 – обчислювальна техніка.

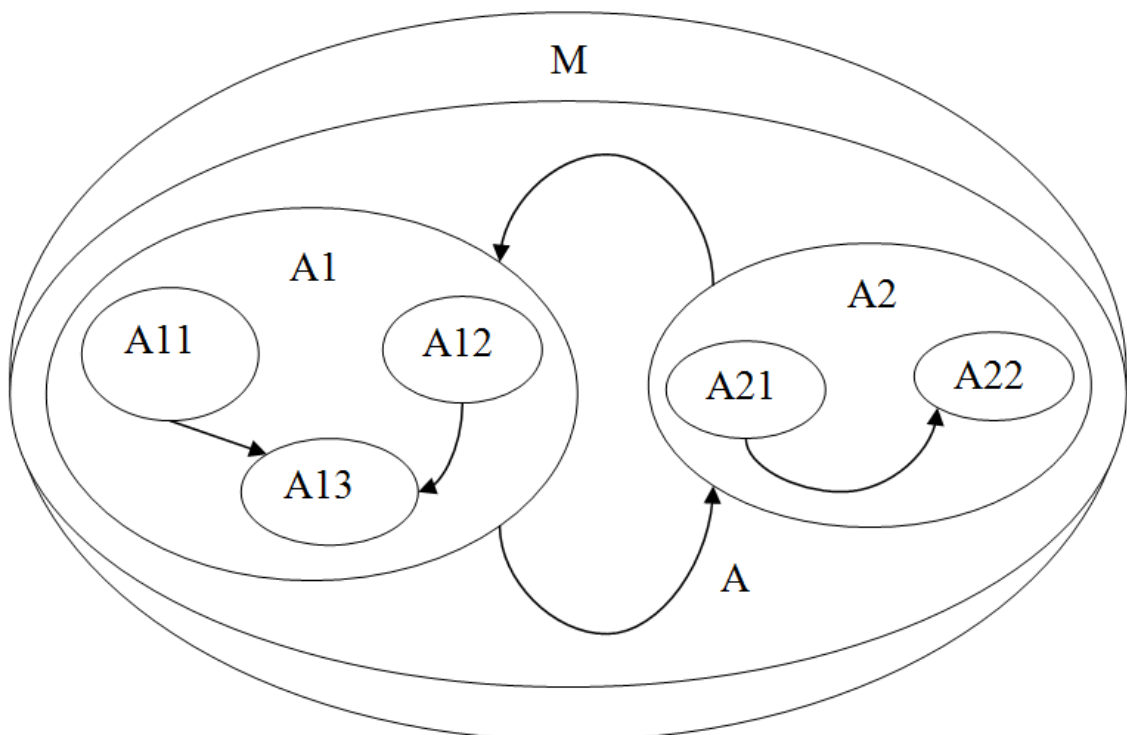


Рисунок 1.1 – Морфологічна модель

### 1.1.3 Функціональна модель системи

Представимо розглянуту систему у вигляді функціональної моделі – IDEF0. При моделюванні необхідно виділити головну функцію системи – метафункцію, а потім декомпозувати її на кілька підфункцій. При цьому на кожен блок (функцію) впливають певні чинники – вхідні і вихідні дані, управління і засоби реалізації.



Рисунок 1.2 – Функціональна модель IDEF0

Функціональна модель являє собою опис функцій даної системи, а також інформації та об'єктів, що зв'язують ці функції. Виконання системою своїх функцій повністю залежить від своєчасного і сумлінного виконання кожного з підвідділів системи своїх специфічних функцій.

Таке уявлення моделі допомагає уникнути нераціонального використання сил і засобів.

### 1.1.4 Інформаційна модель системи

Створимо інформаційну модель (DFD) найбільш значущою функції – моделювання поведінки системи. Для цього зробимо декомпозицію цієї функції на завдання і потоки даних, які взаємодіють із зовнішніми об'єктами і сховищами даних.

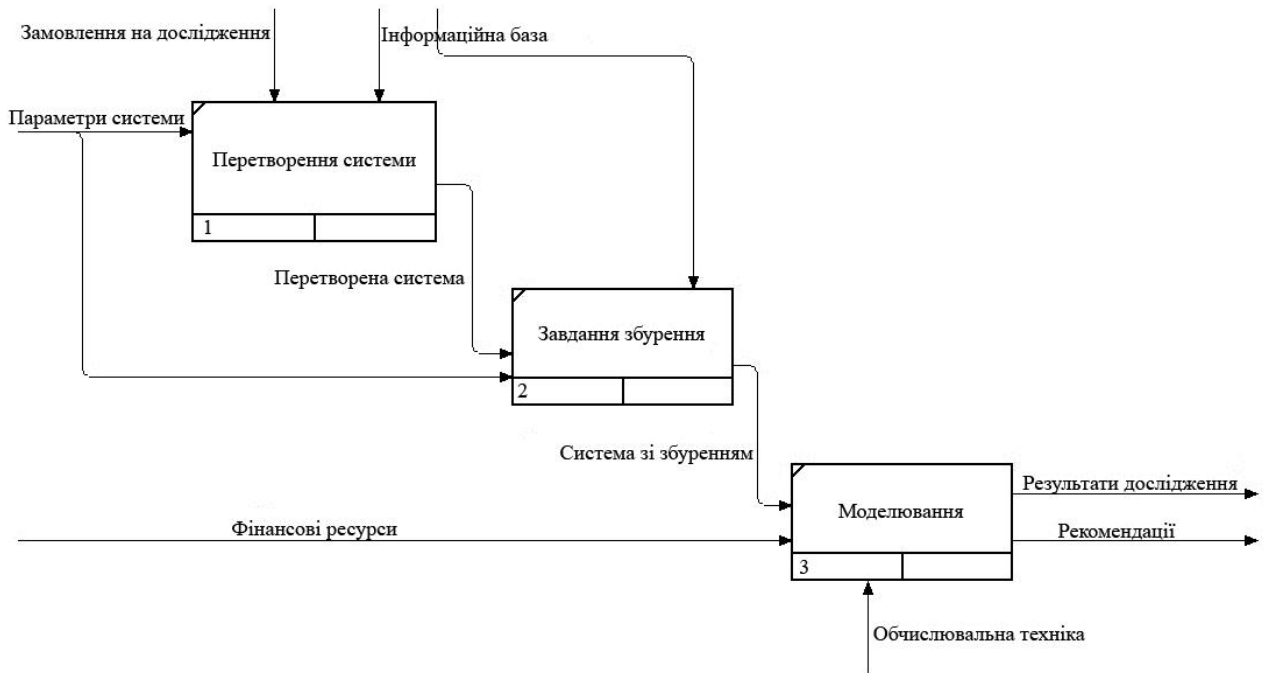


Рисунок 1.3 – Декомпозиція моделі



Рисунок 1.4 – Інформаційна модель DFD

## 1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми дослідження адаптованості динамічних процесів у системах із захистом

### 1.2.1 Вибір критеріїв якості та розрахунок вектору локальних пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Для докладного вивчення системи і отримання вихідних даних необхідно визначитись із середовищем, в якому ми будемо проводити обчислення, а саме з мовою програмування. Підбір відповідного мови програмування може позначитися на швидкості і точності обчислень як в кращий бік, так і в гірший.

Якість характеризується такими критеріями:

- а) простота реалізації і інтерфейсу;
- б) наявність математичних бібліотек;
- в) власні знання середовища;
- г) швидкість реалізації.

Для оцінки пріоритетів скористаємося методом аналізу ієрархій. Спочатку сформуємо матрицю попарних порівнянь важливості критеріїв (таблиця 1.1) та розрахуємо вектор локальних пріоритетів (таблиця 1.2).

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

Критерії	А	Б	В	Г
А	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
Б	7	1	5	3
В	3	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{3}$
Г	5	$\frac{1}{3}$	3	1

Таблиця 1.2 – Розрахунок вектору локальних пріоритетів

Критерії	Середнє геометричне за строками	Вектор пріоритетів
А	$x_1 = \sqrt[4]{1 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt[4]{\frac{1}{105}} \approx 0,312$	$p_1^K = \frac{x_1}{\Sigma} \approx 0,055$
Б	$x_2 = \sqrt[4]{7 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3} = \sqrt[4]{105} \approx 3,201$	$p_2^K = \frac{x_2}{\Sigma} \approx 0,564$
В	$x_3 = \sqrt[4]{3 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{5}} \approx 0,669$	$p_3^K = \frac{x_3}{\Sigma} \approx 0,118$
Г	$x_4 = \sqrt[4]{5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt[4]{5} \approx 1,495$	$p_4^K = \frac{x_4}{\Sigma} \approx 0,263$
	$\Sigma = 5,677$	

Для обчислення індексу узгодженості знаходимо суми елементів матриці за стовпцями:

$$y_1 = 1 + 7 + 3 + 5 = 16,$$

$$y_2 = \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = 1,676,$$

$$y_3 = \frac{1}{3} + 5 + 1 + 3 = 9,333,$$

$$y_4 = \frac{1}{5} + 3 + \frac{1}{3} + 1 = 4,533.$$

Тоді

$$\lambda_{\max}^K = 16 \cdot 0,055 + 1,676 \cdot 0,564 + 9,333 \cdot 0,118 + 4,533 \cdot 0,263 = 4,119$$

і індекс узгодженості:

$$CI^K = \frac{4,119 - 4}{4 - 1} = 0,039.$$

Оскільки матриця попарних порівнянь критеріїв є матрицею четвертого порядку, то  $RI^K = 0.9$  і відношення узгодженості

$$CR^K = \frac{0,039}{0,9} = 0,043.$$

Оскільки відношення узгодженості менше ніж 0,1, то вважаємо, що матриця попарних порівнянь критеріїв побудована правильно.

Вектор локальних пріоритетів щодо проблеми вибору дорівнює:

$$\vec{p}^K = (0,055; 0,564; 0,118; 0,263)^T.$$

Розшифровуючи значення вектора локальних пріоритетів можна сказати, що головним пріоритетом є наявність математичних бібліотек. Далі за важливістю в порядку убудання стоїть швидкість реалізації. Далі власні знання середовища. Потім – простота реалізації і інтерфейсу.

### 1.2.2 Вибір альтернатив та розрахунок векторів локальних пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

У якості альтернатив оберемо такі середовища, в яких ми можемо проводити обчислення, а саме:

- а) Wolfram Mathematica;
- б) Python;
- в) C ++.

Побудуємо матриці попарних порівнянь альтернатив за обраними критеріями (таблиці 1.3 – 1.6).

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за критерієм  
А (простота реалізації і інтерфейсу)

Альтернативи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	3	4	0,625
2	1/3	1	2	0,238
3	1/4	1/2	1	0,137

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за критерієм  
Б (наявність математичних бібліотек)

Альтернативи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	5	4	0,683
2	1/5	1	1/2	0,117
3	1/4	2	1	0,200

Таблиця 1.5 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за критерієм  
В (власні знання середовища)

Альтернативи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	3	4	0,625
2	1/3	1	2	0,238
3	1/4	1/2	1	0,137

Таблиця 1.6 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за критерієм  
Г (швидкість реалізації)

Альтернативи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	5	4	0,683
2	1/5	1	1/2	0,117
3	1/4	2	1	0,200

Індекси узгодженості та відношення узгодженості для матриць парних порівнянь альтернатив за кожним критерієм:

$$CI_A^A = 0,01, CR_A^A = 0,017, CI_B^A = 0,013, CR_B^A = 0,022,$$

$$CI_B^A = 0,01, CR_B^A = 0,017, CI_G^A = 0,013, CR_G^A = 0,022.$$

Всі відношення узгодженості менше, ніж 0,1, що свідчить про хорошу узгодженості думок експерта.

### 1.2.3 Оцінка узагальнених пріоритетів

Розрахуємо вектор глобальних пріоритетів альтернатив.

Для цього з вектора локальних пріоритетів альтернатив за кожним критерієм складемо матрицю:

$$P^A = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,683 & 0,625 & 0,683 \\ 0,238 & 0,117 & 0,238 & 0,117 \\ 0,137 & 0,2 & 0,137 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Тоді вектор глобальних пріоритетів дорівнює

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,683 & 0,625 & 0,683 \\ 0,238 & 0,117 & 0,238 & 0,117 \\ 0,137 & 0,2 & 0,137 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,055 \\ 0,564 \\ 0,118 \\ 0,263 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,673 \\ 0,138 \\ 0,189 \end{pmatrix}.$$

Індекс узгодженості і відношення узгодженості для всієї ієрархії:

$$CI = 0,051, RI = 1,48, CR = 0,034,$$

що можна вважати дуже гарною узгодженістю.

Максимальна компонента вектора глобальних пріоритетів відповідає четвертій альтернативі – Wolfram Mathematica.

### 1.3 Постановка задач дослідження

#### 1.3.1 Змістовна постановка задачі

Під поняттям адаптованості динамічного процесу зазвичай мають на увазі деяку міру можливості системи зберігати незмінність основного ходу процесу при деякому впливі. Поняття адаптованості має багато спільного із такими поняттями, як: катастрофа, біфуркація, стійкість і багатьма іншими. Однак, це не дає в достатній мірі вичерпного визначення про адаптованість, в усякому разі на термінологічному рівні. Ми будемо дотримуватися опису системи за допомогою звичайних диференціальних рівнянь. Саме на цьому описі проводилися більшість досліджень.

Проведемо аналіз системи  $\Sigma$ , що описана диференціальними рівняннями (або системами диференціальних рівнянь)  $\dot{x} = f(x, a) + g(t)$ ,  $x(0) = x_0$ , де  $a$  – вектор параметрів системи. Виходячи з цього, для визначення адаптованості виникає необхідність дати відповіді на наступні питання:

а) якщо функція  $g(t)$  характеризує збурення, а функція  $x(t)$  описує положення системи, що розглядається, то за яких умов  $g(t)$  може привести до того, щоб система вийшла з області тяжіння  $D$  початку координат;

б) як мають змінитися керуючі параметри, щоб призвести до такого спотворення межі  $\partial D$  області тяжіння  $D$ , щоб положення системи, що розглядається, змістилося в область іншого атрактора, тобто відмінного від атрактора, що на початку координат.

### 1.3.2 Формальна постановка задачі

Метою роботи є дослідження адаптованості динамічних процесів в системах із захистом від збурень на прикладі моделі захисту, що допускає катастрофу типу збірки. Досліджувана модель захисту описується рівнянням:

$$\dot{x} = -\left(x^3 + (-\alpha_2)x + \alpha_1\right),$$

де існує два керуючі параметри  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ . У просторі керуючих параметрів криві катастроф типу збірки описані рівняннями:

$$\alpha_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \quad \alpha_2 > 0.$$

Поставлена мета обумовлює наступні етапи дослідження:

а) знаходження кута між дотичними до кривих катастроф, у напрямі якого не існує перетинів зі складками, у двовимірному просторі керуючих параметрів як міра адаптованості системи від збурень;

б) для системи, положення якої у просторі керуючих параметрів обмежене заданою еліптичною областю, знаходження кута для центру області, у напрямі якого не існує перетинів зі складками, та знаходження відношення площі області, що належить еліпсу та лежить між складками, та площі всього еліпсу у двовимірному просторі керуючих параметрів як міри адаптованості системи від збурень;

в) знаходження адаптованості для системи, положення якої у просторі керуючих параметрів обмежене заданою еліптичною областю, з заданими імовірностями збурення в залежності від напрямку (кута);

г) аналіз результатів та їх застосування.

## 2 КЛАСИ ОБ'ЄКТІВ МОДЕЛЮВАННЯ

Зазвичай, підвищуючи ефективність виробництва, знижується рівень безпеки, та навпаки. Саме тому вважатимемо їх суперечливими факторами. Поєднати їх в один критерій можливо в надсистемі «Людина-Машина-Середовище» [1, 2, 3]. Ця система відома як модель, залежна від двох конкуруючих критеріями – безпека та ефективність [4, 5, 6]. Інформація з вищестоящої системи є вхідною, а на виході отримуємо результат роботи технічної системи [3].

У такій системі у процесі її функціонування, разом зі змінами керуючих параметрів, буде змінюватися внутрішній стан. Деталізація елементів системи призведе до отримання вже відомих та нових моделей підсистем. Елемент системи «Машина» безпосередньо впливає на предмет праці та змінює параметри навколишнього середовища. [7, 8, 9].

У подальшому будемо вважати об'єктами моделювання класи систем із захистом, їх загальні властивості та процеси в них.

Роль тих чи інших показників досліджуваної системи залежить від конкретних умов і типів. Особливо відзначимо що значущими для моделі є швидкість зміни параметрів та порядок їх величин, а не конкретні значення. Саме це буде визначати актуальність застосування тих чи інших методів [10, 11, 12].

Необхідно зазначити, що достовірні вимірювання протікання досліджуваних процесів не можливі на нестабільних реальних об'єктах. Чисельні значення керуючих параметрів процесу залежать від часу та від зовнішніх факторів, які не завжди можливо прогнозувати або обчислити.

Тож, лише для модельного експерименту можливо упорядкувати всі параметри досліджуваного процесу [7]. Тому у подальшому розглядатимемо моделі досліджуваної системи та її параметричну сталість, а не конкретні значення параметрів.

### 3 ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАХИСТОМ

Захист об'єктів, де окремо захищаються складові елементи системи, і ці захисти слабо між собою пов'язані, відрізняється несистемністю. Саме через це захист, який може добре впоратися з прогнозованою позаштатною ситуацією, відмовляє в умовах катастрофи.

Як приклад, техногенна аварія у 1995 році в харківській системі водовідведення, що сталася через зливу. Захисне відключення електропостачання призвело до виходу з ладу водогону. Також прикладом є аварія на Чорнобильській АЕС, де система захисту була не досить жорстко інтегрована в процес [13, 14].

Розглянемо модель динамічної системи, де основна система в процесі роботи виробляє шкідливий фактор будь-якої природи, а захисна підсистема намагається його знизити [15].

Як базову систему для модифікацій можна розглядати відому модель співіснування конкуруючих видів тварин [16], яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь [17, 18, 16].

Попри спрощеність моделей, що розглядаються, необхідно аби для системи зберігалися усі основні характеристики та залежності від тих чи інших керуючих параметрів [19]. За результатами, отриманими у ході роботи, можливо з'ясувати рівень стійкості та адаптованості системи [20, 21].

Сформулюємо очевидні основні припущення, які не потребують додаткового обґрунтування, оскільки вони впливають безпосередньо з повсякденного досвіду [22]:

а) загальна шкідливість складається з суми біовпливів усіх шкідливих факторів процесу, які є зростаючими функціями, залежними від часу та інтенсивності окремого фактора;

б) чим більший об'єм шкідливого фактора, тим швидше росте загальний шкідливий вплив;

в) чим шкідливість усіх інших чинників більша, тим швидше росте загальний шкідливий вплив;

г) в штатному режимі  $-\frac{\partial}{\partial t}u \leq 0$ , тоді як у критичному стані, навпаки,  $-\frac{\partial}{\partial t}u > 0$ , де  $u(t)$  – інтенсивність шкідливого біовпливу;

д) захистом  $z(t)$  можна керувати програмно або залежно від інтенсивності продукуємого шкідливого фактора (рис. 3.1);

е) чим інтенсивність шкідливого впливу більша, тим більша вартість необхідного захисту.



Рисунок 3.1 – Система з захистом зі зворотним зв'язком

#### 4 АНАЛІЗ СИСТЕМ ДИНАМІЧНОГО ЗАХИСТУ З ПОВІЛЬНИМИ І ШВИДКИМИ ФАЗОВИМИ ЗМІННИМИ

Динамічні системи складаються з великої кількості процесів, які мають різний характерний час. Більше того, ці часи можуть розрізняються на багато порядків [23, 24].

Відповідно до мети моделювання визначається і ступінь деталізації дослідження. Проте необхідно врахувати те, що завдання моделювання полягає в тому, щоб побудована модель містила якомога меншу кількість довільних параметрів і змінних, але достовірно відображала властивості досліджуваної системи [25, 26].

Якщо деякі змінні на досліджуваному проміжку часу аналізованих процесів не змінюються, то будемо вважати їх постійними параметрами. Якщо змінні досягають своїх значень порівняно миттєво, то для цих стаціонарних значень можна записати рівняння алгебри замість диференціальних рівнянь. За цими принципами можливо значно скоротити число диференціальних рівнянь для досліджуваної системи [27, 28].

Умовно системи з захистом ми можемо поділити на два класи, які представлені на рис. 4.1 та рис. 4.2.

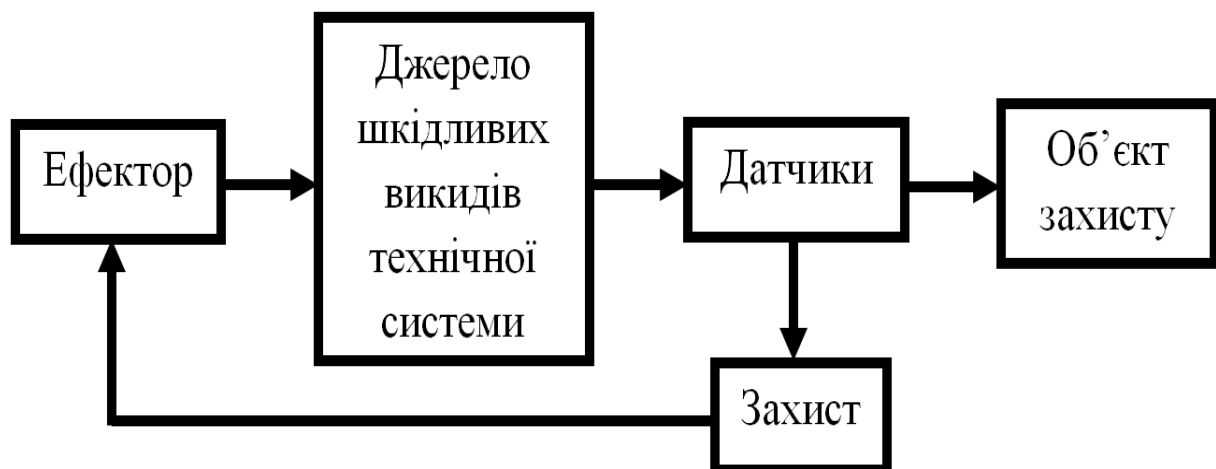


Рисунок 4.1 – Структурована динамічна система захисту

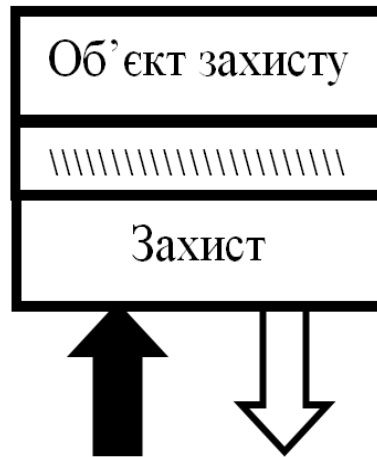


Рисунок 4.2 – Динамічна система синергетичного захисту

До першого класу віднесемо структуровані системи, де підсистема захисту і підсистема, що продукує шкідливий фактор, є фізично розділеними, але пов'язаними між собою інформаційно та фізично. Цей тип систем можна вважати класичним, оскільки до нього належать багато виробничих та інших технічних систем.

До іншого класу віднесемо синергетичні системи, де підсистема захисту фізично інтегрована у систему, що продукує шкідливість. У цьому випадку обмін інформацією між системами відбувається без операторів або будь-яких вимірювальних пристроїв [25, 26]. Прикладом цього типу є система, в якій об'єкт, що може спалахнути, вкривають речовиною, що слугує непроникним бар'єром для кисню.

Розглянуті класи систем втілюють загальний принцип негативного зворотного зв'язку, коли шкідливому фактору, який продукується системою, протидіє захист.

## 5 ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ АДАПТОВАНОСТІ СИСТЕМИ З ЗАХИСТОМ ВІД ЗБУРЕННЯ

### 5.1 Адаптованість динамічних процесів в системах синергетичного захисту

Під поняттям адаптованості динамічного процесу зазвичай мають на увазі деяку міру можливості системи зберігати незмінність основного ходу процесу при деякому впливі. В роботі ми спробуємо сформулювати поняття адаптованості математичною мовою [29, 30].

Слід відразу зазначити, що на теперішній час не існує остаточного єдиного визначення поняття адаптованості для нелінійних динамічних систем [2, 31].

Поняття адаптованості має багато спільного із такими поняттями, як: катастрофа, біфуркація, стійкість і багатьма іншими. Однак, це не дає в достатній мірі вичерпного визначення міри адаптованості на термінологічному рівні в достатньому обсязі для використання в галузі теорії управління та систем.

Тому ми змушені проводити аналіз, використовуючи власні уявлення про адаптованість, які, однак, можуть виявитися придатними для об'єктивного системного дослідження.

Лише відштовхуючись від прийнятого математичного опису системи ми можемо визначити конкретне математичне формулювання для міри адаптованості, як і для поняття стійкості. Ми будемо дотримуватися опису системи за допомогою звичайних диференціальних рівнянь. Саме на цьому описі проводилися більшість досліджень.

На теперішній час дослідження, пов'язані з поняттям адаптованості, все ще знаходяться на рівні вихідних визначень навіть в рамках моделей, що характеризуються диференціальними рівняннями, і до сих пір немає реальних математичних результатів.

Проаналізуємо систему  $\Sigma$ , що описана диференціальним рівнянням

$$\dot{x} = f(x, a) + g(t), \quad x(0) = x_0.$$

Вважатимемо, що початком координат є точка рівноваги  $f(0, a) \equiv 0$  для всіх  $a$  (вектор параметрів системи) за умови відсутності зовнішніх збурень, тобто  $g(t) \equiv 0$  (рис. 5.1).

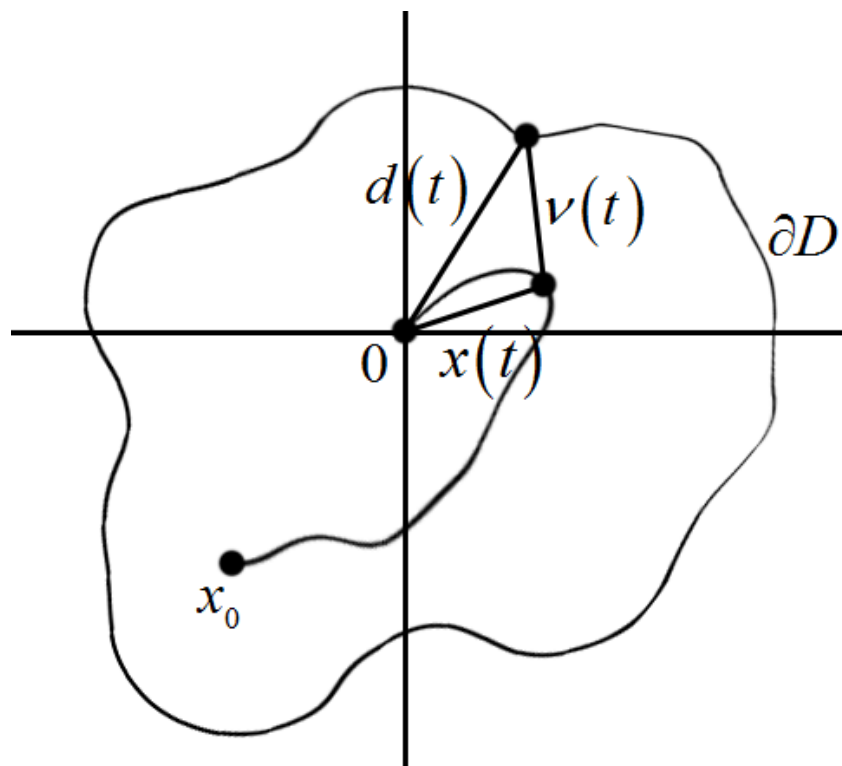


Рисунок 5.1 – Поведінка системи  $\Sigma$

Виходячи з цього, для визначення адаптованості виникає необхідність дати відповіді на наступні питання:

а) якщо функція  $g(t)$  характеризує збурення, а функція  $x(t)$  описує положення системи, що розглядається, то за яких умов  $g(t)$  може привести до того, щоб система вийшла з області тяжіння  $D$  початку координат;

б) як мають змінитися керуючі параметри, щоб призвести до такого спотворення межі  $\partial D$  області тяжіння  $D$ , щоб положення системи, що

розглядається, змістилося в область іншого атрактора, тобто відмінного від атрактора, що на початку координат.

Можна було б відповісти на перше питання, якщо ввести ступінь адаптованості системи як максимальне наближення  $x(t)$  до  $\partial D$  протягом усього часу еволюції досліджуваного процесу припустивши, що  $g(t) \equiv 0$ ,  $a = a^*$  при усіх  $t \geq 0$ . Але, слід зауважити, що коливання, необхідні для виведення системи  $\Sigma$  з області  $D$ , залежать також від спрямованості цих коливань, а не лише від їхньої сили. Тому мінімальну відстань  $x(t)$  від  $\partial D$  вважаємо досить слабкою ознакою інтенсивності можливих коливань.

Відмінність понять стійкість і адаптованість можемо показати на прикладі лінійної системи  $\dot{x} = Ax + g(t)$ , для якої точка  $0$  є стійкою асимптотично. Проте достатньо велике збурення  $g(t)$  може перевести систему у який завгодно стан. Тобто  $x(t_0) = 0$  можемо вважати грубим стаціонаром лише в малому околі та за умови, що  $g(x(t_0)) = 0$ .

Оскільки адаптованість визначається особистими характеристиками конкретної системи та допустимими збуреннями, вважати її внутрішньою властивістю ми не можемо.

Якщо впродовж усього часу дослідження можливі коливання менші за мінімальну відстань до межі області тяжіння, то система поглине всі коливання, тобто система буде мати нескінченну адаптованість. Або якщо впродовж усього часу дослідження можливі коливання більші за мінімальну відстань до межі області тяжіння, то система не зможе поглинати всі коливання, тобто система буде неадаптуємою.

Отже, для визначення поняття міри адаптованості треба брати до уваги клас допустимих коливань, тобто враховувати величину та напрямок усіх можливих збурень.

## 5.2 Залежність адаптованості системи з захистом від збурення

Використаємо наступний підхід до вирішення завдання [30]. Від функції  $x(t)$  у будь-який момент часу побудуємо вектор  $v(t)$ , що з'єднує з найближчою точкою на межі  $\partial D$  області тяжіння  $D$ .

Функція  $g(t) = \mu\delta(t-s)$  – збурення в момент часу  $t=s$ , де  $\mu$  – вектор, що визначає величину та напрямок збурення.

Тоді, порівнюючи вектори  $\mu$  і  $v(t)$ , можливо прогнозувати поведінку системи  $x(t)$  в залежності від збурення  $g(t)$ , тобто чи зрушить збурення систему за межу  $\partial D$  області тяжіння  $D$ .

Оскільки, для визначення поняття міри адаптованості треба враховувати величину та напрямок усіх можливих збурень, тобто чи має вектор  $\mu$  достатню силу та відповідний напрямок для того, щоб зрушити систему  $x(t)$  за межу  $\partial D$ .

Для порівняння векторів  $\mu$  та  $v(t)$  за величиною введемо функцію

$$m(t) = \|\mu\| - \|v(t)\|.$$

Для порівняння векторів  $\mu$  та  $v(t)$  за напрямком введемо функцію

$$\cos\theta(t) = \frac{(\mu, v(t))}{\|\mu\| \cdot \|v(t)\|},$$

де у чисельнику скалярний добуток векторів, а у знаменнику – евклідова норма.

Видно, що адаптованість системи низька при  $m(t) \geq 0$  і  $\cos\theta(t) \approx 1$  та висока при  $m(t) < 0$  і(або)  $\cos\theta(t) < 0$ .

Тобто система зможе адаптуватися до збурення, якщо величина  $\mu$  дуже мала у відповідний момент часу або збурення направлене не в сторону межі

$\partial D$ . Якщо навпаки  $-\mu$  за величиною більше  $\nu(t)$  і направлене в сторону межі  $\partial D$ , то адаптованість системи низька.

Нехай вектор параметрів системи  $\alpha = \alpha_1$ . Початкове положення системи  $x_0$  знаходиться в області тяжіння з межею  $\partial D_1$ , та система прагне до початку координат (рис. 5.2). Але, якщо  $\alpha = \alpha_2$ , то  $x_0$  буде знаходитися поза зоною тяжіння з межею  $\partial D_2$ , тоді система буде прагнути до іншого стану рівноваги  $x = x_2^*$ .

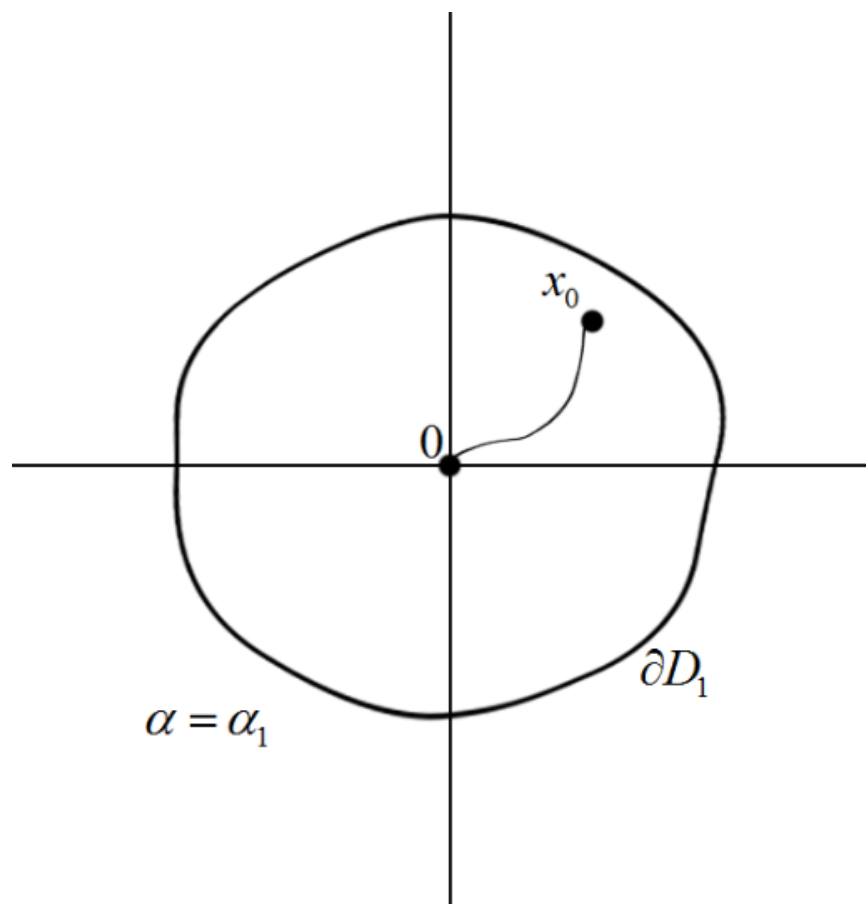


Рисунок 5.2 – Адаптованість у зоні тяжіння  $D_1$

В основі елементарної теорії катастроф Тома-Зімана зазначається, що межі областей тяжіння та положення рівноваги, що їм відповідають, залежать, насамперед, від вектору параметрів системи [32, 33]. Тобто існує щільна залежність адаптованості системи від типу катастрофи.

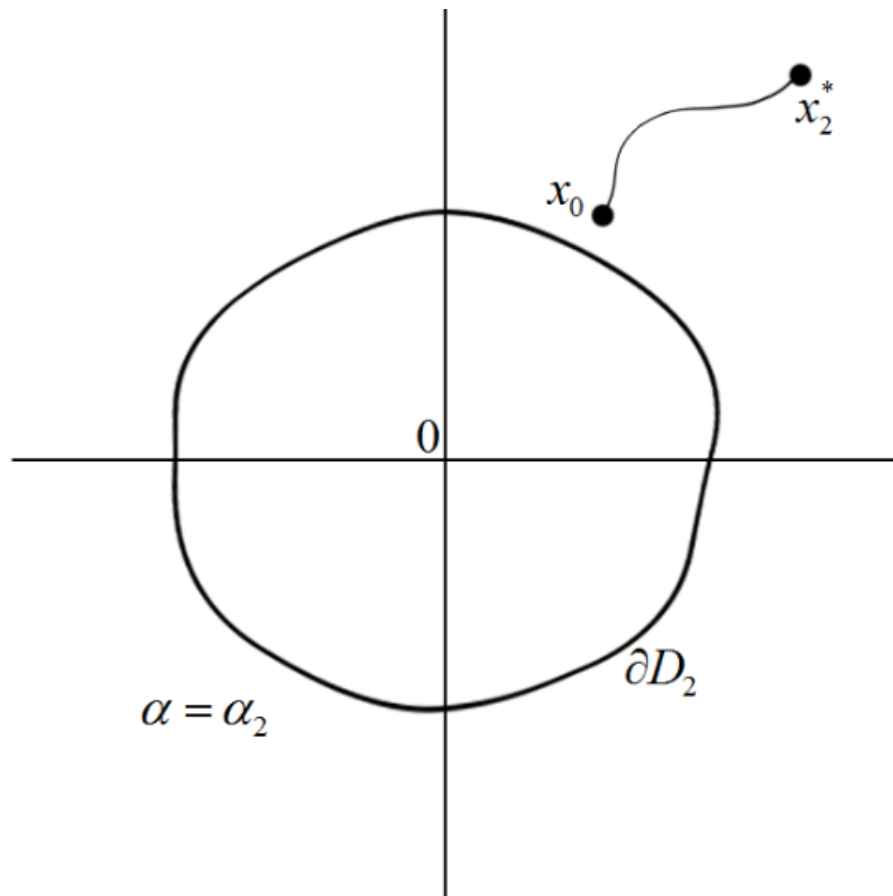


Рисунок 5.3 – Адаптованість поза зоною тяжіння  $D_2$

Отже, для визначення міри адаптованості необхідно брати до уваги величину та напрямок можливих змін вектору параметрів системи.

## 6 ДОСЛІДЖЕННЯ АДАПТОВАНOSTІ СИСТЕМИ ДЛЯ КРИВОЇ КАТАСТРОФ ТИПУ ЗБІРКИ

### 6.1 Криві катастроф типу збірки у просторі керуючих параметрів

Розглянемо узагальнену синергетичну модель захисту, що допускає катастрофу типу збірки, яка описана рівнянням

$$\dot{x} = -(x^3 + (-\alpha_2)x + \alpha_1),$$

де існує два керуючі параметри  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ . У просторі керуючих параметрів криві катастроф типу збірки (рис. 6.1) описані рівняннями:

$$\alpha_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \quad \alpha_2 > 0.$$

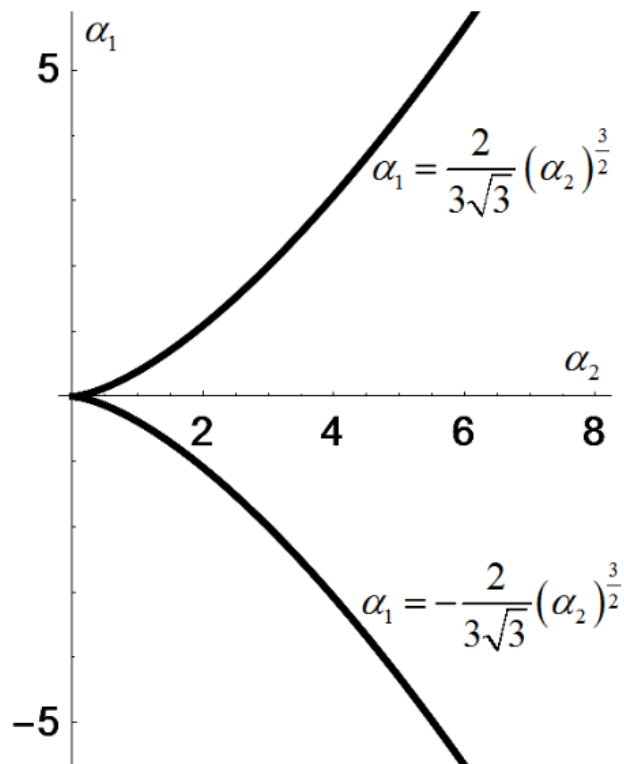


Рисунок 6.1 – Криві катастроф типу збірки

## 6.2 Відстань до кривої катастроф (збірка) у двовимірному просторі параметрів як міра адаптованості системи

Для катастрофи типу збірки синергетичної системи захисту під мірою адаптованості пропонуємо вважати мінімальну відстань в від точки до найближчої кривої катастроф (рис. 6.2).

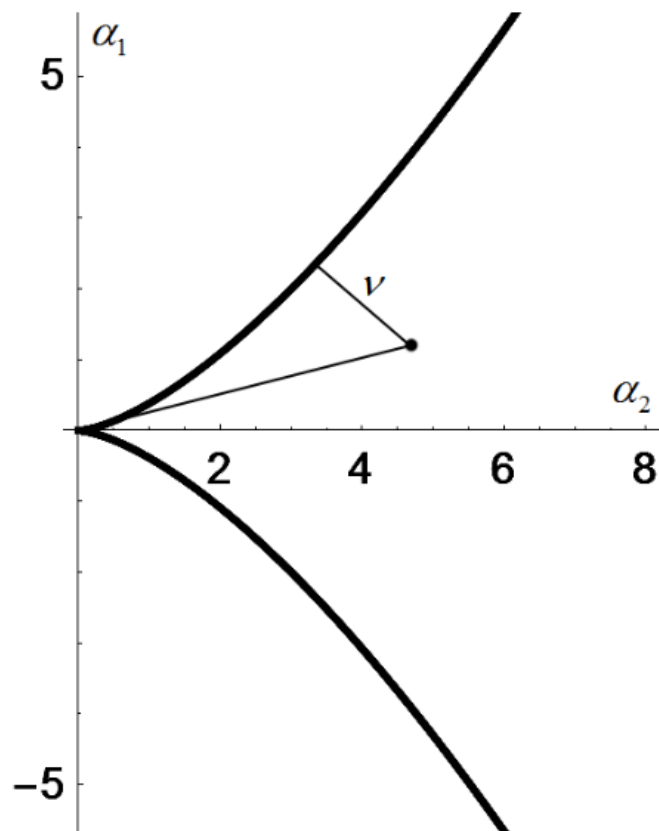


Рисунок 6.2 – Відстань до кривої катастроф  $\nu(t)$  як міра адаптованості

При відомих значеннях параметрів положення системи у двовимірному просторі керуючих параметрів буде виглядати як точка. Тоді відстань до кривої катастроф  $\nu$  може бути знайдена за формулою

$$\nu = \sqrt{(\alpha_1^* - \alpha_1)^2 + (\alpha_2^* - \alpha_2)^2},$$

де  $\alpha_1^*, \alpha_2^*$  відповідають рівноважному положенню системи, а  $\alpha_1, \alpha_2$  – координати точки на кривій катастроф, що є найближчою до  $\alpha_1^*, \alpha_2^*$ .

З рис. 6.1 видно, що існують дві криві катастроф – складки – задані рівняннями

$$\alpha_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}},$$

що перетинаються у точці  $(0, 0)$  – точка збірки. Тоді, щоб оцінити адаптованість системи, треба знайти:

- а) відстань до точки збірки  $\nu_1(t)$ ;
- б) мінімальну відстань до першої кривої катастроф  $\nu_2(t)$ ;
- в) мінімальну відстань до другої кривої катастроф  $\nu_3(t)$ .

Тоді загальна відстань  $\nu(t)$  як міра адаптованості системи:

$$\nu(t) = \min\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}.$$

Знайдемо відстань до точки збірки  $\nu_1(t)$ :

$$\nu_1(t) = \sqrt{(\alpha_1^* - \alpha_1)^2 + (\alpha_2^* - \alpha_2)^2},$$

де  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ . Тобто

$$\nu_1(t) = \sqrt{(\alpha_1^*)^2 + (\alpha_2^*)^2}.$$

Знайдемо мінімальну відстань до першої кривої катастроф  $v_2(t)$ :

$$v_2(t) = \sqrt{(\alpha_1^* - \alpha_1)^2 + (\alpha_2^* - \alpha_2)^2} \rightarrow \min_{\alpha_2},$$

де  $\alpha_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}$ . Тобто

$$v_2(t) = \sqrt{\left(\alpha_1^* + \frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}\right)^2 + (\alpha_2^* - \alpha_2)^2} \rightarrow \min_{\alpha_2}.$$

Для знаходження невідомої  $\alpha_2$  можна знайти першу похідну правої частини рівняння, прирівняти її до нуля та вирішувати відносно  $\alpha_2$ :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_1^* \cdot (\alpha_2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}(\alpha_2)^2 - \alpha_2^* + \alpha_2 = 0.$$

Маючи відомі  $\alpha_1^*, \alpha_2^*$ , можна знайти  $\alpha_2$  та, підставивши знайдене значення в рівняння

$$v_2(t) = \sqrt{\left(\alpha_1^* + \frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}\right)^2 + (\alpha_2^* - \alpha_2)^2},$$

знайти мінімальну відстань до першої кривої катастроф  $v_2(t)$ .

Аналогічно знайдемо мінімальну відстань до другої кривої катастроф  $v_3(t)$ :

$$v_2(t) = \sqrt{(\alpha_1^* - \alpha_1)^2 + (\alpha_2^* - \alpha_2)^2} \rightarrow \min_{\alpha_2},$$

де

$$\alpha_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}.$$

Тобто

$$v_2(t) = \sqrt{\left(\alpha_1^* - \frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}\right)^2 + (\alpha_2^* - \alpha_2)^2} \rightarrow \min_{\alpha_2}.$$

Для знаходження невідомої  $\alpha_2$  можна знайти першу похідну правої частини рівняння, прирівняти її до нуля та вирішувати відносно  $\alpha_2$ :

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_1^* \cdot (\alpha_2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}(\alpha_2)^2 - \alpha_2^* + \alpha_2 = 0.$$

Маючи відомі  $\alpha_1^*, \alpha_2^*$ , можна знайти  $\alpha_2$  та, підставивши знайдене значення в рівняння

$$v_3(t) = \sqrt{\left(\alpha_1^* - \frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}\right)^2 + (\alpha_2^* - \alpha_2)^2},$$

можна знайти мінімальну відстань до першої кривої катастроф  $v_3(t)$ .

Варто зауважити, що, якщо  $\alpha_1^* \geq 0$ , то

$$v(t) = \min\{v_1, v_3\}.$$

Аналогічно, якщо  $\alpha_1^* \leq 0$ , то

$$v(t) = \min \{v_1, v_2\}.$$

Розглянемо приклад застосування отриманих формул. Нехай відомо, що  $\alpha_1^* = -1, \alpha_2^* = 3$ , тоді відстань до кривої катастроф  $v$  може бути знайдена за формулою

$$v = \sqrt{(\alpha_1^* - \alpha_1)^2 + (\alpha_2^* - \alpha_2)^2},$$

де  $\alpha_1^* = -1, \alpha_2^* = 3$ , а  $\alpha_1, \alpha_2$  – координати точки на кривій катастроф, що є найближчою до  $\alpha_1^*, \alpha_2^*$ .

Оскільки  $\alpha_1^* \leq 0$ , то, щоб оцінити адаптованість системи, треба знайти:

а) відстань до точки збірки  $v_1$ ;

б) мінімальну відстань до першої кривої катастроф  $v_2$ .

Тоді загальна відстань  $v$  як міра адаптованості системи:

$$v = \min \{v_1, v_2\}.$$

Знайдемо відстань до точки збірки  $v_1$ :

$$v_1 = \sqrt{(\alpha_1^* - \alpha_1)^2 + (\alpha_2^* - \alpha_2)^2},$$

де  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_1^* = -1, \alpha_2^* = 3$ . Отримуємо

$$v_1 = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} \approx 3,162.$$

Знайдемо мінімальну відстань до першої кривої катастроф  $v_2$ :

$$v_2 = \sqrt{(\alpha_1^* - \alpha_1)^2 + (\alpha_2^* - \alpha_2)^2} \rightarrow \min_{\alpha_2},$$

де

$$\alpha_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \alpha_1^* = -1, \alpha_2^* = 3.$$

Тобто

$$v_2 = \sqrt{\left((-1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}\right)^2 + (3 - \alpha_2)^2} \rightarrow \min_{\alpha_2}.$$

Для знаходження невідомої  $\alpha_2$  можна знайти першу похідну правої частини рівняння, прирівняти її до нуля та вирішувати відносно  $\alpha_2$ .

Отримуємо  $\alpha_2 \approx 2,512$ .

Підставляючи знайдене значення в рівняння

$$v_3 = \sqrt{\left((-1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}\right)^2 + (3 - \alpha_2)^2},$$

можна знайти мінімальну відстань до першої кривої катастроф:

$$v_3 \approx 0,722.$$

Тоді загальна відстань  $v$  як міра адаптованості системи:

$$v = \min\{v_1, v_2\} = \min\{3,162; 0,722\} = 0,722.$$

### 6.3 Кут між дотичними до кривих катастроф (збірка) у двовимірному просторі параметрів як міра адаптованості системи

Для катастрофи типу збірки синергетичної системи захисту, положення якої у просторі керуючих параметрів визначається точкою  $(\alpha_2^*, \alpha_1^*)$ , під мірою адаптованості пропонуємо вважати кут  $\varphi$  між дотичними до кривих катастроф типу збірка для (рис. 6.3), оскільки система поглине будь-які збурення у цьому напрямі.

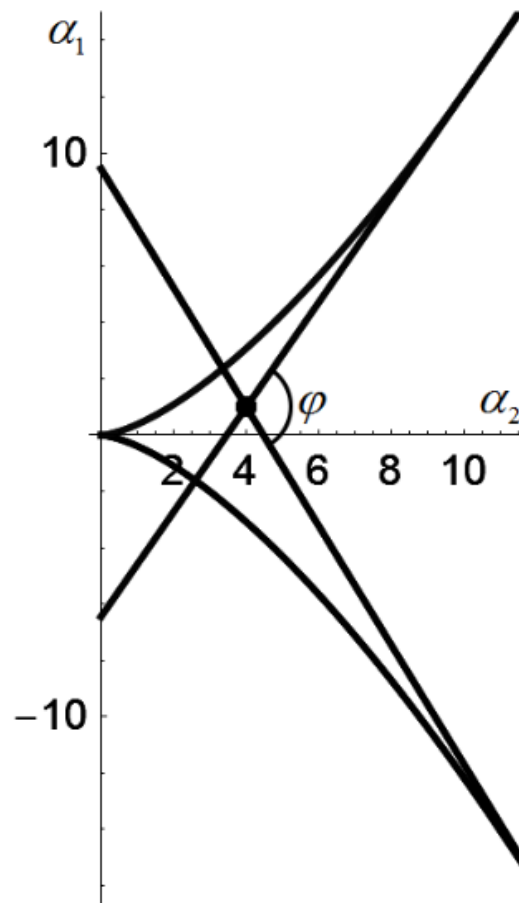


Рисунок 6.3 – Кут  $\varphi$  між дотичними до кривих катастроф як міра адаптованості

Нехай дана функція  $f(x)$ , яка має похідну  $f'(x)$ . Тоді в точці  $x_0$  до  $f(x)$  можна побудувати дотичну, що у загальному вигляді задається рівнянням:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Оскільки у просторі керуючих параметрів складки (криві катастроф типу збірки) описані рівняннями

$$\alpha_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} (\alpha_2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\alpha_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}} (\alpha_2)^{\frac{3}{2}},$$

похідні цих функцій відповідно:

$$\alpha_1' = \sqrt{\frac{\alpha_2}{3}},$$

$$\alpha_1' = -\sqrt{\frac{\alpha_2}{3}}.$$

Виходячи з цього побудуємо рівняння дотичних до верхньої та нижньої складок відповідно:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{x_{0_1}}{3}} \cdot (\alpha_2 - x_{0_1}) + \frac{2}{3\sqrt{3}} (x_{0_1})^{\frac{3}{2}},$$

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{x_{0_2}}{3}} \cdot (\alpha_2 - x_{0_2}) - \frac{2}{3\sqrt{3}} (x_{0_2})^{\frac{3}{2}},$$

де  $x_{0_1}$  та  $x_{0_2}$  відповідають точкам дотику до складок.

Оскільки дотичні проходять через задану точку  $(\alpha_2^*, \alpha_1^*)$ , то, підставивши в рівняння  $\alpha_1 = \alpha_1^*$  та  $\alpha_2 = \alpha_2^*$ , знайдемо  $x_{0_1} = v$  та  $x_{0_2} = n$ .

Тоді, підставивши  $v$  та  $n$  у початкове рівняння, отримуємо рівняння

дотичних до верхньої та нижньої складок:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{v}{3}} \cdot (\alpha_2 - v) + \frac{2}{3\sqrt{3}} (v)^{\frac{3}{2}},$$

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{n}{3}} \cdot (\alpha_2 - n) - \frac{2}{3\sqrt{3}} (n)^{\frac{3}{2}}.$$

Оскільки рівняння будь-якої прямої у загальному вигляді

$$y = k \cdot x + b,$$

де  $k = \operatorname{tg}(\varphi)$ , а  $\varphi$  – кут нахилу прямої, то

$$\varphi = \operatorname{arctg}(k).$$

Спростуємо рівняння дотичних до верхньої та нижньої складок відповідно та отримуємо:

$$\alpha_1 = \left( \sqrt{\frac{v}{3}} \right) \cdot \alpha_2 + \left( -\sqrt{\frac{v}{3}} \cdot v + \frac{2}{3\sqrt{3}} (v)^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$\alpha_1 = \left( -\sqrt{\frac{n}{3}} \right) \cdot \alpha_2 + \left( \sqrt{\frac{n}{3}} \cdot n - \frac{2}{3\sqrt{3}} (n)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Звідки видно, що

$$k_v = \sqrt{\frac{v}{3}},$$

$$k_n = -\sqrt{\frac{n}{3}}.$$

Тоді, відповідно

$$\varphi_v = \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{v}{3}} \right),$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \left( -\sqrt{\frac{n}{3}} \right).$$

Звідки кут між дотичними до кривих катастроф як міра адаптованості системи:

$$\varphi = |\varphi_v| + |\varphi_n|.$$

Розглянемо приклад застосування отриманих формул.

Нехай відомо, що положення системи у просторі керуючих параметрів визначається точкою  $(\alpha_2^*, \alpha_1^*) = (3, 1)$ . Тоді рівняння, що визначають точки дотику до верхньої та нижньої кривих катастроф відповідно:

$$\alpha_1^* = \sqrt{\frac{x_{0_1}}{3}} \cdot (\alpha_2^* - x_{0_1}) + \frac{2}{3\sqrt{3}} (x_{0_1})^{\frac{3}{2}},$$

$$\alpha_1^* = -\sqrt{\frac{x_{0_2}}{3}} \cdot (\alpha_2^* - x_{0_2}) - \frac{2}{3\sqrt{3}} (x_{0_2})^{\frac{3}{2}},$$

тобто

$$1 = \sqrt{\frac{x_{0_1}}{3}} \cdot (3 - x_{0_1}) + \frac{2}{3\sqrt{3}} (x_{0_1})^{\frac{3}{2}},$$

$$1 = -\sqrt{\frac{x_{0_2}}{3}} \cdot (3 - x_{0_2}) - \frac{2}{3\sqrt{3}} (x_{0_2})^{\frac{3}{2}}.$$

Звідки

$$x_{0_1} \approx 7,04189, \quad x_{0_2} \approx 10,5963.$$

Тож рівняння дотичних до верхньої та нижньої складок:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{7,04189}{3}} \cdot (\alpha_2 - 7,04189) + \frac{2}{3\sqrt{3}} (7,04189)^{\frac{3}{2}},$$

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{10,5963}{3}} \cdot (\alpha_2 - 10,5963) - \frac{2}{3\sqrt{3}} (10,5963)^{\frac{3}{2}}.$$

Спростуємо та отримуємо відповідно:

$$\alpha_1 = 1,53209 \cdot \alpha_2 - 3,59627,$$

$$\alpha_1 = -1,87939 \cdot \alpha_2 + 6,63816.$$

Звідки видно, що

$$k_v = 1,53209, \quad k_n = -1,87939.$$

Тоді, відповідно

$$\varphi_v = \arctg(1,53209) \approx 56,8674^\circ,$$

$$\varphi_n = \arctg(-1,87939) \approx -61,9831^\circ.$$

Тож кут між дотичними до кривих катастроф типу збірка як міра адаптованості системи:

$$\varphi = |\varphi_v| + |\varphi_n| = |56,8674^\circ| + |-61,9831^\circ| \approx 118,85^\circ.$$

#### 6.4 Адаптованість системи, положення якої обмежене заданою еліптичною областю

Для катастрофи типу збірки синергетичної системи захисту, положення якої у просторі керуючих параметрів обмежене заданою еліптичною областю, під однією мірою адаптованості пропонуємо вважати кут  $\varphi$  (рис. 6.4) для центру області, у напрямі якого немає перетинів з кривими катастроф.

Задаємо еліптичну область параметрично:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{R \cdot \cos(t)}{n} \cdot \cos(a) - \frac{R \cdot \sin(t)}{m} \cdot \sin(a), \\ y(t) = y_0 + \frac{R \cdot \cos(t)}{n} \cdot \sin(a) + \frac{R \cdot \sin(t)}{m} \cdot \cos(a). \end{cases}$$

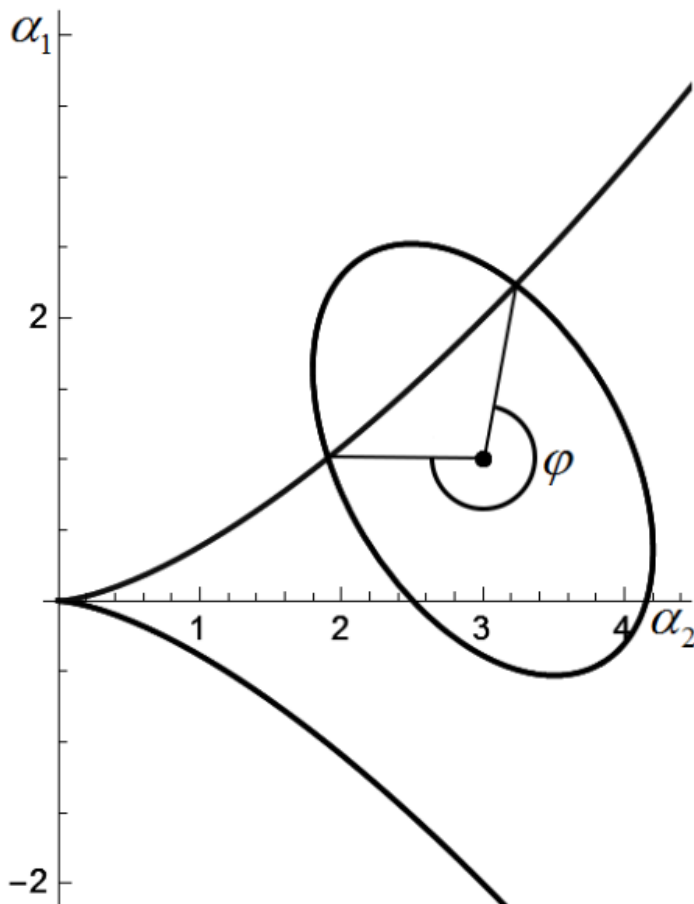


Рисунок 6.4 – Кут  $\varphi$  для центру області, у напрямі якого немає перетинів з кривими катастроф

Оскільки у просторі параметрів криві катастроф описані рівняннями

$$\alpha_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \quad \alpha_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}},$$

то, ми можемо знайти кути  $t$ , що відповідають точкам перетину еліпсу зі складками. Для цього необхідно вирішити дві системи рівнянь відносно  $t$  для верхньої та нижньої складок відповідно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2(t) = x_0 + \frac{R \cdot \cos(t)}{n} \cdot \cos(a) - \frac{R \cdot \sin(t)}{m} \cdot \sin(a), \\ \alpha_1(t) = y_0 + \frac{R \cdot \cos(t)}{n} \cdot \sin(a) + \frac{R \cdot \sin(t)}{m} \cdot \cos(a), \\ \alpha_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \\ 0 \leq t \leq 2\pi, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2(t) = x_0 + \frac{R \cdot \cos(t)}{n} \cdot \cos(a) - \frac{R \cdot \sin(t)}{m} \cdot \sin(a), \\ \alpha_1(t) = y_0 + \frac{R \cdot \cos(t)}{n} \cdot \sin(a) + \frac{R \cdot \sin(t)}{m} \cdot \cos(a), \\ \alpha_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}(\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \\ 0 \leq t \leq 2\pi, \end{array} \right.$$

де  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $R$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $a$  – відомі сталі параметри еліпсу.

Якщо рішень першої системи два ( $t_1$  та  $t_2$ ), тобто існує дві точки перетину еліпсу з верхньою кривою, то кут між цими точками:

$$\varphi_v = |t_1 - t_2|.$$

Якщо ж перетинів немає, то  $\varphi_v = 0^\circ$ .

Аналогічно якщо рішень другої системи два ( $t_1$  та  $t_2$ ), тобто існує дві точки перетину еліпсу з нижньою кривою, то кут між цими точками:

$$\varphi_n = |t_1 - t_2|.$$

Якщо ж перетинів немає, то  $\varphi_n = 0^\circ$ .

Тож кут  $\varphi$  для центру області, у напрямі якого немає перетинів з кривими катастроф, як міра адаптованості системи:

$$\varphi = 360^\circ - (\varphi_v + \varphi_n).$$

Під другою мірою адаптованості пропонуємо вважати відношення площі області  $F$  (рис. 6.5), що належить еліпсу та лежить між складками, та площі всього еліпсу.

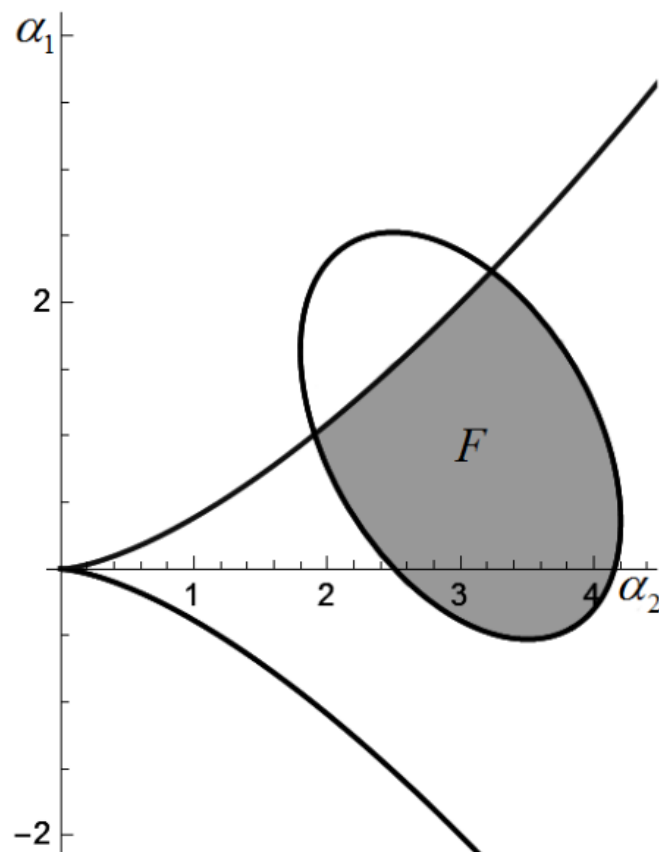


Рисунок 6.5 – Область  $F$ , що належить еліпсу та лежить між складками

Ми можемо знайти координати точок  $(a_2^*, a_1^*)$  перетину еліпсу зі складками.

Для цього необхідно вирішити дві вже відомі системи рівнянь відносно пар  $a_1$  та  $a_2$  для верхньої та нижньої складок відповідно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2(t) = x_0 + \frac{R \cdot \cos(t)}{n} \cdot \cos(a) - \frac{R \cdot \sin(t)}{m} \cdot \sin(a), \\ \alpha_1(t) = y_0 + \frac{R \cdot \cos(t)}{n} \cdot \sin(a) + \frac{R \cdot \sin(t)}{m} \cdot \cos(a), \\ \alpha_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} (\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \\ 0 \leq t \leq 2\pi, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2(t) = x_0 + \frac{R \cdot \cos(t)}{n} \cdot \cos(a) - \frac{R \cdot \sin(t)}{m} \cdot \sin(a), \\ \alpha_1(t) = y_0 + \frac{R \cdot \cos(t)}{n} \cdot \sin(a) + \frac{R \cdot \sin(t)}{m} \cdot \cos(a), \\ \alpha_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}} (\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \\ 0 \leq t \leq 2\pi, \end{array} \right.$$

де  $x_0, y_0, R, n, m, a$  – відомі сталі параметри еліпсу.

Якщо рішення першої системи два, то існує дві точки перетину еліпсу з верхньою кривою, тобто існує деякий сегмент, що знаходиться поза зоною адаптованості. Аналогічно для другої системи.

Оскільки еліпс заданий параметрично, то для знаходження загальної площі еліпса та площі знайдених сегментів перетворимо систему до канонічної форми:

$$\left( \frac{\cos(a)(x - x_0) + \sin(a)(y - y_0)}{R/n} \right)^2 + \left( \frac{\cos(a)(y - y_0) - \sin(a)(x - x_0)}{R/m} \right)^2 = 1.$$

За допомогою математичного пакету Wolfram Mathematica розв'яжемо знайдене рівняння відносно  $y$  та отримаємо два рівняння, що відповідають нижній та верхній дугам еліпса (рис. 6.6).

$$\left\{ \left\{ y \rightarrow \left( 2 m^2 y_0 \cos[a]^2 - \sqrt{2} \sqrt{n^2 R^2 + m^2 (R^2 - 2 n^2 (x - x_0)^2)} + (m^2 - n^2) R^2 \cos[2 a] - 2 n^2 x \cos[a] \sin[a] - 2 m^2 x_0 \cos[a] \sin[a] + 2 n^2 y_0 \sin[a]^2 + m^2 x \sin[2 a] + n^2 x_0 \sin[2 a] \right) / \left( 2 (m^2 \cos[a]^2 + n^2 \sin[a]^2) \right) \right\}, \right. \\ \left. \left\{ y \rightarrow \left( 2 m^2 y_0 \cos[a]^2 + \sqrt{2} \sqrt{n^2 R^2 + m^2 (R^2 - 2 n^2 (x - x_0)^2)} + (m^2 - n^2) R^2 \cos[2 a] - 2 n^2 x \cos[a] \sin[a] - 2 m^2 x_0 \cos[a] \sin[a] + 2 n^2 y_0 \sin[a]^2 + m^2 x \sin[2 a] + n^2 x_0 \sin[2 a] \right) / \left( 2 (m^2 \cos[a]^2 + n^2 \sin[a]^2) \right) \right\} \right\}$$

Рисунок 6.6 – Рівняння, що відповідають дугам еліпса

Відповідно, маючи рівняння кривих катастроф та дуг еліпсу, можемо шляхом інтегрування знайти площу всього еліпсу  $S$  та площі верхнього  $S_v$  та нижнього  $S_n$  сегментів, якщо такі існують.

Тоді площа області  $F$ , що належить еліпсу та лежить між складками:

$$S_F = S - (S_v + S_n).$$

Звідки відношення площі області  $F$  та площі всього еліпсу як міра адаптованості системи:

$$Adapt = \frac{S_F}{S} \cdot 100\% .$$

Розглянемо приклад застосування отриманих формул.

Нехай еліптична область задана параметрично:

$$\begin{cases} x(t) = 3 + \frac{5 \cdot \cos(t)}{3} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{5 \cdot \sin(t)}{5} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \\ y(t) = 1 + \frac{5 \cdot \cos(t)}{3} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{5 \cdot \sin(t)}{5} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

Оскільки у просторі параметрів криві катастроф описані рівняннями

$$\alpha_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} (\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \quad \alpha_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}} (\alpha_2)^{\frac{3}{2}},$$

то, ми можемо знайти кути  $t$ , що відповідають точкам перетину еліпсу зі складками. Для цього необхідно вирішити дві системи рівнянь відносно  $t$  для верхньої та нижньої складок відповідно:

$$\begin{cases} \alpha_2(t) = 3 + \frac{5 \cdot \cos(t)}{3} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{5 \cdot \sin(t)}{5} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \\ \alpha_1(t) = 1 + \frac{5 \cdot \cos(t)}{3} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{5 \cdot \sin(t)}{5} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right), \\ \alpha_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} (\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \\ 0 \leq t \leq 2\pi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2(t) = 3 + \frac{5 \cdot \cos(t)}{3} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{5 \cdot \sin(t)}{5} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \\ \alpha_1(t) = 1 + \frac{5 \cdot \cos(t)}{3} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{5 \cdot \sin(t)}{5} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right), \\ \alpha_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}} (\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Рішень першої системи два:

$$t_1 = 4,37105, t_2 = 2,18089.$$

Тож існує дві точки перетину еліпсу з верхньою кривою, та кут між цими точками:

$$\varphi_v = |t_1 - t_2| = |4,37105 - 2,18089| \approx 125,487^\circ.$$

Рішень другої системи немає, тобто перетинів немає. Тоді  $\varphi_n = 0^\circ$ .

Тож кут  $\varphi$  для центру області, у напрямі якого немає перетинів з кривими катастроф, як міра адаптованості системи:

$$\varphi = 360^\circ - (\varphi_v + \varphi_n) = 360^\circ - (125,487^\circ + 0^\circ) \approx 234,513^\circ.$$

Знайдемо координати точок  $(a_2^*, a_1^*)$  перетину еліпсу зі складками. Оскільки вже відомо, що перетинів із нижньою складкою немає, то  $S_n = 0$ , тож необхідно вирішити лише одну систему рівнянь відносно пар  $a_1$  та  $a_2$  для верхньої складки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2(t) = 3 + \frac{5 \cdot \cos(t)}{3} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{5 \cdot \sin(t)}{5} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \\ \alpha_1(t) = 1 + \frac{5 \cdot \cos(t)}{3} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{5 \cdot \sin(t)}{5} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right), \\ \alpha_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}} (\alpha_2)^{\frac{3}{2}}, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{array} \right.$$

Існує дві точки перетину еліпсу з верхньою кривою:

$$(1,90498, 1,01201), (3,23233, 2,23677).$$

Оскільки еліпс заданий параметрично, то перетворимо систему до канонічної форми:

$$\left( \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)(x-3) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)(y-1)}{5/3} \right)^2 + \left( \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)(y-1) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)(x-3)}{5/5} \right)^2 = 1.$$

Вирішимо знайдене рівняння відносно  $y$  та отримаємо два рівняння, що відповідають нижній та верхній дугам еліпса:

$$y = \frac{1}{13} \left( 13 + 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3}x - \sqrt{-1700 + 1350x - 225x^2} \right),$$

$$y = \frac{1}{13} \left( 13 + 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3}x + \sqrt{-1700 + 1350x - 225x^2} \right).$$

Відповідно, маючи рівняння кривих катастроф та дуг еліпсу, шляхом інтегрування знайдемо площу всього еліпсу  $S$  та площу верхнього сегменту  $S_v$ :

$$S \approx 5,23599, S_v \approx 1,18188.$$

Тоді площа області  $F$ , що належить еліпсу та лежить між складками:

$$S_F = S - (S_v + S_n) = 5,23599 - (1,18188 + 0) \approx 4,05411.$$

Звідки відношення площі області  $F$  та площі всього еліпсу як міра адаптованості системи:

$$Adapt = \frac{S_F}{S} \cdot 100\% = \frac{4,05411}{5,23599} \cdot 100\% \approx 77,4278\%.$$

### 6.5 Адаптованість системи, положення якої обмежене заданою еліптичною областю, з заданими імовірностями збурення

Для катастрофи типу збірки синергетичної системи захисту, положення якої у просторі керуючих параметрів визначається точкою та обмежене заданою еліптичною областю, з заданими імовірностями збурення в залежності від напрямку (кута) під мірою адаптованості пропонуємо вважати відношення:

$$Adapt = \frac{\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \min(r(\varphi), R(\varphi)) d\varphi}{\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot R(\varphi) d\varphi} \cdot 100\% ,$$

де  $f(\varphi)$  – густина (щільність) розподілу імовірностей збурення;

$R(\varphi)$  – відстань до межі області;

$r(\varphi)$  – відстань до кривої катастроф;

$\varphi$  – кут, що визначає напрямок збурення.

Задаємо еліптичну область параметрично:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{R \cdot \cos(t)}{n} \cdot \cos(a) - \frac{R \cdot \sin(t)}{m} \cdot \sin(a), \\ y(t) = y_0 + \frac{R \cdot \cos(t)}{n} \cdot \sin(a) + \frac{R \cdot \sin(t)}{m} \cdot \cos(a). \end{cases}$$

Щільність розподілу імовірностей збурення:

$$f(\varphi) = F'(\varphi),$$

де  $F(\varphi)$  – функція розподілу імовірностей збурення.

Положення системи у просторі керуючих параметрів визначається точкою  $(x_t, y_t)$ .

Оскільки еліпс заданий параметрично, то для знаходження загальної площі еліпса та площі знайдених сегментів перетворимо систему до канонічної форми:

$$\left( \frac{\cos(a)(x - x_0) + \sin(a)(y - y_0)}{R/n} \right)^2 + \left( \frac{\cos(a)(y - y_0) - \sin(a)(x - x_0)}{R/m} \right)^2 = 1.$$

За допомогою математичного пакету Wolfram Mathematica вирішимо знайдене рівняння відносно  $y$  та отримаємо два рівняння, що відповідають нижній та верхній дугам еліпса (рис. 6.6).

Оскільки рівняння будь-якої прямої, що з'єднує дві точки, у загальному вигляді

$$y(x) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1) + y_1,$$

то зробимо заміну  $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \operatorname{tg}(\varphi)$ ,  $y_1 = y_t$ ,  $x_1 = x_t$  та отримаємо рівняння, що

відповідатиме рівнянню прямої, яка проходить через точку  $(x_t, y_t)$  та залежить від кута нахилу:

$$y(x, \varphi) = \operatorname{tg}(\varphi) \cdot (x - x_t) + y_t.$$

Як бачимо, коли пряма вертикальна, тобто  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  або  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ , то  $\operatorname{tg}(\varphi) \rightarrow \infty$ . У цих випадках рівняння прямої  $x = x_t$ .

Для знаходження відстані від точки до кривої катастроф необхідно знайти

координати точки перетину цієї прямої з верхньою та нижньою складками. Для цього прирівнюємо їх та вирішимо відносно  $x$ :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3\sqrt{3}}(x)^{\frac{3}{2}} &= \operatorname{tg}(\varphi) \cdot (x - x_t) + y_t, \\ -\frac{2}{3\sqrt{3}}(x)^{\frac{3}{2}} &= \operatorname{tg}(\varphi) \cdot (x - x_t) + y_t.\end{aligned}$$

Для верхньої складки отримаємо  $x_v(\varphi)$ , для нижньої складки –  $x_n(\varphi)$  для усіх  $\varphi$ , за виключенням

$$x_v\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_v\left(\frac{3\pi}{2}\right) = x_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_n\left(\frac{3\pi}{2}\right) = x_t.$$

Відповідно:

$$\begin{aligned}y_v(\varphi) &= \frac{2}{3\sqrt{3}}(x_v(\varphi))^{\frac{3}{2}}, \\ y_n(\varphi) &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(x_n(\varphi))^{\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

де  $\varphi \in [0; 2\pi]$ .

Тоді відстань  $r(\varphi)$  до верхньої та нижньої кривих катастроф відповідно:

$$\begin{aligned}r_v(\varphi) &= \sqrt{(x_v(\varphi) - x_t)^2 + (y_v(\varphi) - y_t)^2}, \\ r_n(\varphi) &= \sqrt{(x_n(\varphi) - x_t)^2 + (y_n(\varphi) - y_t)^2}.\end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо відстані від точки до дуг еліпса. Тоді відстань

$R(\varphi)$  до верхньої та нижньої дуг еліпса відповідно:

$$R_v(\varphi) = \sqrt{(X_v(\varphi) - x_t)^2 + (Y_v(\varphi) - y_t)^2},$$

$$R_n(\varphi) = \sqrt{(X_n(\varphi) - x_t)^2 + (Y_n(\varphi) - y_t)^2}.$$

Тоді для катастрофи типу збірки синергетичної системи захисту, положення якої у просторі керуючих параметрів визначається точкою та обмежене заданою еліптичною областю, з заданими імовірностями збурення в залежності від напрямку (кута) міра адаптованості:

$$Adapt = \frac{\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \min(r(\varphi), R(\varphi)) d\varphi}{\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot R(\varphi) d\varphi} \cdot 100\%.$$

Розглянемо приклад застосування отриманих формул.

Нехай еліптична область задана параметрично:

$$\begin{cases} x(t) = 3 + \frac{5 \cdot \cos(t)}{3} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{5 \cdot \sin(t)}{5} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \\ y(t) = 1 + \frac{5 \cdot \cos(t)}{3} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{5 \cdot \sin(t)}{5} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

Функція розподілу імовірностей збурення (розподіл Вейбула):

$$F(\varphi) = 1 - e^{-t^2},$$

тоді щільність розподілу імовірностей збурення:

$$f(\varphi) = F'(\varphi) = (1 - e^{-t^2})' = 2t \cdot e^{-t^2}.$$

Положення системи у просторі керуючих параметрів визначається точкою  $(x_t, y_t) = \left(3, \frac{1}{2}\right)$ .

Оскільки еліпс заданий параметрично, то для знаходження загальної площі еліпса та площі знайдених сегментів перетворимо систему до канонічної форми:

$$\left( \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)(x-3) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)(y-1)}{5/3} \right)^2 + \left( \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)(y-1) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)(x-3)}{5/5} \right)^2 = 1.$$

Вирішимо знайдене рівняння відносно  $y$  та отримаємо два рівняння, що відповідають нижній та верхній дугам еліпса:

$$y = \frac{1}{13} \left( 13 + 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3}x - \sqrt{-1700 + 1350x - 225x^2} \right),$$

$$y = \frac{1}{13} \left( 13 + 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3}x + \sqrt{-1700 + 1350x - 225x^2} \right).$$

Для знаходження відстані від точки до кривої катастроф необхідно знайти координати точки перетину цієї прямої з верхньою та нижньою складками. Для цього прирівняємо їх та вирішимо відносно  $x$ :

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} (x)^{\frac{3}{2}} = \operatorname{tg}(\varphi) \cdot (x-3) + 0,5,$$

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}} (x)^{\frac{3}{2}} = \operatorname{tg}(\varphi) \cdot (x-3) + 0,5.$$

За допомогою математичного пакета Wolfram Mathematica для верхньої складки отримаємо  $x_v(\varphi)$  (рис. 6.7), для нижньої складки –  $x_n(\varphi)$  (рис. 6.8) для усіх  $\varphi$ , за виключенням

$$x_v\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_v\left(\frac{3\pi}{2}\right) = x_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_n\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3.$$

$$\left\{ x \rightarrow 2.25 \operatorname{Tan}[f]^2 + \left( \operatorname{Tan}[f] \left( 136.071 - 816.429 \operatorname{Tan}[f] + 306.161 \operatorname{Tan}[f]^3 \right) \right) / \right. \\ \left. \left( 186624. - 2.23949 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f] + 6.71846 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f]^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 1.67962 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f]^3 - 1.00777 \times 10^7 \operatorname{Tan}[f]^4 + 2.51942 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f]^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 3.87891 \times 10^6 \sqrt{(-1. (-1.64178 + 1. \operatorname{Tan}[f]) (-0.168254 + 1. \operatorname{Tan}[f])} \right. \right. \\ \left. \left. (-0.166667 + 1. \operatorname{Tan}[f])^3 (1.81004 + 1. \operatorname{Tan}[f]) \right) \right)^{1/3} + \\ 0.0165354 \left( 186624. - 2.23949 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f] + 6.71846 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f]^2 + \right. \\ \left. 1.67962 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f]^3 - 1.00777 \times 10^7 \operatorname{Tan}[f]^4 + 2.51942 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f]^6 + \right. \\ \left. 3.87891 \times 10^6 \sqrt{(-1. (-1.64178 + 1. \operatorname{Tan}[f]) (-0.168254 + 1. \operatorname{Tan}[f])} \right. \\ \left. (-0.166667 + 1. \operatorname{Tan}[f])^3 (1.81004 + 1. \operatorname{Tan}[f]) \right) \left. \right)^{1/3} \left. \right\}$$

Рисунок 6.7 – Координата  $x_v(\varphi)$  на верхній кривій катастроф

$$\left\{ x \rightarrow 2.25 \operatorname{Tan}[f]^2 + \left( \operatorname{Tan}[f] \left( 136.071 - 816.429 \operatorname{Tan}[f] + 306.161 \operatorname{Tan}[f]^3 \right) \right) / \right. \\ \left. \left( 186624. - 2.23949 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f] + 6.71846 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f]^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 1.67962 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f]^3 - 1.00777 \times 10^7 \operatorname{Tan}[f]^4 + 2.51942 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f]^6 + \right. \right. \\ \left. \left. 3.87891 \times 10^6 \sqrt{(-1. (-1.64178 + 1. \operatorname{Tan}[f]) (-0.168254 + 1. \operatorname{Tan}[f])} \right. \right. \\ \left. \left. (-0.166667 + 1. \operatorname{Tan}[f])^3 (1.81004 + 1. \operatorname{Tan}[f]) \right) \right)^{1/3} + \\ 0.0165354 \left( 186624. - 2.23949 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f] + 6.71846 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f]^2 + \right. \\ \left. 1.67962 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f]^3 - 1.00777 \times 10^7 \operatorname{Tan}[f]^4 + 2.51942 \times 10^6 \operatorname{Tan}[f]^6 + \right. \\ \left. 3.87891 \times 10^6 \sqrt{(-1. (-1.64178 + 1. \operatorname{Tan}[f]) (-0.168254 + 1. \operatorname{Tan}[f])} \right. \\ \left. (-0.166667 + 1. \operatorname{Tan}[f])^3 (1.81004 + 1. \operatorname{Tan}[f]) \right) \left. \right)^{1/3} \left. \right\}$$

Рисунок 6.8 – Координата  $x_n(\varphi)$  на нижній кривій катастроф

Відповідно:

$$y_v(\varphi) = \frac{2}{3\sqrt{3}} (x_v(\varphi))^{\frac{3}{2}},$$

$$y_n(\varphi) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}(x_n(\varphi))^{\frac{3}{2}},$$

де  $\varphi \in [0; 2\pi]$ .

Тоді відстань  $r(\varphi)$  до верхньої та нижньої кривих катастроф відповідно:

$$r_v(\varphi) = \sqrt{(x_v(\varphi) - 3)^2 + (y_v(\varphi) - 0,5)^2},$$

$$r_n(\varphi) = \sqrt{(x_n(\varphi) - 3)^2 + (y_n(\varphi) - 0,5)^2}.$$

Аналогічно для знаходження відстані від точки до межі еліпса необхідно знайти координати точки перетину цієї прямої з верхньою та нижньою дугами.

За допомогою математичного пакета Wolfram Mathematica для верхньої дуги отримаємо  $X_v(\varphi)$  (рис. 6.9), для нижньої дуги –  $X_n(\varphi)$  (рис. 6.10) для усіх  $\varphi$ , за виключенням

$$X_v\left(\frac{\pi}{2}\right) = X_v\left(\frac{3\pi}{2}\right) = X_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = X_n\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3.$$

$$\left\{ x \rightarrow \left( 0.5 \left( 1.48016 \times 10^{18} + 1.0705 \times 10^{18} \tan[f] + 8.68532 \times 10^{17} \tan[f]^2 + \sqrt{2.32479 \times 10^{35} + 1.71804 \times 10^{35} \tan[f] + 1.61185 \times 10^{35} \tan[f]^2} \right) \right) / \left( 2.33835 \times 10^{17} + 1.54291 \times 10^{17} \tan[f] + 1.44755 \times 10^{17} \tan[f]^2 \right) \right\}$$

Рисунок 6.9 – Координата  $X_v(\varphi)$  на верхній дузі еліпса

$$\left\{ x \rightarrow \left( 0.5 \left( 1.48016 \times 10^{18} + 1.0705 \times 10^{18} \tan[f] + 8.68532 \times 10^{17} \tan[f]^2 + \sqrt{2.32479 \times 10^{35} + 1.71804 \times 10^{35} \tan[f] + 1.61185 \times 10^{35} \tan[f]^2} \right) \right) / \left( 2.33835 \times 10^{17} + 1.54291 \times 10^{17} \tan[f] + 1.44755 \times 10^{17} \tan[f]^2 \right) \right\}$$

Рисунок 6.10 – Координата  $X_n(\varphi)$  на нижній дузі еліпса

Відповідно:

$$Y_v(\varphi) = \frac{2}{3\sqrt{3}} (X_v(\varphi))^{\frac{3}{2}},$$

$$Y_n(\varphi) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} (X_n(\varphi))^{\frac{3}{2}},$$

де  $\varphi \in [0; 2\pi]$ .

Тоді відстань  $R(\varphi)$  до верхньої та нижньої дуг еліпса відповідно:

$$R_v(\varphi) = \sqrt{(X_v(\varphi) - 3)^2 + (Y_v(\varphi) - 0,5)^2},$$

$$R_n(\varphi) = \sqrt{(X_n(\varphi) - 3)^2 + (Y_n(\varphi) - 0,5)^2}.$$

Тоді для катастрофи типу збірки синергетичної системи захисту, положення якої у просторі керуючих параметрів визначається точкою та обмежене заданою еліптичною областю, з заданими імовірностями збурення в залежності від напрямку (кута) міра адаптованості:

$$Adapt = \frac{\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \min(r(\varphi), R(\varphi)) d\varphi}{\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot R(\varphi) d\varphi} \cdot 100\% = \frac{1,33123}{1,40845} \cdot 100\% \approx 94,5179\%.$$

## ВИСНОВКИ

Таким чином у роботі описано два напрямки дослідження адаптованості:

а) адаптованість до імпульсної пертурбації у фазовому просторі, коли динаміка системи переходить до басейну іншої стійкої особливості;

б) адаптованість (східно до поняття запасу стійкості) у просторі керуючих параметрів системи.

Для останнього випадку адаптованість досліджена на прикладі моделі захисту, що допускає катастрофу типу збірки.

Як міра адаптованості системи, положення якої у просторі керуючих параметрів визначається точкою, знайдені та застосовані явні формули знаходження кута між дотичними до кривих катастроф, у напрямі якого не існує перетинів зі складками, у двовимірному просторі керуючих параметрів.

Також для системи, положення якої у просторі керуючих параметрів обмежене заданою еліптичною областю, виявлені та застосовані явні формули знаходження кута для центру області, у напрямі якого не існує перетинів зі складками, та знаходження відношення площі області, що належить еліпсу та лежить між складками, та площі всього еліпсу у двовимірному просторі керуючих параметрів як міра адаптованості системи.

Для системи, положення якої у просторі керуючих параметрів визначається точкою та обмежене заданою еліптичною областю, з заданими імовірностями збурення в залежності від напрямку (кута) запропонована та застосована явна формула знаходження адаптованості розглянутої системи на площині керуючих параметрів.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Запорожцев А. В. Моделирование технических систем // *Фундаментальные исследования*. 2014. № 8–6. С. 1288–1294.
2. Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы. Москва : Мир, 1982. 216 с.
3. Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. Москва : Изд-во Фазис, 2000. 411 с.
4. Дзюндзюк Б. В. Наумейко И. В. Математическая модель и оптимизация защиты от биовоздействия электромагнитного излучения и сопутствующих факторов // *Радиоэлектроника и информатика*. 1997. № 1. С. 28–29.
5. Мак-Лоун Р. Р. Математическое моделирование – искусство применения математики // *Математическое моделирование*. Москва : Мир, 1979. С. 9–20.
6. Лохин В. М., Интеллектуальные системы автоматического управления. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.
7. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: введение в нелинейную динамику. Москва : Эдиториал УРСС, 2002. 256 с.
8. Наумейко И. В. Критические точки динамической модели распределенных вредных факторов // *Междунар. научно.-техн. конференция ИСТЭ-2011 (Харьков-Ялта, 1–6 октября 2011 г.)*. С. 60–61.
9. Наумейко И. В., Аль-Рефай В. А. К вопросу анализа критических режимов систем с динамической защитой от вредных воздействий // *2-я Междунар. научно.-техн. конференция ИСТ-2013 (г. Евпатория, 16–22 сентября 2013 г.)*. С. 12.
10. Звонкий А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений. *Успехи математических наук*, 1984. Т. 39, № 2. С. 77–127.
11. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. Москва : Наука, 1981. 233 с.

12. Наумейко И. В. Определение границ применимости асимптотического подхода при анализе сигналов в неоднородных многопроводных каналах // Кн. Депонированные научные работы. 1983. № 12 (146) б/о 1038.
13. Маслов В. П., Мясников В. П., Данилов В. Г. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. Москва : Наука, 1987. 142 с.
14. Наперекор стихии: уроки ликвидации аварии на Главной канализационной насосной станции г. Харькова. Харьков : ЧП «Дуэт», 2006. 464 с.
15. Панкратова Н. Д. Системный анализ в динамике диагностирования сложных технических систем // Системні дослідження та інформаційні технології. 2008. № 1. С. 33–49.
16. Дэмбэрэл С., Оленев Н. Н., Поспелов И. Г. К математической модели взаимодействия экономических и экологических процессов // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 4. С. 107–122.
17. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с.
18. Гусятников П. П. Качественные и численные методы в задачах оптимального управления в моделях хищник-жертва и популяции леммингов: дис. канд. физ.-мат. наук / Москва, 2006. 101 с.
19. Sahal D. System Complexity: Its Conception and measurement in the Design of Engineering systems // IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. 1976. Vol. SMC-6. P. 152.
20. Dolinskii A. Nonequilibrium state of engineering systems // Econtechmod. An International Quaterly Journal. 2012. Vol. 1, No. 1. P. 33–35.
21. Naumeyko I. V. Critical points of dynamic model of harmful factors distributing // International scientific conference ISTE-2011 (Kharkov-Yalta, 1–6 October 2011.) P. 60–61.
22. Дзюндзюк Б. В., Наумейко И. В., Сердюк Н. Н. Содержательная модель воздействия нескольких вредных факторов на человека //

Радиоэлектроника и информатика. 2000. № 3 (12). С. 127–128.

23. Альрефаи В. А., Наумейко И. В., Альджаафрах М. Р. Исследование асимптотик систем с защитой // Sciences of Europe. 2016. Т. 1, № 8 (8). С. 63–68.

24. Андрианов И. В., Баранцев Р. Г., Маневич Л. И. Асимптотическая математика и синергетика. Москва : Едиториал УРСС, 2004. 304 с.

25. Синергетическая парадигма. М. : Прогресс-Традиция, 2000. 536 с.

26. Чернавский Д. С. Синергетика и информация. М. : УРСС, 2004. 288 с.

27. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. Москва : Наука, 1973. 272 с.

28. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. Москва : Издательство Московского университета, 1978. 151 с.

29. Ильичев В. Г. Механизмы стабилизации и адаптации в моделях экологии: дис. д-ра техн. наук / Ростов н/Д, 2003. 279 с.

30. Петров Ю. П. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. 4-е изд., перераб. и доп. СПб. : БХВ-Петербург, 2005. 240 с.

31. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М. : Радио и связь, 1993. 282 с.

32. Арнольд В. И. Теория катастроф // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Москва : ВИНТИ, 1986. Т. 5. С. 221–284.

33. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели // Природа. 1998. № 4. С. 3–14.