

НЕПОЛНЫЕ НЕКОМПЛЕКТНЫЕ СМЕННОПОСЫЛОЧНЫЕ КОДЫ

В. А. Стулов

Киевский политехнический институт

Неполные некомплектные сменнопосылочные коды отличаются от полных тем, что в их кодовых комбинациях смежные посылки не могут содержать одних и тех же элементов комбинирования, значение которых отлично от первого. В то же время в полных сменнопосылочных кодах смежные посылки могут различаться между собой только одним элементом комбинирования. Рассматриваемый код получается из полного сменнопосылочного путем исключения из него кодовых комбинаций, в которых смежные посылки содержат хотя бы один элемент комбинирования, имеющий непервое значение и общий для них.

Для использования в системах передачи информации наибольший интерес представляют те из кодов у которых алфавит общий для всех составляющих ($k_i = k = \text{const}$), временной признак не применяется, а каждая из посылок одной и той же кодовой комбинации имеет одинаковое число элементов кода с непервым значением ($m_{i-1} = m_i$). Определим емкость такого кода.

В этом случае по каждой параллельной составляющей, используемой для его передачи, посылается одно и то же число элементов кода. Обозначим количество посылок, которые могут быть использованы в качестве i -той посылки в сочетании с данной предыдущей ($i-1$)-ой, через

$$a_{m_{i-1}m_i},$$

где m_{i-1} — число элементов кода с непервым значением в предыдущей ($i-1$)-ой посылке;

m_i — количество таких же элементов кода в i -той посылке.

Число различных посылок, которые могут быть использованы в качестве первой, если в них количество элементов комбинирования с непервым значением m постоянно ($m = \text{const}$), равно $a_{m_0m_1}$.

Для второй посылки оно будет равно $a_{m_1m_2}$, а для i -той — $a_{m_{i-1}m_i}$.

Емкость кода при двух посылках в кодовых комбинациях

$$M_2 = a_{m_0m_1} \cdot a_{m_1m_2},$$

при n посылках ($n = \text{const}$)

$$M_n^1 = a_{m_0m_1} \cdot a_{m_1m_2} \cdot \dots \cdot a_{m_{i-1}m_i} \cdot \dots \cdot a_{m_{n-1}m_n} = \prod_{i=1}^n a_{m_{i-1}m_i}.$$

Но m может изменяться от 0 до s_n (s_n — количество параллельных составляющих, используемых при передаче кода). При $m = 0$ все посылки

кодовой комбинации будут состоять из элементов кода с первым значением, т. е. будут одинаковыми. Но в рассматриваемом коде смежные из них должны отличаться m элементами. Поэтому значение $m = 0$ должно быть исключено.

Следовательно, в этом коде m может изменяться только от 1 до s_n , и посылки, имеющие первое значение, не применяются. В таком случае

$$M_n = \sum_{m=1}^{s_n} \prod_{i=1}^n a_{m_{i-1}m_i} \quad (1)$$

Количество посылок в кодовых комбинациях n может изменяться от 2 до s_t (s_t — число последовательных составляющих, используемых для передачи кода). Поэтому

$$M = \sum_{n=2}^{s_t} \sum_{m=1}^{s_n} \prod_{i=1}^n a_{m_{i-1}m_i} \quad (2)$$

Число различных посылок, которые могут быть использованы в качестве i -той посылки, найдем из следующих соображений. При их передаче параллельные составляющие, по которым передаются элементы кода с первым значением, комбинируются по закону сочетаний. Число таких комбинаций равно $C_{s_n}^m$.

По каждой такой составляющей может передаваться $(k-1)$ элемент кода с непальвым значением, если она для передачи таких элементов предыдущей посылки не использовалась, и $(k-2)$ — если она использовалась.

Из этого следует, что

$$a_{m_{i-1}m_i} = (k_1 - 2)(k_2 - 2) \dots (k_{m_i} - 2) + \\ + (k_1 - 2) \dots (k_{m_i-1} - 2)(k_{m_i+1} - 1) + \dots + (k_{(s_n-m_i+1)} - 1) \dots (k_{s_n} - 1).$$

Обозначим каждое из слагаемых в этом многочлене буквой ε' с соответствующим индексом. Тогда

$$a_{m_{i-1}m_i} = \sum_{u=1}^{C_{s_n}^m} \varepsilon'_u \quad (3)$$

Но так как алфавит общий, то

$$k_1 = k_2 = \dots k_{s_n}.$$

Поэтому для неполных сменнопосылочных кодов с общим алфавитом u -тое слагаемое в (3)

$$\varepsilon'_u = (k-2)^{m_i-6} (k-1)^6, \quad (4)$$

так как количество сомножителей в каждом слагаемом равно m_i .

Из m_i параллельных составляющих, по которым передаются элементы кода данной i -той посылки с непальвым значением, часть участвовала в передаче таких элементов предыдущей посылки, а часть — нет. Количество первых составляющих $m_i - 6$, а вторых — 6. Из первых может быть составлено $C_{m_i-1}^{m_i-6}$ сочетаний по $m_i - 6$, а из вторых — $C_{s_n-m_i-1}^6$ по 6. Но так как в передаче элементов кода с непальвым значением участвуют как те, так

и другие, то количество различных сочетаний составляющих, по которым передаются элементы кода с непервым значением i -тых посылок (с одинаковым значением б):

$$\Gamma_6 = C_{m_{i-1}}^{m_i-6} C_{s_n-m_{i-1}}^6. \quad (5)$$

По составляющим, входящим в каждое такое сочетание, согласно (4) могут быть переданы элементы кода с непервым значением ε_u' посылки с одним и тем же б. Поэтому Γ_6 является количеством одинаковых слагаемых ε_u' в (3). Из (4) и (5) следует, что значение суммы одинаковых слагаемых равно:

$$b_6 = C_{m_{i-1}}^{m_i-6} C_{s_n-m_{i-1}}^6 (k-2)^{m_i-6} (k-1)^6. \quad (6)$$

Значение б может изменяться от 0 до m_i . При $b=0$

$$b_6 = C_{m_{i-1}}^{m_i} (k-2)^{m_i}.$$

Но так как $m_{i-1} = m_i$, то это первое слагаемое, потому что в нем показатель степени при $(k-2)$ максимально возможный и

$$C_{m_{i-1}}^{m_i} = 1.$$

Если же $b = m_i$, то

$$b_6 = C_{s_n-m_{i-1}}^6 (k-1)^6.$$

Такое значение b_6 имеет последнее слагаемое, когда $s_n = 2m$.

Сумма всех возможных b_6 равна $a_{m_{i-1}m_i}$, так как она включает в себя все возможные слагаемые при данных m_{i-1} и m_i . Поэтому

$$a_{m_{i-1}m_i} = \sum_{b=0}^{m_i} C_{m_{i-1}}^{m_i-6} C_{s_n-m_{i-1}}^6 (k-2)^{m_i-6} (k-1)^6. \quad (7)$$

Подставляя значение $a_{m_{i-1}m_i}$ из этого выражения в (2), получаем емкость неполного некомплектного сменнопосылочного кода с общим алфавитом

$$M = \sum_{n=2}^{s_t} \sum_{m_i=1}^{s_n} \prod_{i=1}^n a_{m_{i-1}m_i} = \sum_{n=2}^{s_t} \sum_{m_i=1}^{s_n} \prod_{i=1}^n C_{m_{i-1}}^{m_i-6} C_{s_n-m_{i-1}}^6 (k-2)^{m_i-6} (k-1)^6. \quad (8)$$

Когда все посылки состоят из одного и того же числа элементов кода с непервым значением, то его емкость определяется из (8) с учетом того, что в нем $m = m_i = \text{const}$. Следовательно,

$$M = \sum_{n=2}^{s_t} \prod_{i=1}^n \sum_{b=0}^{m_i} C_{m_{i-1}}^{m_i-6} C_{s_n-m_{i-1}}^6 (k-2)^{m_i-6} (k-1)^6. \quad (9)$$

В этом случае для всех посылок, кроме первой, справедливо

$$m_{i-1} = m_i = m.$$

Для первой посылки

$$m_1 = m_i = m,$$

но

$$m_{i-1} \neq m.$$

Для нее

$$m_{i-1} = 0.$$

Поэтому (7) для всех посылок, кроме первой, равно

$$a_{m_{i-1}m_i} = \sum_{\delta=0}^m C_{m-\delta}^{m-\delta} C_{s_n-m}^{\delta} (k-2)^{m-\delta} (k-1)^{\delta}. \quad (10)$$

Для первой посылки $\delta = m$, а $m_{i-1} = 0$. Подставляя эти значения в (7), получаем

$$a_{m_0m_i} = C_{s_n}^m (k-1)^m. \quad (11)$$

Так как в рассматриваемом случае для всех посылок, за исключением первой, $a_{m_{i-1}m_i}$ имеют одинаковые значения, то емкость такого кода, согласно (2), с учетом (10) и (11) и того, что $m_i = m = \text{const}$,

$$M = \sum_{n=2}^{s_t} \prod_{i=1}^n a_{m_{i-1}m_i} = \sum_{n=2}^{s_t} C_{s_n}^m (k-1) \left[\sum_{\delta=0}^m C_{s_n-m}^{m-\delta} (k-2)^{m-\delta} (k-1)^{\delta} \right]^{n-1}. \quad (12)$$

При $\delta = m$ из (10) находим

$$a_{m_{i-1}m_i} = C_{s_n-m}^m (k-1)^m. \quad (13)$$

Так как в общем случае различные признаки в коде могут принимать не одно и то же значение, то количество элементов кода в алфавите составляющей определяется из выражения

$$k = 1 + \sum_{u=1}^d \sum_{i=1}^{C_u^d} B_i.$$

Обычно используют одно и то же число значений для всех признаков. В этом случае значение k находится из выражения

$$k = q^d.$$

Подставляя это значения в (8), получим емкость неполного некомплектного сменнопосылочного кода с общим алфавитом при $q = \text{const}$.

$$\begin{aligned} M &= \sum_{n=2}^{s_t} \sum_{m_i=1}^{s_n} \prod_{i=1}^n \sum_{\delta=0}^{m_i} C_{m_{i-1}}^{m_i-\delta} C_{s_n-m_{i-1}}^{\delta} (k-2)^{m_i-\delta} (k-1)^{\delta} = \\ &= \sum_{n=2}^{s_t} \sum_{i=1}^{s_n} \sum_{m_i=1}^n \sum_{\delta=0}^{m_i} C_{m_{i-1}}^{m_i-\delta} C_{s_n-m_{i-1}}^{\delta} (q^d-2)^{m_i-\delta} (q^d-1)^{\delta} \end{aligned} \quad (14)$$

Когда в таком коде $m = m_i = \text{const}$, то согласно (9)

$$M = \sum_{n=2}^{s_t} \prod_{i=1}^n \sum_{\delta=0}^m C_{m_{i-1}}^{m-\delta} C_{s_n-m_{i-1}}^{\delta} (q^d-2)^{m-\delta} (q^d-1)^{\delta}. \quad (15)$$

Рассмотренные коды являются кодами с трехмерными кодовыми комбинациями при $d \neq 1$ и с двухмерными — при $d = 1$.

Когда в таком коде $m = m_i = \text{const}$, значение M находим из (15) с учетом того, что $k = q$:

$$M = \sum_{n=2}^{s_t} \prod_{i=1}^n \sum_{\delta=0}^m C_{m_{i-1}}^{m-\delta} C_{s_n-m_{i-1}}^{\delta} (q-2)^{m-\delta} (q-1)^{\delta}. \quad (16)$$

Здесь для всех посылок, кроме первой,

$$m_{i-1} = m_i = m = \text{const}.$$

Если $k = q = 2$, то в (10) все слагаемые, за исключением последнего, равны нулю, так как в них сомножители $(k-2)$ обращаются в нуль

$$a_{m_{i-1}m_i} = \sum_{\delta=0}^m C_m^{m-\delta} C_{s_n-m}^{\delta} (k-1)^{\delta} = C_{s_n-m}^m.$$

Число посылок, которые могут быть использованы в качестве первой, находим из (11)

$$a_{m,m_1} = C_{s_n}^m (k-1)^m = C_{s_n}^m.$$

Подставляем найденные значения в (2) и получаем емкость для неполного некомплектного сменнопосылочного кода с общим алфавитом при $q = 2$, $m = m_i = \text{const}$, при $d = 1$

$$M = \sum_{n=2}^{s_t} \prod_{i=1}^n a_{m_{i-1}m_i} = \sum_{n=2}^{s_t} C_{s_n}^m (C_{s_n-m}^m)^{n-1}. \quad (17)$$

При $n = \text{const}$ этот код превращается в комплектный неполный сменнопосылочный код, емкость которого равна $M = C_{s_n}^m (C_{s_n-m}^m)^{n-1}$.

Неполный некомплектный сменнопосылочный код, в котором $m = 1$, может быть как кодом с двухмерными, так и с одномерными комбинациями. Количество посылок, которые можно применить в качестве любой последующей посылки кодовой комбинации при $m_i = m = \text{const}$, находим из (10):

$$a_{m_{i-1}m_i} = \sum_{\delta=0}^m C_m^{m-\delta} C_{s_n-m}^{\delta} (k-2)^{m-\delta} (k-1)^{\delta} = \sum_{\delta=0}^1 C_{s_n-1}^{\delta} (k-2)^{1-\delta} (k-1)^{\delta}.$$

В качестве первой может быть использовано, согласно (11),

$$a_{m,m_1} = C_{s_n}^m (k-1)^m = s_n (k-1)$$

посылок, так как $m = 1$.

Подставляя найденные значения в (2), найдем емкость такого кода:

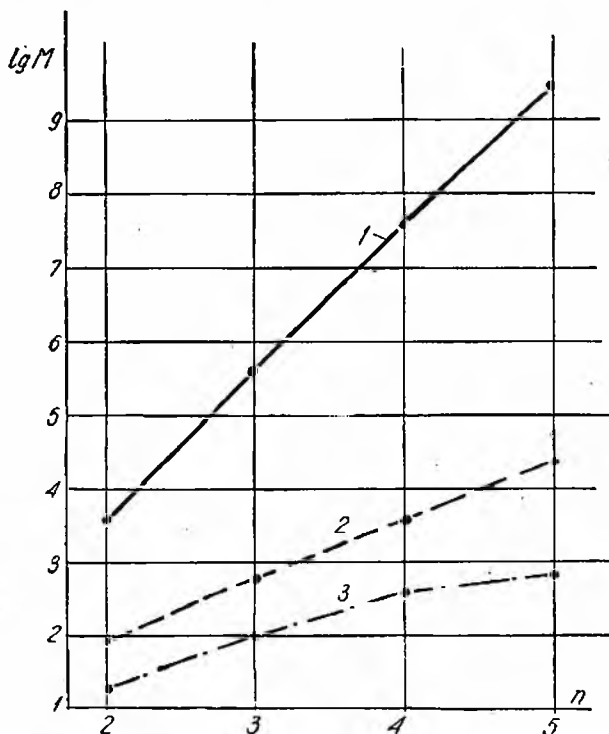
$$M = \sum_{n=2}^{s_t} \prod_{i=1}^n a_{m_{i-1}m_i} = \sum_{n=2}^{s_t} s_n (k-1) \left[\sum_{\delta=0}^1 C_{s_n-1}^{\delta} (k-2)^{1-\delta} (k-1)^{\delta} \right]^{n-1}. \quad (18)$$

Если $d > 1$, то это код с двухмерными кодовыми комбинациями. При $k = q^d$ его емкость равна

$$M = \sum_{n=2}^{s_t} s_n (q^d - 1) \left[\sum_{\sigma=0}^1 C_{s_n-1}^{\sigma} (q^d - 2) (q - 1)^{\sigma} \right]^{n-1}. \quad (19)$$

А при $d = 1$ это код с одномерными кодовыми комбинациями. При $k = q$

$$M = \sum_{n=2}^{s_t} s_n (q - 1) \left[\sum_{\sigma=0}^1 C_{s_n-1}^{\sigma} (q - 2)^{1-\sigma} (q - 1)^{\sigma} \right]^{n-1}. \quad (20)$$



Зависимость $\log M$ от n для неполных некомплектных сменнопосылочных кодов при $m = m_i = \text{const}$, $s_n = 5$, $q = 2$:

1 — при $d = 2$, $m = 2$; 2 — при $d = 2$, $m = 1$; 3 — при $d = 1$, $m = 1$.

Если $k = q = 2$, то в (20) сомножитель $(q - 2)$ обращается в нуль, а $(m - 1)$ — в единицу. Поэтому

$$M = \sum_{n=2}^{s_t} s_n (C_{s_n-1}^1)^{n-1} = \sum_{n=2}^{s_t} s_n (s_n - 1)^{n-1}. \quad (21)$$

Такой код принято называть некомплектным сменнокачественным. При $n = \text{const}$ он превращается в комплектный сменноколичественный. Для последнего величину M получаем из (21)

$$M = s_n (s_n - 1)^{n-1}. \quad (22)$$

На рисунке приведены графики зависимости емкости кодов от количества использованных для их передачи последовательных составляющих.

Из неполных некомплектных сменнопосылочных кодов наибольшей емкостью при одних и тех же $q_{\max}$ и $d_{\max}$ обладают сменнопосылочные коды, у которых $d = d_{\max}$ и $q = q_{\max}$ — трехмерные кодовые комбинации (кривая 1). Естественно, что коды с двухмерными (кривая 2) и одномерными (кривая 3) кодовыми комбинациями обладают меньшей емкостью.

Из рассмотренных пока что получили распространение коды с одномерными кодовыми комбинациями. При большом количестве передаваемой информации перспективными являются коды с двух- и трехмерными кодовыми комбинациями.
