Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Оптимальне управління
інвестиційним портфелем в умовах невизначеності
(тема)

Виконав:
здобувач _2_ року навчання, групи _САУм-23-1
Слєпцов О.М.
(прізвище, ініціали)
Спеціальність
124 Системний аналіз
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Системний аналіз і управління
(повна назва освітньої програми)
Керівник доц. Гибкіна Н.В.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ ____________ Сидоров М.В.
(підпис) (прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра _прикладної математики
Рівень вищої освіти _другий (магістерський)
Спеціальність _124 Системний аналіз
(код і повна назва)
Тип програми _освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма _Системний аналіз і управління
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ ____________
(підпис)
“_25_” _листопада_ 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві _Слєпцову Олександру Максимовичу
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи Оптимальне управління інвестиційним портфелем в умовах невизначеності

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1228 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи статистичні дані про змінення ціни акцій

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі
   1. Системний аналіз предметної області
   2. Вибір і обґрунтування методу розв’язання
   3. Програмна реалізація
   4. Результати обчислювального експерименту
   5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп’ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Системний аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання _25_ листопада 2024 р.

Здобувач ________________________________
(підпис)

Керівник роботи ________________ доц. Гибкіна Н.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 81 с., 23 табл., 13 рис., 1 дод., 16 джерел.

ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ, ІНВЕСТИЦІЙНИЙ ПОРТФЕЛЬ, ОПТИМАЛЬНА СТРАТЕГІЯ, ЦІННІ ПАПЕРИ, ЗАДАЧА ПРО ОПТИМАЛЬНУ ЗУПИНКУ, ЛАНЦЮГ МАРКОВА.

Об’єкт дослідження – інвестиційний портфель за умов фінансової невизначеності.

Мета роботи – побудова стратегій управління інвестиційним портфелем, які допоможуть приймати обґрунтовані рішення щодо доцільності утримання цього портфеля з урахуванням факторів невизначеності, таких як коливання цін та нестача точної інформації про майбутні доходи.

Методи дослідження – методи математичної статистики, методи теорії випадкових процесів та методи оптимального управління.

Кваліфікаційна робота була присвячена розв’язанню задачі пошуку оптимальних стратегій управління інвестиційним портфелем. Визначення способів управління інвестиційним портфелем, побудова стратегій поведінки інвестора на фінансовому ринку з метою максимізації прибутків представляє великий інтерес з практичної точки зору. Для розв’язання досліджуваної задачі було розроблено програмний продукт, який дозволив автоматизувати обробку часових даних, реалізувати ітераційні розрахунки та отримувати рекомендації щодо поведінки інвестора на фінансовому ринку у зручному вигляді.

Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, можуть бути корисними в у сфері фінансового аналізу як додатковий інструмент прийняття ефективних інвестиційних рішень.

ABSTRACT

Introductory note: 81 pages, 23 tables, 13 figures, 1 appendix, 16 sources.

OPTIMAL MANAGEMENT, INVESTMENT PORTFOLIO, OPTIMAL STRATEGY, SECURITIES, OPTIMAL STOPPING PROBLEM, MARKOV CHAIN.

Object of research – investment portfolio under conditions of financial uncertainty.

Purpose of work – building investment portfolio management strategies that will help make informed decisions about the feasibility of maintaining this portfolio, taking into account uncertainty factors, such as price fluctuations and the lack of accurate information about future income.

Methods of research – methods of mathematical statistics, methods of the theory of stochastic processes and methods of optimal management.

The qualification work was devoted to solving the problem of finding optimal investment portfolio management strategies. Determining ways to manage an investment portfolio, building strategies for investor behavior in the financial market in order to maximize profits is of great interest from a practical point of view. To solve the problem under study, a software product was developed that allowed automating the processing of time data, implementing iterative calculations and receiving recommendations on investor behavior in the financial market in a convenient form.

The results obtained in the qualification work can be useful in the field of financial analysis as an additional tool for making effective investment decisions.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Інвестування в цінні папери є одним із найпривабливіших і найцікавіших завдань у сфері фінансів. При цьому володіння портфелем цінних паперів пов'язане з великою кількістю ризиків, які викликані тим, що ринок фінансових активів є досить непередбачуваним і може змінюватись під впливом різних економічних, політичних та соціальних факторів. Це означає, що інвестор повинен оперативно реагувати на зміни ринкової ситуації шляхом своєчасного змінення складу фінансового портфеля. Отже, управління інвестиційним портфелем вимагає швидких та своєчасних рішень щодо продажу активів або перерозподілу капіталу: необхідно регулярно оцінювати зміну вартості цих активів та коригувати структуру портфеля для зниження ризиків витрат та збільшення прибутків. Управління інвестиційним портфелем вимагає не тільки знань і досвіду, а й постійного аналізу ринку для того, щоб своєчасно підбирати перспективні активи та позбуватися від тих, що втратили свою привабливість через небажане змінення ціни.

Через складність та непередбачуваність умов, у яких функціонує фінансова система, дуже важливим є застосування підходів, які дозволять приймати рішення із врахуванням всієї множини зовнішніх факторів. Саме тому математичні методи, що використовують у процесі формування портфелів цінних паперів та управління їх структурою, є важливим інструментом для ефективного інвестування в умовах невизначеності. Методи математичної статистики дозволяють точно оцінювати ключові характеристики портфеля: очікувану прибутковість, волатильність активів тощо. Методи машинного навчання допомагають обробляти та аналізувати великі обсяги історичних даних, виявляти приховані закономірності та прогнозувати майбутню динаміку цін, що покращує якість рішень. Методи оптимізації дозволяють розв’язувати задачі оптимального розподілу активів на основі встановлення оптимального балансу між ризиком та прибутковістю та з урахуванням обмежень інвестора. Застосування випадкових процесів для моделювання поведінки цін на фінансові активи дає змогу враховувати зміни ринкових умов та коригувати інвестиційну стратегію у реальному часі до того, як збитки стануть значними. Використання математичного апарату дозволяє позбавити процес управління портфелем суб'єктивності, знизити вплив людського фактора і забезпечити оперативність у прийнятті рішень.

Одним з важливих завдань управління інвестиційним портфелем є проблема визначення моменту часу, коли варто продати актив, щоб максимізувати прибуток чи мінімізувати втрати, пов'язані з володінням цим активом. З погляду довгострокового планування отримані результати важливі, оскільки вибір оптимального часу для виходу з позиції дозволяє вивільнити кошти для реінвестування в перспективніші активи у майбутньому. З математичної точки зору вирішення цього питання полягає у знаходженні оптимального моменту для припинення поточного інвестування. Неправильний вибір часу для зупинки може призвести до збільшення витрат або до неможливості продати актив за бажаною ціною. Базуючись на отриманих результатах розв'язання задачі оптимального управління, інвестор зможе приймати рішення про купівлю, продаж або перерозподіл активів автоматично, на основі сформованих правил оптимальної зупинки.

Таким чином, задача оптимального управління інвестиційним портфелем залишається актуальною в умовах складного ринкового середовища, що швидко змінюється. Використання математичних методів дозволяє враховувати невизначеність та стохастичну природу фінансових ринків, що у свою чергу, допомагає приймати обґрунтовані інвестиційні рішення, призводить до покращення результатів інвестування та зниження пов'язаних із цим ризиків.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є побудова стратегій управління інвестиційним портфелем, які допоможуть приймати обґрунтовані рішення щодо доцільності утримання цього портфеля з урахуванням факторів невизначеності, таких як коливання цін та нестача точної інформації про майбутні доходи.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі оптимального управління інвестиційним портфелем в умовах невизначеності;

– розглянути методи оптимального управління та теорії прийняття рішень, які можуть бути застосовані для розв'язання задачі оптимального управління інвестиційним портфелем в умовах невизначеності, та обрати той метод, що найбільш підходить для розв'язання поставленої задачі;

– зібрати статистичні дані про ціни на цінні папери, необхідні для розв'язання задачі пошуку оптимальних стратегій у задачі управління інвестиційним портфелем;

– побудувати математичну модель задачі оптимального управління інвестиційним портфелем та розв'язати поставлену задачу обраним методом;

– розробити програмний продукт, який дозволить автоматизувати процес знаходження оптимальних стратегій управління інвестиційним портфелем за умов невизначеності зовнішніх факторів;

– виконати обчислювальні експерименти на основі історичних даних цін та проаналізувати отримані результати.

Об'єктом дослідження є інвестиційний портфель за умов фінансової невизначеності.

Предметом дослідження є методи оптимального управління інвестиційним портфелем в умовах невизначеності.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи математичної статистики, методи теорії випадкових процесів та методи оптимального управління.

Публікації. Попередні результати було представлено на III Міжнародній молодіжній науково-практичній конференції англійською мовою «Навчання і викладання: у світі після війни» (м. Харків, 08 листопада 2024 р.) [1].

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі оптимального управління інвестиційним портфелем в умовах невизначеності

1.1.1 Вербальна модель системи

Для виконання аналізу задачі оптимального управління інвестиційним портфелем в умовах невизначеності визначимо основні складові цього аналізу.

Об’єкт аналізу – інвестиційний портфель.

Предмет аналізу – методи оптимального управління інвестиційним портфелем в умовах невизначеності.

Точка зору: інвестор або аналітик.

Ціль: застосування методів оптимального управління та прийняття рішень для управління портфелем в умовах ринкової невизначеності з метою максимізації прибутку від володіння цінними паперами, що входять до складу цього портфеля, та позбавлення від тих паперів, які перестають забезпечувати бажаний рівень прибутків.

Метою оптимального управління інвестиційним портфелем є підтримка збалансованого складу портфеля, що відповідає стратегічним цілям інвестора, враховуючи бажану дохідність активів та коливання цін. Оптимізація структури портфеля дозволяє визначити, які саме активи, їх кількість і пропорції забезпечать прийнятний рівень прибутковості та знизять ризики втрат. Цей підхід до управління портфелем враховує фактори ринкової невизначеності, такі як волатильність і ймовірність ринкових змін, що дозволяє ефективно адаптувати портфель до поточних умов.

Застосування математичних методів управління інвестиційним портфелем надає можливості для реалізації різних підходів до аналізу та врахування ризиків за умови досягнення оптимальних фінансових результатів від володіння цінними паперами. На відміну від традиційних методів розподілу активів моделі оптимального управління та прийняття рішень дозволяють врахувати внутрішні особливості активів, їх кореляцію та вплив макроекономічних чинників. Такий підхід стає особливо корисним в умовах високої невизначеності, коли важливо не лише побудувати портфель, але й підтримувати його стійкість до змін ринку. Завдяки цьому інвестори можуть не тільки визначити найбільш доцільні стратегії, але й контролювати ризики для досягнення максимально точних і вигідних фінансових результатів.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Система – це комплекс взаємопов'язаних між собою елементів, які утворюють єдине ціле [2, 3]. У нашому випадку системою буде «Модель оптимального управління інвестиційним портфелем».

Призначення системи – забезпечення оптимальної структури портфеля, яка відповідає цілям інвестора, з урахуванням коливань цін активів у ринкових умовах.

Мета системи – розподіл та оновлення активів у портфелі таким чином, щоб забезпечити оптимальну прибутковість портфеля у часі в умовах ринкової невизначеності.

Проведемо класифікацію системи за наступними ознаками:

– за походженням: штучна (система створена на основі математичних і фінансових моделей, розроблених людиною);

– за об'єктивністю існування: абстрактна (система складається з моделей і методів оптимізації, що описують управління портфелем);

– за природою систем: економічна (система стосується неживих фінансових активів);

– за центром системи: централізована (ключову роль у системі відіграє аналітик або інвестор, оскільки без його дій система не може функціонувати);

– за величиною: мала (система охоплює окремий портфель активів);

– за складністю: складна (управління портфелем потребує обробки значних обсягів даних, ризик-аналізу та використання складних моделей);

– з точки зору взаємодії з оточуючим середовищем: відкрита (система адаптується до ринкових умов і постійно взаємодіє з зовнішніми факторами, такими як ринкові індекси, процентні ставки та макроекономічні показники, політичні події, настрої та тенденції тощо);

– за степенем детермінованості: стохастична (через ринкову невизначеність результат прогнозувати важко, а всі параметри мають імовірнісний характер);

– за способом управління: самоврядна (керуючі механізми вбудовані в систему у вигляді алгоритмів, що аналізують і коригують портфель);

– за станом: динамічна (система здатна змінювати свій стан відповідно до змін на ринку та активності інвестора).

Ця система буде оптимальною, оскільки всі процеси спрямовані на ефективне управління портфелем з врахуванням витрат ресурсів (час на аналіз активів, витрати на торгівлю тощо) для досягнення фінансових цілей.

Розглянемо модель типу «чорний ящик» для системи «Модель оптимального управління інвестиційним портфелем». Ця модель не досліджує внутрішню структуру системи, до уваги беруться лише її межі, отже, дослідник може сфокусуватися лише на аналізі входів та виходів системи. Для системи оптимального управління інвестиційним портфелем модель «чорний ящик» матиме структуру, наведену на рисунку 1.1.

Входом до системи будуть фактори, які подаються до системи для аналізу та впливають на управління портфелем. До них відносяться:

– історичні котирування активів;

– параметри фінансового ринку, процентні ставки, рівень інфляції, валютні курси;

– макроекономічні показники;

– політичні чинники;

– соціальні умови, новини та інші події, здатні впливати на ціну фінансових активів.

На виході система видає результати аналізу та рекомендації щодо управління портфелем та змінення його структури, зокрема:

– рекомендації щодо купівлі, продажу чи утримання активів;

– інформацію про очікуваний прибуток від володіння активом чи від його продажу.

Межами системи є простір, у якому аналітик або інвестор, використовуючи математичні методи, комп'ютерні програми та алгоритми, здійснює управління портфелем і розрахунки для його оптимізації.

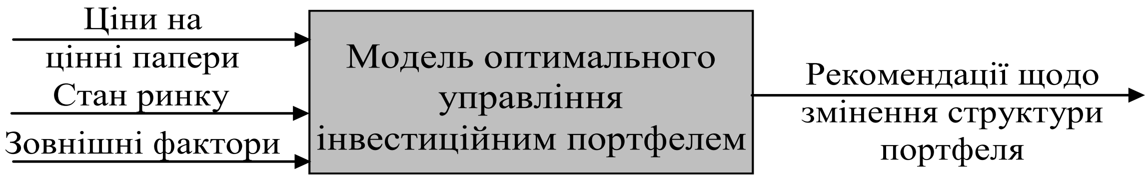


Рисунок 1.1 – Модель типу «чорна скринька»

Далі розглянемо модель зовнішнього середовища (рисунок 1.2). Вона дозволяє виділити фактори, що знаходяться поза межами системи, але самі суттєво впливають на неї. Ці фактори формують середовище, у якому функціонує система, і дозволяють виділити дані, необхідні для виконання її мети.

Зовнішнє середовище для системи «Модель оптимального управління інвестиційним портфелем» включає всі фактори та умови, які знаходяться поза межами самої системи, але мають на неї значний вплив з точки зору прийняття рішень щодо управління портфелем. На основі значущих факторів відтворюється картина поточного стану ринку, прогнозуються майбутні зміни, формується рішення щодо доцільності подальшого володіння фінансовими активами. Ефективна робота системи «Модель оптимального управління інвестиційним портфелем» залежить від правильного виділення зовнішніх факторів та здатності моделі враховувати їх зміни.

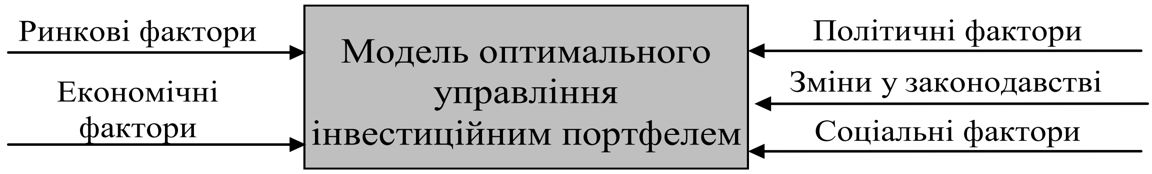


Рисунок 1.2 – Модель зовнішнього середовища системи

Основними компонентами зовнішнього середовища системи «Модель оптимального управління інвестиційним портфелем» є:

– ринкові фактори, які відображаються у поточних цінах, ліквідності, волатильності та інших параметрах цінних паперів;

– економічні фактори, такі як інфляція, валютні курси, стан економіки у цілому, що суттєво впливає на вартість активів у портфелі;

– політичні фактори, такі як зміни у податковій політиці, стабільність у політичній сфері, що можуть суттєво вплинути на інвестиційну привабливість цінних паперів та на прийняття рішень щодо їх утримання;

– соціальні фактори: зміни у перевагах клієнтів можуть вплинути на популярність певних активів та класів цінних паперів.

Ідентифікованість системи полягатиме в тому, які саме методи будуть використані для побудови математичної моделі портфеля і як вони дозволять врахувати перераховані фактори, а також які стратегії управління портфелем будуть обрані. Саме це виділить розглядувану систему серед інших, що працюють у галузі фінансового моделювання.

1.1.3 Функціональна модель системи

Наступним кроком побудуємо функціональну модель системи «Модель оптимального управління інвестиційним портфелем». Функціональна модель описує основні функції та процеси, які виконує система для досягнення цілей, висунутих у ході оптимального управління інвестиційним портфелем [2, 3].

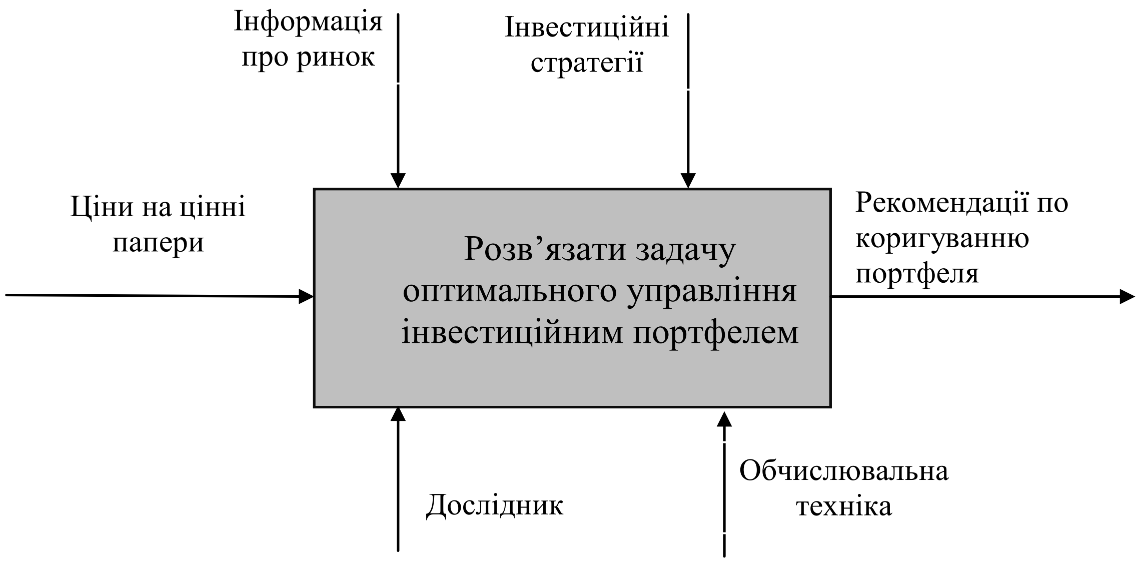
Функціональна модель системи «Модель оптимального управління інвестиційним портфелем», яка дозволяє обирати рішення щодо продажу чи збереження наявних цінних паперів, охоплює весь процес роботи з портфелем. На початковому етапі відбувається збір і обробка даних, що стосуються стану цінних паперів у портфелі, зокрема їхньої ціни у поточний момент часу та історичні значення цін за минулі періоди. Одночасно збираються ринкові дані, такі як макроекономічні показники, галузеві новини і аналітичні прогнози, а також інформація про зовнішні фактори, які можуть впливати на цінні папери, наприклад, курсові ризики, політична ситуація та тенденції у фінансовому секторі.

На наступному етапі система виконує аналітичні дослідження для оцінки поточного стану портфеля та зовнішніх умов, зокрема здійснюється оцінка динаміки цін для кожного активу та інших необхідних показників. Виходячи з аналізу історичних даних виконується прогнозування можливих ризиків і коливань цін. Для прийняття рішень встановлюються порогові значення, які визначають критерії збереження або продажу активів. Наприклад, якщо дохідність активу перевищує певний поріг, а рівень ризику залишається в допустимих межах, його рекомендується залишити в портфелі.

Схвалення рішення щодо активів, які входять у портфель, ґрунтується на використанні математичних моделей (наприклад, моделей лінійного програмування, оптимального управління, машинного навчання, аналізу сценаріїв), які допомагають оцінити можливі варіанти, такі як продаж, утримання або купівля, і оптимізувати портфель для досягнення бажаного рівня доходу. В результаті система формує конкретні рекомендації для кожного активу: залишити, продати або перебалансувати портфель.

Для забезпечення ефективності система повинна передбачати постійний моніторинг стану портфеля на основі слідкування за станом ринку та змінюваними зовнішніми умовами, а також здійснювати корекцію стратегії управління портфелем у разі зміни цих умов. Регулярне оновлення даних і повторний аналіз дозволяють швидко адаптуватися до змінних умов ринку. Завдяки такій моделі система забезпечує динамічну взаємодію з ринковим середовищем та підтримку обґрунтованих рішень, що дозволяє ефективно управляти портфелем і досягати оптимального співвідношення між дохідністю та ризиком.

Графічне відображення функціональної структури системи «Модель оптимального управління інвестиційним портфелем» можна здійснити через контекстну діаграму IDEF0 (рисунок 1.3). Основними вхідними даними для системи є характеристики фінансових інструментів та інформація про поточний стан портфеля, організовані у вигляді таблиць для зручності подальшої обробки та аналізу. До механізмів системи входять обчислювальні пристрої для проведення аналізу, а також аналітики або інвестори, які приймають рішення на основі отриманих результатів. Управлінським апаратом системи є математичні методи та інструменти інформаційних технологій, які слугують теоретичною основою для розв’язання задачі, зокрема: методи оптимального управління, інструменти прийняття рішень, а також спеціалізовані програмні засоби, які дозволяють автоматизувати процедуру аналізу. Результатом роботи системи є рекомендації щодо коригування структури портфеля, що включають рішення про продаж або утримання активів.



A-0	Розв’язати задачу оптимального управління інвестиційним портфелем

Рисунок 1.3 – Контекстна діаграма (рівень А-0)

Декомпозиція контекстної діаграми (рисунок 1.4) розкриває основні етапи, необхідні для досягнення мети оптимального управління портфелем, від збору та підготовки даних до формування рекомендацій щодо корегування структури портфеля.

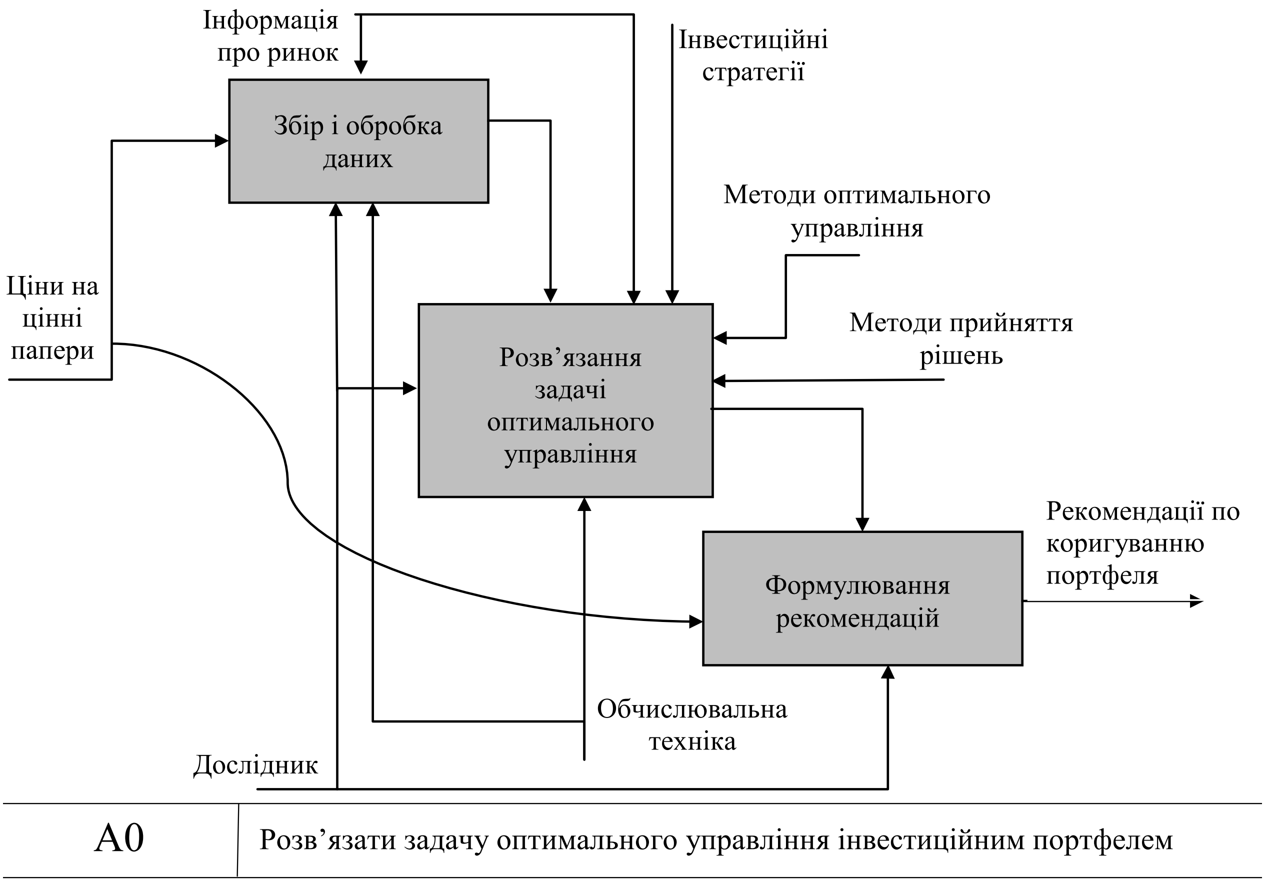


Рисунок 1.4 – Декомпозиція роботи «Розв'язати задачу оптимального управління інвестиційним портфелем»: рівень A0

Після декомпозиції контекстної діаграми виконується деталізація кожного з етапів до досягнення відповідної глибини опису. Так, наприклад, декомпозиція етапу «Збір і обробка даних» може бути подана через побудову діаграми в ієрархії, яка детально вказує на функції цього етапу і механізми їх реалізації (рисунок 1.5).

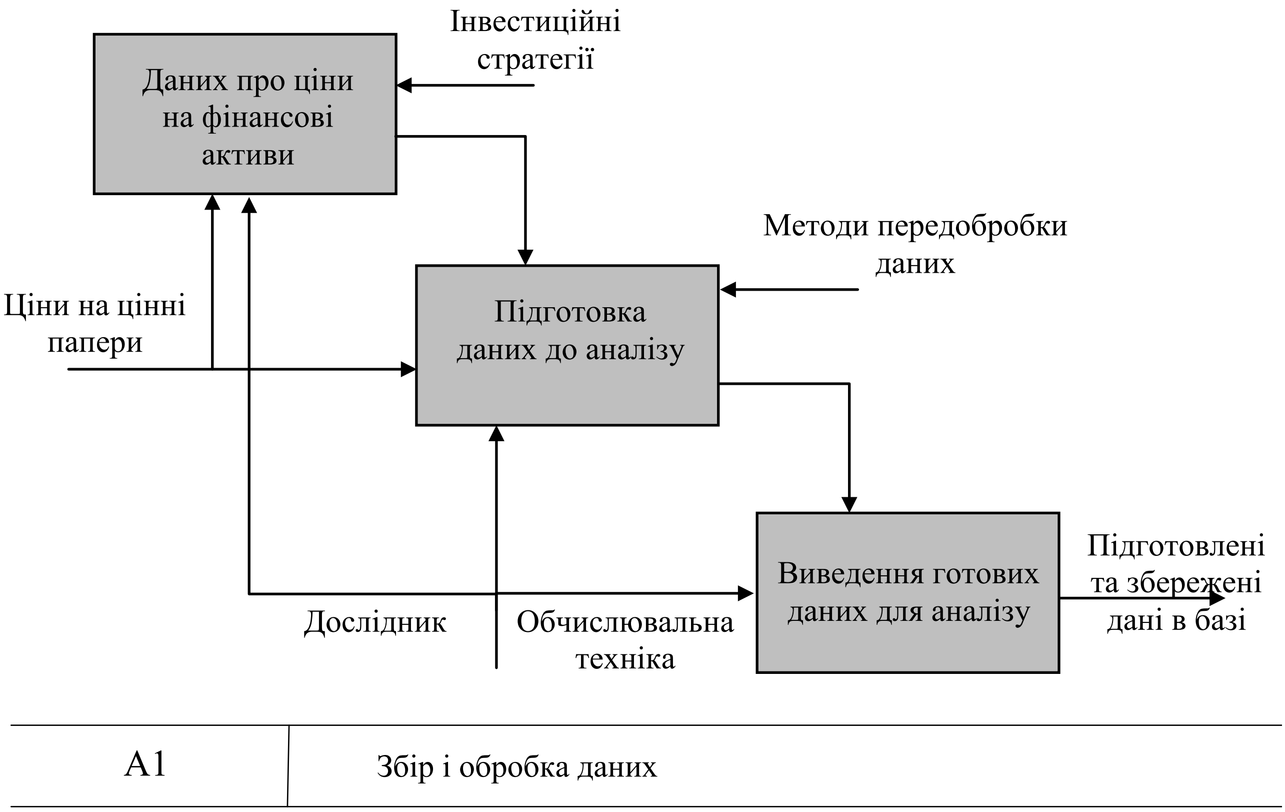


Рисунок 1.5 – Декомпозиція роботи «Збір і обробка даних»: рівень A1

На рисунку 1.6 показана IDEF3-діаграма, яка дозволяє моделювати взаємодію функціональних блоків у системі та аналізувати потоки даних і зв'язки між ними. На IDEF3-діаграмі процесу оптимального управління інвестиційним портфелем відображено, що для вирішення задачі необхідно мати дані про характеристики цінних паперів та поточний склад портфеля. На наступному етапі ці дані обробляються, а також обирається відповідна модель для відображення фінансового стану портфеля та визначення його параметрів. Ця інформація переходить на наступний етап, де проводиться оптимізація портфеля. Останнім кроком є визначення оптимальної стратегії щодо продажу/утримання цінних паперів з портфеля для досягнення визначених інвестиційних цілей та формування відповідних рекомендацій на основі отриманого розв'язку задачі.

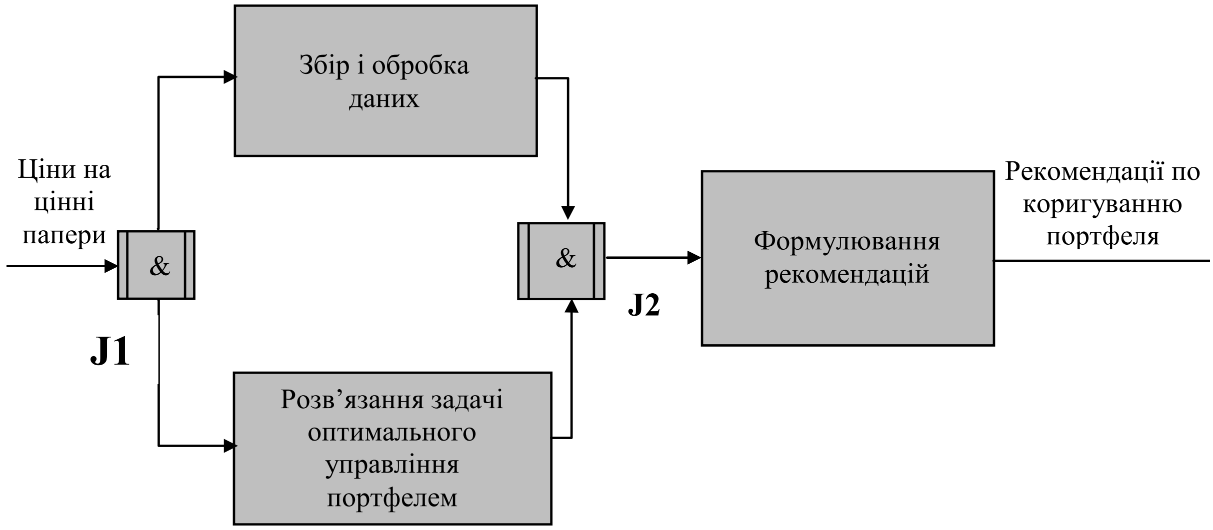


Рисунок 1.6 – Опис роботи «Оптимальне управління інвестиційним портфелем»: рівень A0 (в нотації IDEF3)

1.1.4 Інформаційна модель

Інформаційна модель описує структуру даних, інформаційні потоки та взаємодію між елементами системи, які використовуються для управління інвестиційним портфелем. Вона охоплює джерела даних, перетворення інформації, зберігання та використання даних для прийняття рішень. Її правильна розробка дозволяє ефективно управляти інвестиціями, мінімізувати ризики та адаптуватися до змін ринкового середовища [2, 3].

Інформаційна модель системи «Модель оптимального управління інвестиційним портфелем» дозволяє виділити та описати зв'язки між джерелами даних, їх сховищем та модулями обробки. Основними компонентами інформаційної моделі є вхідні дані, що надходять із зовнішніх та внутрішніх джерел, які необхідні для аналізу та прийняття рішень, методи обробки та побудови стратегії управління, а також вихідні дані. Усі дані із зовнішніх джерел зберігаються для подальшого аналізу та використання. Обробка даних включає їх перетворення для підготовки інформації для аналітики та моделювання. Результати аналізу та прийняття рішень надаються у зручній для інтерпретації формі у вигляді рекомендацій про купівлю, продаж або утримання активів та прогнозів доходності.

Інформаційна модель системи «Модель оптимального управління інвестиційним портфелем» орієнтована на ухвалення рішень щодо продажу або утримання наявних цінних паперів. Основою моделі є поточний портфель, що містить дані про фінансові активи, зокрема їхню вартість, дохідність і ризик. Ця інформація необхідна для оцінки поточного стану портфеля та розробки стратегії щодо доцільності його подальшого утримання. Джерелами вхідних даних про ціни активів можуть бути фінансові інформаційні платформи або біржові зведення. Система також збирає ринкові дані, такі як макроекономічні показники, галузеві прогнози та актуальні новини, що дозволяє аналізувати вплив зовнішніх чинників на вартість активів. Зовнішня інформація, включаючи економічну політику, курсові коливання та специфічні галузеві ризики, забезпечує всебічне уявлення про потенційні загрози та можливості для портфеля.

Після збирання та попередньої обробки даних система проводить аналіз ризиків для кожного активу. На основі цього аналізу будується прогноз майбутніх змін вартості активів із застосуванням моделей, що дозволяють враховувати різні сценарії. Далі визначаються показники, які слугують критеріями для ухвалення рішень про продаж чи утримання активів, з урахуванням допустимого рівня ризику та цільових показників дохідності.

На етапі побудови оптимальної стратегії управління використовуються математичні методи, що дозволяють знаходити оптимальні рішення щодо утримання або продажу цінних паперів з портфеля. В результаті система формує рекомендації для інвестора чи аналітика, які відображають можливий вплив прийнятих рішень на загальний ризик і дохідність портфеля, підтримуючи ефективне управління активами.

Інформаційний обмін між системою «Модель оптимального управління інвестиційним портфелем» та зовнішнім середовищем є важливим для аналізу вхідних та вихідних даних та ефективного управління портфелем, і сприяє підвищенню якості портфеля та зростанню прибутку.

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми оптимального управління інвестиційним портфелем в умовах невизначеності

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Під час виконання аналізу проблеми оптимального управління інвестиційним портфелем, де необхідно вирішити, чи варто продавати або зберігати наявні цінні папери, ключовим питанням є вибір найдоцільнішого методу для розв’язання цієї задачі [4]. Щоб обґрунтовано прийняти рішення, визначимо перелік потенційних методів, які можуть бути застосовані, і порівняємо їх за такими критеріями:

– критерій 1 (К1): складність алгоритму;

– критерій 2 (К2): стійкість до пропущених даних;

– критерій 3 (К3): чутливість до кореляцій між прибутковостями активів;

– критерій 4 (К4): здатність ефективно обробляти велику кількість параметрів;

– критерій 5 (К5): швидкість виконання та обчислювальна ефективність.

Методи, які розглядаються для цієї задачі, включають:

– альтернатива 1 (А1): метод аналізу сценаріїв;

– альтернатива 2 (А2): статистичні методи;

– альтернатива 3 (А3): метод оптимального управління.

Ієрархічна модель вибору методу для оптимального управління інвестиційним портфелем зображена на рисунку 1.8. У центрі ієрархії знаходиться розглядувана проблема, на першому рівні подані критерії, обрані для порівняння, а на другому – альтернативні методи, з яких обирається оптимальний у заданих умовах.

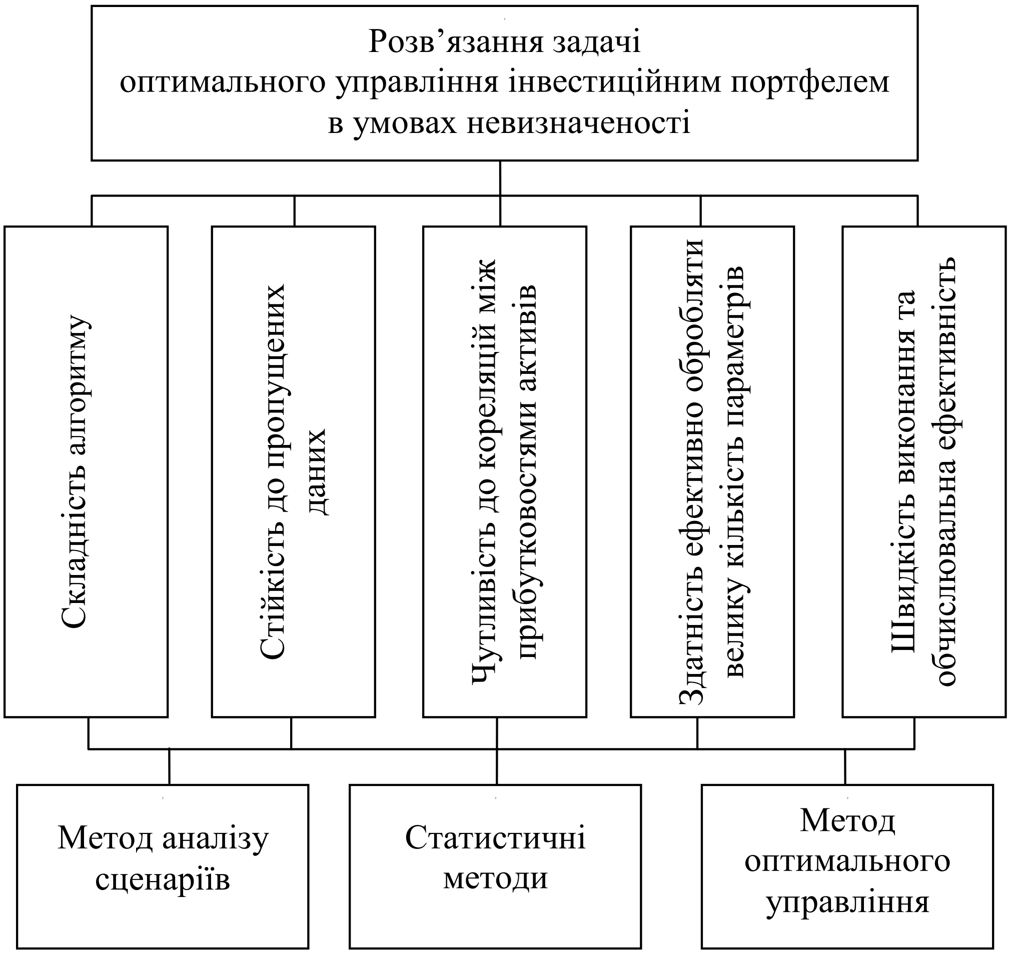


Рисунок 1.10 – Ієрархічна модель вибору методу вирішення проблеми оптимального управління інвестиційним портфелем в умовах невизначеності

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Першим етапом методу аналізу ієрархії є побудова матриць парних порівнянь методів і критеріїв системи.

Матриця парних порівнянь для розглядуваних критеріїв наведена у таблиці 1.1. Результат розрахунків вектора пріоритетів критеріїв наведений у останньому стовпчику цієї таблиці.

Таблиця 1.1 – Матриця парних порівнянь критеріїв

Критерії оцінювання	К1	К2	К3	К4	К5	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів
К1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	0,33	0,05
К2	4	1	2	$\frac{1}{3}$	4	1,61	0,25
К3	4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	4	1,15	0,18
К4	5	3	4	1	2	2,61	0,41
К5	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	0,62	0,10
Усього						6,32	

Випадкова узгодженість для матриці п’ятого порядку дорівнює $1{,}12$.

З таблиці 1.1 отримали:

– індекс узгодженості $IУ = \dfrac{5{,}59-5}{5-1} \approx 0{,}15$;

– відносна узгодженість $ВУ = \dfrac{0{,}15}{1{,}12} \approx 0{,}134 = 13{,}4\%$.

Можемо зробити висновок про те, що матриця парних порівнянь критеріїв є узгодженою, оскільки відносна узгодженість близька за своїм значенням до $0{,}1$ (незначно його перевищує).

Побудований при цьому вектор локальних пріоритетів критеріїв відносно проблеми вибору має вигляд $\vec{p}^{K} = (0{,}05;\, 0{,}25;\, 0{,}18;\, 0{,}41;\, 0{,}10)$.

Наступним кроком побудуємо матриці попарних порівнянь альтернатив для кожного з обраних вище критеріїв. Ці матриці наведено у таблицях 1.2 – 1.6. За сформованими матрицями виконаємо розрахунки, аналогічні проведеним вище.

Таблиця 1.2 – Матриця попарних порівнянь за першим критерієм

К1	А1	А2	А3	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів
А1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0,50	0,12
А2	2	1	$\frac{1}{6}$	0,69	0,17
А3	4	6	1	2,88	0,71
Усього				4,08	

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь за другим критерієм

К2	А1	А2	А3	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів
А1	1	3	$\frac{1}{2}$	1,14	0,31
А2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{5}$	0,41	0,11
А3	2	5	1	2,15	0,58
Усього				3,70	

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь за третім критерієм

К3	А1	А2	А3	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів
А1	1	3	2	1,82	0,52
А2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{4}$	0,44	0,12
А3	$\frac{1}{2}$	4	1	1,26	0,36
Усього				3,51	

Таблиця 1.5 – Матриця попарних порівнянь за четвертим критерієм

К4	А1	А2	А3	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів
А1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	0,37	0,10
А2	5	1	2	2,15	0,57
А3	4	$\frac{1}{2}$	1	1,26	0,33
Усього				3,78	

Таблиця 1.6 – Матриця попарних порівнянь за п’ятим критерієм

К5	А1	А2	А3	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів
А1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	0,46	0,11
А2	2	1	$\frac{1}{5}$	0,74	0,18
А3	5	5	1	2,92	0,71
Усього				4,12	

З таблиці 1.2 отримали:

– індекс узгодженості $ІУ=\frac{3,136-3}{3-1} \approx 0,068$;

– відносна узгодженість $ВУ=\frac{0,068}{0,58} \approx 0,117 = 11,7\%$.

З таблиці 1.3 отримали:

– індекс узгодженості $ІУ=\frac{3,004-3}{3-1} \approx 0,002$;

– відносна узгодженість $ВУ=\frac{0,002}{0,58} \approx 0,003 = 0,3\%$.

З таблиці 1.4 отримали:

– індекс узгодженості $ІУ = \dfrac{3,108-3}{3-1} \approx 0,054$;

– відносна узгодженість $ВУ = \dfrac{0,054}{0,58} \approx 0,093 = 9,3\%$.

З таблиці 1.5 отримали:

– індекс узгодженості $ІУ = \dfrac{3,025-3}{3-1} \approx 0,012$;

– відносна узгодженість $ВУ = \dfrac{0,012}{0,58} \approx 0,021 = 2,1\%$.

З таблиці 1.6 отримали:

– індекс узгодженості $ІУ = \dfrac{3,054-3}{3-1} \approx 0,027$;

– відносна узгодженість $ВУ = \dfrac{0,027}{0,58} \approx 0,046 = 4,6\%$.

1.2.3 Модель вирішення проблеми

На основі результатів розрахунків, виконаних у п. 1.2.2, розрахуємо вектор узагальнених пріоритетів та за його значеннями зробимо висновок про вибір методу розв’язання задачі оптимального управління інвестиційним портфелем. Результати розрахунків вектору узагальнених пріоритетів наведено у таблиці 1.7.

Аналіз останнього стовпчика таблиці 1.7 свідчить про те, що за обраними вище критеріями кращим для розв’язання поставленої задачі є метод оптимального управління (альтернатива 3).

Таблиця 1.7 – Остаточні розрахунки

Критерій Альтернатива	К1	К2	К3	К4	К5	Узагальнені пріоритети
А1	0,12	0,31	0,52	0,10	0,11	0,23
А2	0,17	0,11	0,12	0,57	0,18	0,31
А3	0,71	0,58	0,36	0,33	0,71	0,46

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Інвестор володіє портфелем цінних паперів. Ціна на цінні папери змінюється з часом, спостереження за поточною ціною здійснюються щоденно. Метою інвестора є підтримка такої структури портфеля, за якої прибутки, що приносять відповідні цінні папери, перебільшуватимуть витрати, пов’язані з утриманням цього портфеля.

Виходячи з наведеної мети інвестор розглядає такі можливі варіанти дій:

1) продати активи, що входять до складу портфеля, – у цьому випадку інвестор отримає у якості остаточного прибутку поточну ринкову вартість цінних паперів, що входять у портфель, і після цього даний портфель більше не розглядається;

2) продовжити утримання активів, що входять до складу портфеля, – у цьому випадку інвестор виплачує комісію за обслуговування портфеля і залишає цінні папери, сподіваючись на збільшення їх вартості у майбутньому.

Необхідно розробити таку стратегію управління портфелем, щоб максимізувати прибутки, пов’язані з ним, у короткотривалій та довготривалій перспективі за рахунок вибору оптимального моменту часу для ухвалення рішення про продаж цього портфеля. Для цього інвестор у кожен момент часу повинен обирати одне з наведених рішень: продати портфель, отримавши прибуток від його реалізації, або продовжити інвестиції, сплативши за це певну комісію, та сподіваючись продати активи у майбутньому у більш вигідних умовах.

Рішення про необхідність продажу фінансового активу у даний момент часу, інвестор може обирати, виходячи з наступних міркувань:

– ціна досягла цільового рівня: за таких умов інвестор забезпечує певний рівень доходу від активу;

– ціна впала нижче певного порогового значення: за таких умов інвестор забезпечує мінімізацію витрат, пов'язаних з володінням даним активом.

1.3.2 Формальна постановка задачі

Задача пошуку оптимальних стратегій управління портфелем цінних паперів з математичної точки зору може бути подана як задача оптимального стохастичного управління марковським процесом.

Ціна на цінні папери, що входять до портфеля, змінюються з часом і відслідковуються через рівні проміжки часу. За таких умов еволюція ціни портфеля може бути описана за допомогою марковського процесу з дискретними станами та дискретним часом, тобто за допомогою дискретного марковського ланцюга. Розіб'ємо весь діапазон можливих значень ціни на m проміжків. Тоді кожен стан ланцюга S_i, $i = 1, 2, ..., m$, відповідає ситуації, коли ціна портфеля потрапляє у i-й проміжок. Множина можливих станів процесу еволюції ціни має вигляд $\{S_i\}_{i=1}^{m}$, де m – кількість станів (скінченна). Значення S_i будуються на основі історичних даних $\{d_k\}_{k=1}^{T}$ про щоденну ціну портфеля d_k протягом визначеного періоду часу T.

Імовірність переходу із стану i у стан j за один крок позначається p_{ij}, $i, j = 1, 2, ..., m$. Вважатимемо, що ці ймовірності не залежать від часу, тобто процес переходів є однорідним. Матриця перехідних ймовірностей $P = [p_{ij}]_{i,j=1}^{m}$ визначає переходи між можливими станами за один крок.

Множина можливих рішень, які може обирати інвестор у даній задачі, має вигляд: $G = \{X_0, X_1\}$, де:

– X_0 – рішення про реалізацію цінних паперів, що входять до портфеля;

– X_1 – рішення про продовження утримання активів, що входять у портфель.

Кожне з цих рішень приносить інвестору певний дохід або витрати.

Якщо система перебуває у стані S_i, $i = 1, 2, ..., m$, то величина R_i визначає дохід, який інвестор отримає від продажу цінних паперів за поточними цінами, якщо буде ухвалене рішення про продаж активів, а величина C_i показує комісійні витрати, які понесе інвестор, якщо продовжить утримувати портфель з перспективою його більш вигідного продажу у майбутньому.

Задача полягає у побудові стратегії управління інвестиційним портфелем, яка передбачає або продовження володіння цінними паперами, що його складають, або їх продаж, таким чином, щоб максимізувати свої прибутки у короткотривалій або довготривалій перспективі. Рекомендації щодо продажу або утримання активів інвестор повинен мати на кожному етапі (наприклад, щодня), виходячи з поточної ціни на активи. Послідовність таких рішень протягом визначеного у задачі інтервалу часу в залежності від поточної вартості портфеля називатимемо стратегією управління. Оптимальна стратегія управління на основі інформації про динаміку цін дозволяє визначити момент часу, який є оптимальним для продажу активів, що складають портфель.

Сформульована задача – це задача про оптимальну зупинку, що є окремим випадком задачі оптимального управління марковським процесом з дискретним часом та дискретною кількістю станів. Позначимо N – горизонт рішень, тобто кількість етапів (днів), протягом яких розглядається управління портфелем, $N < \infty$. Якщо через $f_i(j)$ позначити оптимальний очікуваний дохід, який система приносить за всі етапи, починаючи з i-го, за умови, що на початку i-го етапу вона перебувала у стані S_j, то оптимальна стратегія управління портфелем цінних паперів може бути визначена за допомогою рекурентного співвідношення методу динамічного програмування:

$$f_i(j) = \max_{X_i \in G} \left\{ R_j;\ \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(X_i) f_{i+1}(k) - C_j \right\},\ j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,N},$$

$$f_{N+1}(j) \equiv R_j,\ j = \overline{1,m}. \tag{1.1}$$

Крайова умова (1.1) означає, що по завершенні періоду N портфель буде розформований, а цінні папери, що входять до його складу, реалізовані, тобто у момент часу $N+1$ матиме місце прибуток R_j, який залежатиме від поточної ціни на момент закінчення N-го періоду, за якою будуть реалізовані цінні папери.

За таких умов для кожного етапу $i = \overline{1,N}$ та для кожного стану ціни $j = \overline{1,m}$ необхідно визначити, яке рішення інвестора буде кращим з точки зору очікуваного прибутку:

– X_0 – рішення про реалізацію цінних паперів, що входять до портфеля;

– X_1 – рішення про продовження утримання активів, що входять у портфель.

1.4 Постановка задач дослідження

Метою кваліфікаційної роботи є побудова стратегій управління інвестиційним портфелем, які допоможуть приймати обґрунтовані рішення щодо доцільності утримання цього портфеля з урахуванням факторів невизначеності, таких як коливання цін та нестача точної інформації про майбутні доходи. З математичної точки зору задача пошуку оптимальних стратегій зводиться до розв'язання задачі оптимального управління, зокрема, її окремого випадку – задачі про оптимальну зупинку.

Основними завданнями, які необхідно вирішити для виконання поставленої задачі, є наступні:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі оптимального управління інвестиційним портфелем в умовах невизначеності;

– розглянути методи оптимального управління та теорії прийняття рішень, які можуть бути застосовані для розв'язання задачі оптимального управління інвестиційним портфелем в умовах невизначеності, та обрати той метод, що найбільш підходить для розв'язання поставленої задачі;

– зібрати статистичні дані про ціни на цінні папери, необхідні для розв'язання задачі пошуку оптимальних стратегій у задачі управління інвестиційним портфелем;

– побудувати математичну модель задачі оптимального управління інвестиційним портфелем та розв'язати поставлену задачу обраним методом;

– розробити програмний продукт, який дозволить автоматизувати процес знаходження оптимальних стратегій управління інвестиційним портфелем за умов невизначеності зовнішніх факторів;

– виконати обчислювальні експерименти на основі історичних даних цін та проаналізувати отримані результати.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Ланцюги Маркова

Розглянемо випадковий процес з дискретним часом $\{Y_k\}$, такий що кожна з випадкових величин Y_k, $k=0,1,...$, набуває деяке значення з дискретної множини $S=\{s_1, s_2, ..., s_m\}$, де елементи s_i визначають можливі стани процесу. Моменти часу, у які система може змінювати свій стан, називаються кроками або етапами процесу [5, 6].

Випадковий процес $\{Y_k\}$ називається дискретним ланцюгом Маркова, якщо виконується марковська властивість, тобто для будь-яких значень із множини W і кожного $k \geq 1$ має місце рівність:

$$P(Y_k = s_{i_k} \mid Y_{k-1} = s_{i_{k-1}}, ..., Y_0 = s_{i_0}) = P(Y_k = s_{i_k} \mid Y_{k-1} = s_{i_{k-1}}).$$

Перебування системи у стані $s_i \in S$ у момент часу $k \geq 0$ означає, що відбулась подія $Y_k = s_i$, яку скорочено позначатимемо далі s_i^k. Ймовірність цієї події дорівнює $p_i(k) = P\left(Y_k = s_i\right)$, причому $p_i(k) \geq 0$ та очевидно, що сума ймовірностей $p_i(k)$ при будь-якому фіксованому $k \geq 0$ дорівнює 1. Вектор $\vec{p}(k) = \left(p_1(k), p_2(k), ..., p_i(k), ...\right)^T$ представляє собою вектор ймовірностей станів ланцюга Маркова в момент $k > 0$. Якщо ж $k = 0$, то маємо вектор початкових ймовірностей станів [5, 6].

Якщо система на k-му кроці змінила свій стан, перейшовши зі стану $s_i \in S$ у стан $s_j \in S$, то це відповідає настанню подій $Y_{k-1} = s_i$ та $Y_k = s_j$, $k \geq 1$. Ймовірність такого переходу дорівнює $p_{ij}(k) = P(Y_k = s_j \mid Y_{k-1} = s_i)$, причому $p_{ij}(k) \geq 0$.

Для кожного фіксованого моменту часу $k \geq 1$ ймовірності $p_{ij}(k)$ утворюють матрицю однокрокових перехідних ймовірностей $P(k)=\left[p_{ij}(k)\right]$, для якої сума всіх значень $p_{ij}(k)$ при будь-якому фіксованому i повинна дорівнювати 1.

Якщо матриця перехідних ймовірностей $P(k)$ не змінюється з часом, тобто $P(k)=P$, то відповідний ланцюг Маркова називається однорідним.

З використанням матриці перехідних ймовірностей $P(k)$ можна визначити ймовірності станів на будь-якому кроці k за формулою

$$\vec{p}(k)=(P(k))^T\,\vec{p}(k-1) \text{ при } k\geq 1.$$

З цього випливає, що

$$\vec{p}(k)=\left(P(1)P(2)...P(k)\right)^T\,\vec{p}(0),$$

тобто стан системи у будь-який момент часу k визначається її початковим станом та ймовірностями переходів між станами на кожному кроці.

Очевидно, що для однорідного ланцюга Маркова останнє співвідношення має більш простий вигляд:

$$\vec{p}(k)=(P^k)^T\,\vec{p}(0).$$

З точки зору практики представляє інтерес дослідження умов, за яких поведінка системи з часом стабілізується. Так, для однорідних ланцюгів Маркова за виконання певних умов ймовірності станів $p_i(k)$ практично перестають змінюватися при необмеженому зростанні k, тобто $p_i(k)\to\pi_i$, $i=1,2,...,m$ при $k\to\infty$, причому значення π_i не залежать від початкового розподілу $p_i(0)$, $i=1,2,...,m$, і визначаються лише матрицею перехідних ймовірностей P.

Вектор $\vec{\pi}=\left(\pi_1,\pi_2,...,\pi_m\right)^T$ називається вектором граничного розподілу ймовірностей станів ланцюга Маркова. Якщо такий вектор існує, то відповідна система з часом переходить у стаціонарний режим функціонування, тобто її стани продовжують змінюватись випадковим чином, як і раніше, але ймовірність кожного стану перестає залежати від часу і стає постійною [3].

Відповідь на питання, за яких умов існує вектор граничних ймовірностей, дається у наступній теоремі. Для її формулювання зробимо декілька пояснень.

Ланцюг Маркова називається нерозкладним, якщо всі його стани – суттєві та сполучені, тобто ймовірність повернення будь-коли у кожен стан, при виході з нього у минулому, дорівнює 1 при будь-якому початковому стані (суттєвість) та для будь якої пари станів кожен з них є досяжним з іншого з ненульовою ймовірністю (сполученість). Якщо ж у нерозкладному ланцюгу Маркова всі стани – аперіодичні, тобто ланцюг може повертатися в будь-який стан через довільну кількість кроків (починаючи з деякого моменту), а не лише через фіксоване кратне якомусь значенню число кроків, то такий ланцюг називається аперіодичним [5, 7].

Теорема. Нехай однорідний ланцюг Маркова з матрицею перехідних ймовірностей P є нерозкладним та аперіодичним і знайдеться такий стан $s_k \in S$, що час першого повернення у нього є дискретною випадковою величиною τ_k:

$$P(\tau_k = l \mid Y_0 = s_k) = f_k(l),\; l = 1, 2, \ldots,$$

зі скінченним математичним сподіванням $M\left(\tau_k \mid Y_0 = s_k\right) = \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot f_k(l) < \infty$. Виконання цих умов необхідно і достатньо для існування для будь-яких $i, j = 1, 2, \ldots$ незалежних від i границь:

$$p_{ij}^{(l)} \to p_j^* > 0 \text{ при } l \to \infty. \qquad (2.1)$$

Значення $\{p_j^*\}$ можуть бути визначені як єдиний розв'язок системи рівнянь

$$p_j = \sum_{k=1} p_{kj} p_k \,, \; j = 0,1,... \qquad (2.2)$$

$$\sum_{j=1} p_j = 1 \,. \qquad (2.3)$$

Ланцюг Маркова, що задовольняє умови (2.1) – (2.3), називається ергодичним, а розподіл ймовірностей $\vec{p}^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)^T$ називається стаціонарним розподілом ланцюга Маркова.

Для ергодичного ланцюга Маркова граничний розподіл $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, ...)^T$ існує, єдиний, є стаціонарним та задовольняє систему рівнянь

$$\vec{\pi} = P^T \vec{\pi} \,,$$

$$\sum_{j=1} \pi_j = 1 \,.$$

2.2 Ланцюги Маркова з доходами

Змінення станів марковської системи відбувається відповідно до її внутрішніх властивостей і, як було зазначено вище, у будь-який момент часу k повністю визначається початковими ймовірностями $p_i(0)$, $i = 1, 2, ..., m$, та матрицями перехідних ймовірностей $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k)$. Ймовірності переходів системи у будь-який момент часу визначаються станом, досягнутим у попередній момент часу, і не залежать від того, коли і як система потрапила у цей попередній стан [8, 9]. Стани системи s_i далі будемо позначати їх номером i, $i = 1, 2, ..., m$.

Дослідник може впливати на еволюцію системи шляхом тих чи інших своїх дій. Можливі дії дослідника позначатимемо літерою X_i і будемо називати їх рішеннями або управліннями. Будемо вважати, що дослідник може застосувати одну з M різних дій, тобто множина можливих дій має вигляд $G=\{X_1, X_2, ..., X_M\}$ і кожна дія веде до різних наслідків (фінансових або інших, пов'язаних з роботою системи) і певним чином впливає на поведінку системи. За таких умов перехідні ймовірності залежатимуть від того, яке саме рішення обрав дослідник.

Позначимо через $p_{ij}(k \mid X_{l_{k-1}}) = P(s_j^k \mid s_i^{k-1}; X_{l_{k-1}})$ ймовірність того, що система на k-му кроці перейде зі стану i у стан j за умови, що на початку цього кроку було прийняте рішення $X_{l_{k-1}}$, $l_{k-1} \in \{1, 2, ..., M\}$. За таких умов матриця перехідних ймовірностей на k-му кроці буде залежати від того, яке саме рішення було обране на початку цього кроку, тобто:

$$P(k \mid X_{l_{k-1}}) = \left[p_{ij}(k \mid X_{l_{k-1}}) \right],$$

де, як і раніше, $\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(k \mid X_{l_{k-1}}) = 1$ для будь-якого i.

За таких умов ймовірність перебування системи у будь-якому стані після k кроків визначається за формулою:

$$\vec{p}(k) = P^T(k \mid X_{l_{k-1}}) \vec{p}(k-1).$$

Вважатимемо, що при переході системи із стану у стан за k-й етап під дією рішення $X_{l_{k-1}}$ вона приносить досліднику дохід розміром $r_{ij}(k \mid X_{l_{k-1}})$. Однокрокові доходи, визначені для всіх можливих станів при використанні рішення $X_{l_{k-1}}$, можна записати у вигляді матриці:

$$R(k \mid X_{l_{k-1}}) = \left[r_{ij}(k \mid X_{l_{k-1}}) \right],$$

яка називається матрицею однокрокових доходів для рішення $X_{l_{k-1}} \in G$.

Узагальнюючи доходи, які система приносить за один крок, приходимо до співвідношення

$$\nu_i(X_{l_{k-1}}) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(k \mid X_{l_{k-1}}) \cdot r_{ij}(k \mid X_{l_{k-1}}),$$

яке визначає очікуваний дохід за k-й етап, за умови, що на початку цього етапу система перебувала в i-му стані та було прийняте рішення $X_{l_{k-1}}$.

За таких умов управління ланцюгом Маркова повинно передбачати вибір на кожному етапі тих рішень, які у сукупності по всім етапам забезпечать максимізацію очікуваного доходу, що принесе система за весь час дослідження.

Кількість етапів, протягом яких будемо досліджувати управління системою, позначимо N і називатимемо горизонтом планування.

2.3 Оптимальне управління ланцюгами Маркова з доходами

2.3.1 Оптимальне управління на скінченному горизонті планування

Якщо горизонт планування N, на якому необхідно визначити стратегію управління, є скінченним, то задача оптимального управління ланцюгом Маркова виходячи з максимізації очікуваного доходу за N етапів, може бути розв’язана методом динамічного програмування [8, 10]. Ідея методу динамічного програмування полягає у розбиття складної задачі на набір простіших підзадач, розв’язок яких використовуються для побудови розв'язання загальної задачі.

Рекурентне рівняння методу динамічного програмування для кожного фіксованого стану i, $i = 1, 2, ..., m$, має вигляд:

$$f_k(i) = \max_{X_{l_{k-1}} \in G} \left\{ \nu_i(X_{l_{k-1}}) + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(k \mid X_{l_{k-1}}) f_{k+1}(j) \right\},\ k = 1, 2, ..., N, \tag{2.4}$$

за умови

$$f_{N+1}(j) \equiv 0,\ j = 1, 2, ..., m. \tag{2.5}$$

Тут $f_k(i)$ – майбутній оптимальний очікуваний дохід від функціонування системи, починаючи з k-го етапу, за умови, що на початку цього етапу вона перебувала у стані i, $i = 1, 2, ..., m$. Очевидно, що після завершення горизонту планування система перестає приносити доходи, отже, має місце умова (2.5).

Послідовне розв'язання задач максимізації (2.4) з граничними умовами (2.5) при $k = N, N-1, ..., 1$, дає можливість визначити оптимальні рішення для кожного етапу, починаючи з останнього.

2.3.2 Оптимальне управління на нескінченному горизонті планування

Якщо кількість етапів N дуже велика, то за виконання певних умов система з часом перейде у стаціонарний режим, тобто її поведінка не залежатиме від початкового стану. Час до настання стаціонарного режиму називається перехідним періодом. Оптимальні управління системою на нескінченному горизонті планування визначають у так званих стаціонарних стратегіях, коли оптимальне рішення залежить лише від стану системи, але не залежить від того, на якому етапі система потрапила у цей стан [8, 10].

Для пошуку оптимальних управлінь на нескінченному горизонті використовують спеціальні методи. Одним з ефективних методів пошуку оптимальних стаціонарних стратегій управління однорідним марковським ланцюгом з доходами на нескінченному горизонті планування є метод ітерацій за стратегіями. Відповідно до цього методу обирають одну із можливих стаціонарних стратегій як початкове наближення до оптимальної і намагаються її покращити з точки зору доходів, що дослідник буде отримувати.

Розв’язання задачі прийняття рішень за допомогою цього методу відбувається ітераційно, і кожна ітерація складається з двох етапів. На першому етапі оцінюються параметри обраної стратегії, на другому етапі обрану стратегію намагаються покращити з урахуванням функції доходів. Ітераційна процедура закінчується тоді, коли стаціонарні стратегії, обрані на двох послідовних ітераціях, не відрізняються одна від одної.

2.4 Задача про оптимальну зупинку як задача оптимального управління

2.4.1 Постановка задачі про оптимальну зупинку

Задача про оптимальну зупинку є окремим випадком задачі управління ланцюгами Маркова з доходами і відповідає ситуації, коли можливі рішення, які можуть бути застосовані до розглядуваного процесу, мають певні особливості. У цій задачі мета полягає у виборі оптимального моменту часу для припинення процесу з метою максимізації очікуваного прибутку або мінімізації витрат [12, 13].

Особливості задачі про оптимальну зупинку порівняно з загальним випадком наступні. Процес описується множиною станів, між якими система здійснює переходи з часом у результаті певних подій. Імовірність переходу до наступного стану, як і раніше, залежить лише від поточного стану та обраного рішення. Метою розв’язання задачі є пошук такого моменту зупинки, який оптимізує очікувану цінність, що приносить система. При цьому необхідно враховувати витрати на продовження процесу, якщо зупинка відкладається. Отже, на кожному етапі пошук управління зводиться до вибору: продовжити процес або зупинити його, залежно від того, у якому стані перебуває система на цьому етапі, і який дохід при цьому вона принесе.

Розглянемо процес розв’язання задачі про оптимальну зупинку біль детально. Ймовірність того, що система на k-му кроці перейде зі стану i у стан j подаються у вигляді матриці перехідних ймовірностей $P(k)=\left[p_{ij}(k)\right]$, для якої $\sum_{j=1}^{m} p_{ij}(k)=1$ для будь-якого i.

Дослідник на кожному етапі обирає одне з двох можливих рішень:

– рішення X_0 зупинити систему назавжди;

– рішення X_1 дозволити системі функціонувати далі.

У випадку прийняття на k-му етапі у стані i-му рішення X_0 про зупинку дослідник одержує дохід R_i. Якщо ж у i-му стані дослідник обирає рішення X_1 про продовження руху системи, то за це він повинен сплатити певну суму (штраф) C_i. Рішення про продовження руху пов’язане з тим, що дослідник очікує у майбутньому зупинити систему у іншому стані l, з яким пов’язаний більший дохід від зупинки R_l.

Як і у випадку загальної постановки задачі про управління ланцюгами Маркова з доходами, для задачі про оптимальну зупинку можна розглядати пошук оптимальних стратегій на скінченному та нескінченному горизонті планування, тобто коли кількість етапів є скінченною або необмежено великою.

2.4.2 Оптимальне управління у задачі про оптимальну зупинку на скінченному горизонті планування

Для визначення оптимального управління на скінченному горизонті планування може бути використаний метод динамічного програмування, який визначається рекурентним співвідношенням (2.4) з граничними умовами (2.5) [12]. У задачі про оптимальну зупинку рекурентне співвідношення (2.4) для кожного стану i, $i = 1, 2, ..., m$, може бути переписано у вигляді:

$$f_k(i) = \max_{X_{l_{k-1}} = \{X_0, X_1\}} \left\{ R_i; \ -C_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(k) \cdot f_{k+1}(j) \right\}, \ k = 1, 2, ..., N, \tag{2.6}$$

$$f_{N+1}(j) \equiv R_j, \ j = 1, 2, ..., m. \tag{2.7}$$

У співвідношенні (2.6) перше значення у фігурних дужках відповідає рішенню $X_{l_{k-1}} = X_0$ (тобто це дохід від зупинки процесу), а друге – рішенню $X_{l_{k-1}} = X_1$ (це дохід від продовження руху системи). Гранична умова (2.7) означає, що після закінчення досліджень дослідник все одно отримає дохід у сумі R_j, яка визначається тим станом j, у якому система завершить свій рух.

Особливості постановки задачі про оптимальну зупинку дозволяють інакше записувати стратегії управління, порівняно із загальним випадком. Оскільки на кожному етапі можливо тільки два рішення, і вибір одного з них визначається станом, у якому перебуває система на цьому етапі, то всю множину станів системи $S = \{1, 2, ..., m\}$ можна на кожному етапі розбити на дві підмножини: $S_0(k)$ та $S_1(k)$, де $S_0(k)$ – підмножина тих станів системи, у яких її роботу вигідніше зупинити на i-му етапі, а $S_1(k)$ – підмножина тих станів, у яких на k-му етапі роботу системи вигідніше продовжити. Очевидно, що $S = S_0(k) \bigcup S_1(k)$ для будь-якого $k \geq 1$.

Таким чином, при розв'язанні задачі про оптимальну зупинку потрібно відшукати таке розбиття множини S, що забезпечуватиме максимальне значення очікуваних доходів, які отримає дослідник від своїх рішень. Виходячи з вигляду співвідношення (2.6) можна зробити висновок, що при $R_i \geq -C_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(k) \cdot f_{k+1}(j)$ оптимальним буде віднесення стану i на k-му етапі до класу зупинки $S_0(k)$, а при $R_i < -C_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(k) \cdot f_{k+1}(j)$ – до класу продовження руху $S_1(k)$.

Застосування співвідношень методу динамічного програмування (2.6), (2.7) може бути частково спрощене за рахунок використання на кожному етапі для розподілу станів по підмножинам $S_0(k)$ та $S_1(k)$ таких властивостей:

– якщо система завершила рух, то будь-який стан i буде станом вимушеної зупинки;

– якщо i – поглинаючий стан, то він буде станом зупинки на будь-якому етапі $k \le N$;

– $R_i = f_{N+1}(i) \le f_N(i) \le f_{N-1}(i) \le \ldots \le f_i(i) \le \ldots$ для кожного i-го стану;

– у кожному i-му стані на кожному етапі $k \le N$ очікуваний дохід $f_k(i)$ обмежений:

$$\min_{j \in \{1,2,\ldots,m\}} R_j \le f_k(i) \le \max_{j \in \{1,2,\ldots,m\}} R_j ;$$

– якщо у i-му стані $R_i = \max\limits_{j \in \{1,2,\ldots,m\}} R_j$, то $f_k(i) = R_i$ на кожному етапі $k \le N$, тобто i-й стан буде станом зупинки;

– якщо у i-му стані $-C_i + \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}(k) \cdot R_j > R_i$, то $-C_i + \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}(k) \cdot f_{k+1}(j) > R_i$ для всіх етапів $k \le N$, тобто i-й стан є станом продовження руху;

– оптимальні множини станів продовження руху $S_1^*(k)$ мають властивість монотонності: $\varnothing = S_1^*(N+1) \subseteq S_1^*(N) \subseteq \ldots \subseteq S_1^*(k) \subseteq \ldots$, отже, якщо i-й стан є станом продовження руху на k-му етапі, то він буде станом продовження руху і на попередньому $(k-1)$-му етапі;

– послідовність оптимальних значень очікуваних доходів має скінченну границю $f^*(i) = \lim\limits_{k \to \infty} f_k(i)$, яка називається граничним доходом.

Для станів, які не вдалось класифікувати за наведеними властивостями, оптимальне управління визначається із загальних співвідношень (2.6) – (2.7) методу динамічного програмування.

2.4.3 Оптимальне управління у задачі про оптимальну зупинку на нескінченному горизонті планування

Далі розглянемо метод пошуку оптимального управління у задачі про оптимальну зупинку на нескінченному горизонті планування. Як було зазначено вище, у цьому випадку оптимальне управління шукають у стаціонарних стратегіях, коли рішення залежить лише від поточного стану системи і не залежить від етапу, на якому воно застосовується. Для задачі про оптимальну зупинку це означає, що потрібно знайти єдине оптимальне розбиття всієї множини станів S на дві підмножини S_0 та S_1, перша з яких – це підмножина тих станів, у яких рух системи слід зупинити, а друга – у яких рух слід продовжити, незалежно від етапу, на якому буде застосовуватись це рішення [12, 13].

Оптимальне розбиття множини станів на підмножини S_0 та S_1 визначається за допомогою ітераційної процедури, аналогічної процедурі методу ітерацій за стратегіями у задачі оптимального управління марковськими ланцюгами загального вигляду. Перед початком ітерацій необхідно задати довільне початкове розбиття станів системи на підмножини S_0 та S_1. Ітераційна процедура пошуку оптимального розбиття передбачає виконання двох етапів на кожній ітерації.

Етап оцінювання обраного управління. На цьому етапі оцінюють параметри поточної стратегії управління. Для цього для поточного розбиття станів на підмножини S_0, S_1 необхідно скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(i) = F_i, & i \in S_0, \\ f(i) = \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot f(j) - C_i, & j \in S_1, \end{cases}$$

та розв’язати її відносно невідомих значень граничних доходів $f(i)$, $i = 1, 2, ..., m$.

Етап поліпшення стратегії управління. На цьому етапі перевіряють оптимальність поточної стратегії S_0, S_1. Для цього для кожного i-го стану необхідно обчислити значення $-C_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot f(j)$ із використанням знайдених $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(m)$ та порівняти результат з R_i:

– якщо $-C_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot f(j) \le R_j$, то i-й стан слід віднести до множини станів зупинки $\tilde{S}_0$;

– якщо $-C_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \cdot f(j) > R_j$, то i-й стан слід віднести до множини станів продовження руху $\tilde{S}_1$.

Після виконання розрахунків у всіх станах необхідно порівняти отримане розбиття $\tilde{S}_0$, $\tilde{S}_1$ з тим, що було використано на початку поточної ітерації: S_0, S_1. Якщо вони співпадають, тобто $S_0 = \tilde{S}_0$ та $S_1 = \tilde{S}_1$, то стратегія S_0, S_1 є оптимальною, і ітераційна процедура завершується. У протилежному випадку необхідно повернутись до етапу оцінювання управління, використовуючи у якості поточної стратегії нове розбиття $\tilde{S}_0$, $\tilde{S}_1$.

2.5 Розв’язання задачі оптимального управління інвестиційним портфелем

2.5.1 Математична модель динаміки цін на фінансові активи

У якості математичної моделі, що описує динаміку цін з часом, використовуватимемо дискретний марковський ланцюг, у якому можливими станами будуть значення ціни на актив, а матриця перехідних ймовірностей визначатиме можливість переходу від одного стану до іншого у заданий момент часу. Та-ка модель дозволить прогнозувати зміни стану системи (значення ціни) у будь-який момент часу в майбутньому на основі початкового стану системи та матриці перехідних ймовірностей між станами за один крок [15, 16].

Вважатимемо, що характер переходів між станами (тобто між значеннями ціни у дискретні моменти часу) задовольняє наступні умови:

– ситуація на фінансовому ринку залежить лише від глобальних та регіональних економічних, політичних та соціальних факторів та від політики у фінансовій сфері;

– поведінка ціни у кожен момент часу залежить лише від того, якою ціна була у попередній момент спостережень та не залежить від спостережень у минулі періоди;

– ймовірність переходу ціни з одного стану у інший за один проміжок часу дослідження часу не залежить від моменту спостережень, тобто процес є однорідним.

Розглянемо побудову марковської моделі, що описує динаміку змінення цін на активи, які утворюють інвестиційний портфель. Позначимо через d_k ціну фінансового активу, яка мала місце у дискретний момент часу k, $k \geq 0$ (наприклад, раз на день). Даними для досліджень буде набір цін $\{d_k\}_{k=1}^{T}$ протягом заданого минулого періоду. Тут T – загальна кількість спостережень за ціною.

Розіб'ємо весь діапазон можливих значень ціни значеннями a_i, $i = 0, 2, ..., m-1$, на m проміжків, де $a_0 = \min d_k$, $a_m = \max d_k$, і під станом S_i, $i = 1, 2, ..., m$, розумітимемо ситуацію, у якій ціна активу знаходиться у межах i-го проміжку. Кількість станів m може бути визначена виходячи з набору історичних даних значень ціни $\{d_k\}_{k=1}^{T}$ та цілей дослідника.

Порахуємо частоти n_i влучення цін із множини $\{d_k\}_{k=1}^{T}$ у проміжки S_i, $i = 1, 2, ..., m$. Ймовірності кожного стану оцінюються за формулою.

$$p_i = \frac{n_i}{T}, \; i = 1, 2, ..., m,$$

де $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$.

Обчислимо кількість моментів спостережень n_{ij}, у які ціна d_k у момент часу k відповідала проміжку S_i, а у наступний момент часу $k+1$ потрапила до проміжку S_j. Ймовірність переходу із стану i у стан j за один крок оцінюється за формулою:

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i},\ i, j = 1, 2, ..., m,$$

де $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$ для всіх $i = 1, 2, ..., m$.

Ці значення утворюють матрицю перехідних ймовірностей P, яка описує ймовірнісну картину змінення цін на розглядувані фінансові активи за один крок. Матриця P є однорідною, тобто знайдені ймовірності не залежать від часу. Для більш точного моделювання матрицю P краще розглядати як таку, що залежить від часу, але для отримання прийнятних оцінок ймовірностей при цьому знадобиться значно більша кількість спостережень.

Використання рекурентних співвідношень для ланцюгів Маркова дозволяє прогнозувати ймовірності цін у кожен наступний момент часу за відомими ймовірностями цін $\vec{p}(k)$ у поточний момент часу:

$$\vec{p}(k+1) = P^T \vec{p}(k) \text{ при } k \geq 1,$$

а також у будь-який майбутній момент часу за відомими ймовірностями цін $\vec{p}(0)$ у початковий момент часу:

$$\vec{p}(k) = (P^k)^T \vec{p}(0).$$

Якщо виконуються умови існування стаціонарного режиму для ланцюга Маркова, який ми розглядаємо, то ймовірності станів $p_i(k)$ поступово наближатимуться до деяких граничних значень π_i, $i = 1, 2, ..., m$, демонструючи стабілізацію процесу змінення ціни. Для визначення граничних ймовірностей слід розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\vec{\pi} = P^T \vec{\pi},$$

за умови $\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1$.

2.5.2 Задача оптимального управління інвестиційним портфелем як задача про оптимальну зупинку

Перейдемо до визначення оптимальних стратегій управління інвестиційним портфелем, що складається з фінансових активів певного типу. Метою інвестора у кожен момент часу є прийняття рішення про те, чи продовжувати тримати цінні папери, чи відмовитись від подальшого володіння портфелем та реалізувати їх. Отже, множина рішень, які може обирати інвестор на кожному кроці має вигляд: $G = \{X_0, X_1\}$, де:

– рішення X_0 означає ліквідацію портфеля за рахунок продажу у момент часу k цінних паперів, що входять до цього портфеля;

– рішення X_1 означає продовження у момент часу k утримання активів, що входять у портфель.

Прибутком від зупинки буде фіксована вартість портфеля в момент ухвалення рішення про продаж активів. Отже, якщо система перебуває у стані S_i, $i = 1, 2, ..., m$, то величина R_i визначає дохід, який інвестор отримає від продажу цінних паперів за поточними цінами, якщо буде ухвалене рішення про продаж активів.

Якщо інвестор вирішує не зупинятися і продовжує утримувати портфель, то він сплачує за це комісію C_i з перспективою його більш вигідного продажу у майбутньому, але при цьому існує ризик, що вартість може впасти нижче поточного або початкового рівня. Комісійні витрати за утримання портфеля можуть включати:

– комісійні за управління (як фіксована сума чи як відсоток вартості портфеля), тобто плату за послуги агента, який управляє активами або за використання платформи для управління портфелем;

– витрати на обслуговування;

– інфляційні витрати, наприклад коли утримання портфеля призводить до того, що дохідність не перевищує інфляцію;

– втрачена вигода, пов'язана з тим, що кошти могли б бути вкладені в більш прибуткові активи.

Побудова стратегії інвестора полягає у тому, щоб вирішити, у який момент часу найдоцільніше продавати активи, таким чином, щоб максимізувати свої прибутки у короткотривалій або довготривалій перспективі. Виходячи з цього на кожному етапі необхідно визначити для кожного стану системи (тобто для кожного діапазону цін), що краще – продавати активи чи продовжувати утримувати їх. Сформульована задача – це задача про оптимальну зупинку, що є окремим випадком задачі оптимального управління марковським процесом з дискретним часом та дискретною кількістю станів.

Розглянемо ситуацію, коли інвестор не планує утримувати портфель більше ніж N кроків ($N < \infty$). Для знаходження оптимальної стратегії управління активами у цій ситуації можна використати рекурентне співвідношення методу динамічного програмування (2.6) – (2.7):

$$f_k(i) = \max_{X_{l_{k-1}}=\{X_0, X_1\}} \left\{ R_i; \quad -C_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(k) \cdot f_{k+1}(j) \right\}, \; k = 1, 2, ..., N,$$

$$f_{N+1}(j) \equiv R_j, \ j = 1, 2, ..., m,$$

де $f_k(i)$ – оптимальний очікуваний дохід, який інвестор отримає від своїх дій, починаючи з k-го етапу, за умови, що на початку цього етапу ціна на активи відповідала стану S_i, $i = 1, 2, ..., m$. По завершенні періоду N портфель буде розформований у будь-якому випадку, а цінні папери, що входять до його складу, реалізовані, тобто у момент часу $N+1$ інвестор отримає прибуток від продажу R_j, величина якого залежатиме від поточної ціни активів на момент закінчення N-го періоду.

Очевидно, що якщо у i-му стані прибуток R_i буде більше, ніж очікуваний майбутній дохід від продовження інвестицій з урахуванням внесення комісії C_i, то оптимальним рішенням на відповідному кроці буде рішення про продаж портфеля. У іншому випадку інвестору краще обрати рішення продовжувати утримувати цінні папери, що входять до складу портфеля. Отже, на кожному етапі для кожного стану $i = 1, 2, ..., m$ необхідно визначити, яке рішення інвестора буде кращим з точки зору очікуваного прибутку. Розв'язок цієї задачі виглядає як послідовність розбиттів всієї множини станів на підмножини $S_0(k)$ та $S_1(k)$, перша з яких містить ті значення ціни (стани S_i), за яких активи потрібно продавати, а друга – ті значення ціни (стани S_i), за яких активи потрібно утримувати далі.

Якщо інвестор не обмежує час володіння портфелем, тобто $N \to \infty$, то за допомогою ітераційної процедури ми отримаємо єдине оптимальне розбиття множини станів на підмножини S_0 та S_1. У цьому випадку незалежно від того, який крок k розглядається, для тих рівні ціни, що потрапили у підмножину S_0, активи краще продати, а для тих, що потрапили у підмножину S_1 – утримувати далі. Саме такий підхід забезпечить максимізацію середньочікуваного прибутку від володіння портфелем.

Висновки за розділом 2

У даному розділі було розглянуто математичні моделі та методи, які можуть використовуватись для розв'язання задачі пошуку оптимального управління інвестиційним портфелем. Наведено теоретичні питання, пов'язані з використанням ланцюгів Маркова для опису реальних випадкових процесів, для яких виконується марковська властивість. Розглянуто умови існування граничного розподілу ймовірностей для таких процесів.

Основну увагу приділено ситуації, коли досліджувані процеси у ході своєї еволюції приносять доходи, величина яких залежить від того, яким зовнішнім впливам піддаються ці процеси. Такими зовнішніми впливами є дії (або рішення) дослідника. Розглянуто методи пошуку оптимальних рішень (управлінь), тобто таких, що дозволяють отримати оптимальний виграш від експлуатування системи на короткостроковому або довгостроковому проміжку часу.

Окремо розглянуто ситуацію, коли серед можливих рішень дослідник може обирати лише рішення про зупинку еволюції процесу або рішення про продовження цієї еволюції, що з математичної точки зору є задачею про оптимальну зупинку. Розглянуто методи визначення оптимального моменту зупинки системи та наведено властивості оптимальних рішень у цій задачі.

Наприкінці було наведено процедуру побудови математичної моделі, що описує ймовірнісну динаміку цін фінансових активів за історичними даними, та розглянуто застосування методу оптимального управління за зупинкою до розв'язання задачі про оптимальне управління інвестиційним портфелем.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп’ютерної алгебри Mathematica 11.1

Вибір мови програмування для розв’язання складних математичних задач є ключовим аспектом для досягнення ефективних результатів. Одним з найбільш потужних інструментів для таких задач є Wolfram Mathematica, яка поєднує в собі широкі можливості для математичних обчислень, моделювання, оптимізації та візуалізації даних. Цей програмний продукт відомий своєю здатністю обробляти складні задачі та працювати з великими обсягами даних, що робить його ідеальним вибором для фінансових, інженерних та наукових розрахунків.

Однією з основних переваг Wolfram Mathematica є потужні математичні можливості. Mathematica підтримує широкий спектр функцій для символьних обчислень, числових методів, інтегралів, диференціальних рівнянь, лінійної алгебри, статистики та аналізу даних. Цей набір функцій дозволяє працювати з математичними моделями, які зустрічаються в реальному житті, наприклад, при аналізі інвестиційних портфелів або прогнозуванні економічних тенденцій. Вбудовані алгоритми для розв’язування складних рівнянь або побудови статистичних моделей дозволяють знаходити рішення, які часто набагато важче отримати з використанням інших мов програмування. Це значно спрощує процес розв’язування задач, зменшує час на обчислення та дозволяє зосередитися на аналізі результатів.

Окрім математичних можливостей, Wolfram Mathematica має потужні інструменти для візуалізації даних. У світі фінансів та інвестицій, де важливо візуалізувати дані для їх подальшого аналізу, здатність Mathematica створювати чіткі й зрозумілі графіки є незаперечною перевагою. Програмне забезпечення дозволяє створювати як статичні, так і динамічні графічні представлення даних, що значно полегшує процес сприйняття інформації. Наприклад, графіки ефективності інвестиційних портфелів можуть відображати змінення ціни активів, а також порівняння ризиків і доходностей різних стратегій. Mathematica також підтримує інтерактивні візуалізації, що дозволяють користувачам досліджувати дані в режимі реального часу, змінюючи параметри моделі і спостерігаючи за їх впливом на результати.

Ще однією важливою особливістю Wolfram Mathematica є її гнучкість і можливість інтеграції з іншими програмними системами. Це дає змогу використовувати Mathematica як основу для розробки складних програмних рішень у різних сферах діяльності, зокрема, таких як автоматизація торгових стратегій на фінансових ринках або створення комплексних аналітичних систем для роботи з великими даними. Завдяки підтримці різноманітних форматів файлів та можливості підключення сторонніх бібліотек або API, Mathematica дозволяє створювати інтегровані рішення, що працюють на різних платформах. Наприклад, можна розробити систему для автоматичної оцінки ризиків і доходностей інвестиційних портфелів, яка буде підключена до фінансових баз даних, і оновлювати свої прогнози в реальному часі.

Однією з найбільш важливих для інвестиційного аналізу особливостей Wolfram Mathematica є наявність вбудованих алгоритмів оптимізації. Вони дозволяють розв’язувати задачі, пов’язані з максимізацією прибутку або мінімізацією ризиків при управлінні портфелем цінних паперів. Для багатьох фінансових завдань, таких як оптимізація портфеля активів або вибір найбільш вигідної стратегії інвестування, Mathematica надає потужні методи числової оптимізації, що можуть працювати з великими наборами даних і враховувати різні обмеження, такі як мінімальний рівень прибутку або максимальний рівень ризику. Завдяки цьому, можна розробляти моделі, які дозволяють виробляти найкращі рішення для будь-якої фінансової ситуації.

Завдяки своїй інтуїтивно зрозумілій мові програмування та великій кількості документації Wolfram Mathematica доступний не тільки для професіоналів, але й для новачків. Користувачі можуть легко освоїти базові функції програмування та поступово переходити до більш складних завдань. Розробники також можуть створювати власні пакети та функції, що дозволяє адаптувати Wolfram Mathematica під специфічні вимоги будь-якого проекту.

Крім того, Wolfram Mathematica активно використовується в наукових дослідженнях та для розв'язання практичних задач, що підтверджує її високу надійність і потужність у розв'язанні складних завдань. Завдяки багаторічному розвитку та постійному вдосконаленню, цей інструмент залишається одним з найбільш ефективних для математичних обчислень і моделювання в різних сферах, від науки до бізнесу.

Таким чином, вибір Wolfram Mathematica для вирішення складних математичних задач, таких як оптимізація інвестиційних портфелів або розробка фінансових моделей, є оптимальним з точки зору зручності, гнучкості та потужності інструментів. Завдяки своїм можливостям для інтеграції, оптимізації та візуалізації даних, Mathematica стає незамінним інструментом для професіоналів у галузі фінансів, економіки та науки, забезпечуючи високий рівень точності і ефективності у вирішенні навіть найскладніших задач.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі оптимального управління інвестиційним портфелем

Для розв'язання задачі оптимального управління інвестиційним портфелем як задачі про оптимальну зупинку необхідно реалізувати декілька ключових етапів програмної обробки. Вони включають моделювання системи, аналіз даних та застосування алгоритмів оптимального управління. Програмна реалізація вимагає поєднання методів збору та попередньої обробки даних, засобів візуалізації даних, методів статистичної обробки та методів оптимального управління.

Виходячи з вищесказаного сформулюємо основні етапи, які необхідно виконати для розв'язання поставленої задачі.

Етап 1. Збір та підготовка даних. Підготовчим етапом до проведення розрахунків є збір даних та подання їх у вигляді, придатному для подальшого використання. На цьому етапі необхідно виконати наступні дії:

– завантажити історичні дані про ціни фінансових активів;

– за необхідності відобразити дані у вигляді часового ряду для візуального аналізу;

– перевірити на предмет пропущених або некоректних значень і, за наявності таких, видалити або замінити їх;

– зберегти оброблені дані у вигляді, придатному для подальшого використання.

Етап 2. Побудова математичної моделі процесу змінення ціни. Цей етап передбачає створення ланцюга Маркова, який відображуватиме ймовірнісний процес змінення цін фінансових активів. На цьому етапі необхідно виконати наступні дії:

– визначити кількість станів та побудувати їх;

– визначити ймовірності станів;

– скласти матрицю ймовірностей переходів станів.

Етап 3. Розв’язання задачі про оптимальну зупинку в управлінні інвестиційним портфелем. На даному етапі виконується постановка та розв’язання задачі пошуку оптимальної стратегії інвестора. Для цього необхідно виконати наступні дії:

– задати кількість кроків планування, встановити значення прибутків від продажу цінних паперів та комісію за їх утримання, вказати коефіцієнт дисконтування майбутніх прибутків;

– реалізувати метод динамічного програмування для скінченного горизонту або ітераційну процедуру для нескінченного горизонту для побудови стратегії управління;

Етап 4. Аналіз отриманих результатів. Підсумковим етапом є виведення звітів та рекомендацій для інвестора. На цьому етапі необхідно виконати наступні дії:

– сформувати рекомендації щодо оптимальної поведінки інвестора на кожному кроці стосовно утримання або реалізації фінансових активів;

– вивести очікувані значення прибутків інвестора при дотриманні ним оптимальної стратегії.

Виконання вказаних етапів дозволяє перейти від постановки задачі до практичного застосування оптимальної стратегії управління інвестиційним портфелем.

3.3 Опис програми

Програмна реалізація наведених вище етапів виконана за допомогою мови програмування Wolfram Mathematica. Створений програмний продукт забезпечує повний цикл аналізу: від завантаження та обробки даних та побудови марковського ланцюга, розв’язання задачі про оптимальну зупинку та генерацію звітів. Наведені етапи реалізовані у декількох модулях.

Модуль завантаження та обробки даних включає реалізацію наступних функцій: завантаження історичних даних про ціни на цінний папір із зовнішніх джерел, таких як CSV файли, бази даних, або API; очищення та передобробку даних, зокрема, видалення пропущених значень, перетворення даних за необхідності, розрахунок приростів цін для побудови ланцюга Маркова. Оброблені дані зберігаються для можливості їхнього подальшого використання.

Модуль побудови ланцюга Маркова є підготовчим для розв’язання поставленої задачі та реалізує наступні дії: автоматичне або ручне визначення інтервалів цін на основі історичних даних для цінного паперу; статистичні розрахунки ймовірностей переходу між інтервалами цін; графічне подання отриманих матриць у вигляді теплової карти та графа станів, що спрощує аналіз моделі.

Ключовим є модуль розв'язання задачі про оптимальну зупинку. У цьому модулі реалізовані функції введення чи розрахунку значень виграшу та штрафу. Головний блок модуля реалізує ітераційну процедуру пошуку оптимальної політики інвестора для кожного стану на основі визначення оптимальних значень функції прибутку. Підсумком обчислень є звіт із рекомендаціями інвестору про оптимальні дії: таблиця оптимальних дій для кожного стану та оптимальна точка виходу для поточного стану системи, а також прогнозоване значення прибутку. Можливість варіювання вхідних параметрів на цьому етапі дозволяє інвестору перевіряти чутливість моделі та аналізувати вплив зміни параметрів (наприклад, рівнів цін або множника, що дисконтує) на оптимальне рішення.

Програма має зручний та зрозумілий інтерфейс та гнучкі налаштування. Користувач може змінювати параметри, такі як кількість інтервалів для цін, значення штрафів та прибутків, коефіцієнт дисконтування. Автоматизація складних аналітичних розрахунків та генерація звітів з результатами розв'язання дозволяє користувачеві зосередитись на аналізі отриманих стратегій. Для полегшення сприйняття інформації програма передбачає можливість побудови графіків історичних цін та оптимальних точок зупинки.

Цільовою аудиторією для використання програми можуть бути інвестори, що управляють активами, чи компанії, що спеціалізуються на управлінні інвестиціями, аналітики, а також студенти та дослідники, які вивчають методи оптимального управління. Програма може бути корисною як початківцям, так і досвідченим дослідникам за рахунок автоматизації складних процесів аналізу та прийняття оптимальних рішень на основі математичних моделей.

Використання розробленого програмного продукту дозволяє підвищити ефективність ухвалення рішень інвестором, оптимізуючи час виходу з активу для максимізації прибутковості.

Висновки за розділом 3

У даному розділі було описано програмну реалізацію методу пошуку оптимальних стратегій управління інвестиційним портфелем, створену за допомогою мови програмування Wolfram Mathematica.

Було зроблено огляд Wolfram Mathematica з точки зору можливостей її застосування для статистичного аналізу економічних даних та реалізації математичних методів оптимального управління.

Наведено етапи розв’язання поставленої у роботі задачі, на основі яких розроблено програмний продукт. Реалізація всіх етапів у вигляді єдиної програми має важливе значення, оскільки це забезпечує автоматичне розв’язання поставленої задачі – від збору та попередньої обробки даних до формування рекомендаційних звітів.

Виконано опис програмного продукту. Детально розглянуто основні модулі, що містить програма, та функції, що вони реалізують. Зазначено особливості програмного продукту, які водночас є його перевагами. Виділено цільову аудиторію. Розроблений програмний продукт може бути корисним у сфері фінансового аналізу як додатковий інструмент прийняття ефективних інвестиційних рішень.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Для обчислювального експерименту використовуватимемо історичні значення цін на фінансовий актив за 2020 рік. Набір даних містить 246 значень. Часовий ряд, що відображує динаміку цін на заданий актив протягом року, наведений на рисунку 4.1.

Рисунок 4.1 – Динаміка ціни на фінансовий актив

Датасет, що використовується, не містить пропущених або некоректних значень, тому додаткові заходи з його попередньої обробки не виконувались.

Задачею обчислювальних експериментів є побудова оптимальної стратегії управління, яка визначає оптимальний момент продажу активу. Розглянемо цю задачу для різних початкових умов.

Першим кроком розв'язання поставленої задачі є побудова матриці перехідних ймовірностей змінення ціни. Використаємо піднабір цін, що відповідає часовому вікну $[229; 246]$. Розмір вікна беремо не дуже великим, щоб фіксувати тенденції, відповідні даному часовому проміжку. Значення ціни на цьому проміжку потрапляють у діапазон $[3,33; 3,62]$ (рисунок 4.2). Середнє значення ціни на цьому проміжку складає 3,44944, а виправлена вибіркова дисперсія – 0,00620556.

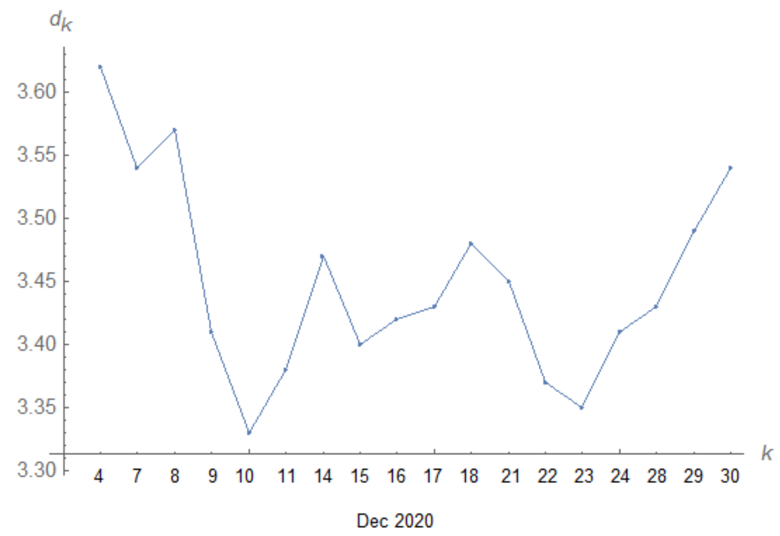


Рисунок 4.2 – Динаміка ціни на фінансовий актив у часовому вікні $[229; 246]$

Виділимо 3 стани системи:

– S_1 – значення ціни, які потрапляють у діапазон $(3,213; 3,425]$;

– S_2 – значення ціни, які потрапляють у діапазон $(3,425; 3,525]$;

– S_3 – – значення ціни, які потрапляють у діапазон $(3,525; 3,686)$.

У таблиці 4.1 наведена інформація, яку будемо далі використовувати для побудови матриці ймовірностей.

У таблиці 4.2 наведені оцінки ймовірностей влучення ціни у кожен з визначених проміжків. Тут n_i – кількість днів, у які ціна відносилась до стану S_i, а p_i – оцінка ймовірності цієї ситуації.

Таблиця 4.1 – Розподіл цін по станам

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
d_k	3,62	3,54	3,57	3,41	3,33	3,38	3,47	3,4	3,42	3,43	3,48	3,45	3,37	3,35	3,41	3,43	3,49	3,54
S_i	S_3	S_3	S_3	S_1	S_1	S_1	S_2	S_1	S_1	S_2	S_2	S_2	S_1	S_1	S_1	S_2	S_2	S_3

Таблиця 4.2 – Оцінки ймовірностей станів

Стан	n_i	p_i	d_k
$S_1:\ (3,213;3,425]$	8	0,444444	3,41; 3,33; 3,38; 3,4; 3,42; 3,37; 3,35; 3,41
$S_2:\ (3,425;3,525]$	6	0,333333	3,47; 3,43; 3,48; 3,45; 3,43; 3,49
$S_3:\ (3,525;3,686)$	4	0,222223	3,62; 3,54; 3,57; 3,54

Матриця перехідних ймовірностей, побудована за таблицею 4.1, має вигляд:

$$P=\begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 & 0 \\ 0,333 & 0,5 & 0,167 \\ 0,333 & 0 & 0,667 \end{pmatrix}.$$

Вхідними даними для роботи алгоритму пошуку оптимальних управлінь є:

– кількість активів $n_p=10$;

– очікуваний прибуток $R_i=\overline{D}_i-c_R$ від реалізації активів за умови їх перебування у стані S_i, де $\overline{D}_i$ – середнє значення ціни, що відповідає S_i, c_R – комісійні за проведення операції продажу (0,5%);

– витрати C_i за продовження утримання портфеля, встановлені виходячи з розрахунку 1% від середньої ціни активів на рік.

Результати побудови оптимальної стратегії управління портфелем на наступні 5 днів ($N=5$) та на довгий проміжок часу наведені у таблицях 4.3 та 4.4. У цих таблицях позначка «1» означає рекомендацію утримувати портфель, а позначка «0» відповідає рекомендації його продати.

Таблиця 4.3 – Оптимальна стратегія поведінки інвестора на 5 днів

Стан / Етап	$(3{,}213; 3{,}425]$	$(3{,}425; 3{,}525]$	$(3{,}525; 3{,}686)$
1	1	1	0
2	1	1	0
3	1	1	0
4	1	0	0
5	1	0	0

Таблиця 4.4 – Довготривала оптимальна стаціонарна стратегія

$(3{,}213; 3{,}425]$	$(3{,}425; 3{,}525]$	$(3{,}525; 3{,}686)$
1	1	0

Результати таблиці 4.3 свідчать про те, що за умови не дуже високих значень ціни інвестору рекомендовано продовжувати утримувати портфель, сподіваючись на її підвищення, а за умови високої ціни активи варто продавати, отримуючи високі прибутки від продажу. Бачимо, що з часом стратегія змінюється, тобто якщо на перших трьох етапах інвестору рекомендується утримувати портфель за умови низьких та середніх значень ціни, в очікуванні високих значень, то третього етапу, тобто при наближення до кінця періоду планування, очікувати підвищення доцільно лише за умови низького рівня ціни, а продаж виконувати не тільки при високому, а й при середньому значенні ціни.

Якщо інвестор планує використовувати побудовану матрицю перехідних ймовірностей для визначення стратегії у довготривалій перспективі, то оптимальною рекомендацією йому буде завжди утримувати портфель за умови низьких та середніх значень ціни, в очікуванні високих значень, а за досягнення високих значень – реалізовувати активи. Однак дана стратегія не може вважатись як надійна, тому що ціна є динамічною і далекій перспективі орієнтуватись на побудовану матрицю перехідних ймовірностей буде некоректно.

Результати аналогічних розрахунків для ситуації, коли модель містить 5 станів, наведені у таблицях 4.5 – 4.6. Матриця перехідних ймовірностей для даної системи має вигляд:

$$P_{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,375 & 0,375 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 4.5 – Оптимальна стратегія поведінки на 5 днів

Етап \ Стан	(3,213; 3,37]	(3,37; 3,44]	(3,44; 3,51]	(3,51; 3,58]	(3,58; 3,686)
1	1	1	1	0	0
2	1	1	1	0	0
3	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	0
5	1	1	0	0	0

Таблиця 4.6 – Довготривала оптимальна стаціонарна стратегія

(3,213; 3,37]	(3,37; 3,44]	(3,44; 3,51]	(3,51; 3,58]	(3,58; 3,686)
1	1	1	0	0

Результати розрахунків для ситуації, коли модель містить 6 станів, наведені у таблицях 4.7 – 4.8. Матриця перехідних ймовірностей для даної системи має вигляд:

$$P_{(6)} = \begin{pmatrix} 0,333 & 0,667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 4.7 – Оптимальна стратегія поведінки на 5 днів

Стан / Етап	(3,213; 3,375]	(3,375; 3,425]	(3,425; 3,475]	(3,475; 3,525]	(3,525; 3,575]	(3,575; 3,686)
1	1	1	1	1	0	0
2	1	1	1	1	0	0
3	1	1	1	1	0	0
4	1	1	1	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0

Таблиця 4.8 – Довготривала оптимальна стаціонарна стратегія

(3,213; 3,375]	(3,375; 3,425]	(3,425; 3,475]	(3,475; 3,525]	(3,525; 3,575]	(3,575; 3,686)
1	1	1	1	0	0

З таблиць 4.3, 4.5, 4.7 можна зробити висновок, що збільшення кількості станів дозволяє уточнювати межове значення ціни, за якої інвестору слід відмовлятись від утримання активів та продавати їх. Порівняння цього межового значення для трьох розглянутих вище ситуацій наведено у таблиці 4.9.

Таблиця 4.9 – Точка змінення рішення інвестора

Етап	Кількість станів		
	3	5	6
1	3,525	3,51	3,525
2	3,525	3,51	3,525
3	3,525	3,44	3,525
4	3,425	3,44	3,475
5	3,425	3,44	3,425

Ця таблиця демонструє, що при наближенні до останнього етапу межове значення ціни, після якого актив потрібно продавати, знижується. Це є рекомендацією інвестору не чекати високого підйому ціни, оскільки за ті етапи, що залишились, ціна може не встигнути досягти високих значень.

Виконаємо аналогічні розрахунки для часового вікна $[150;167]$. Значення ціни на цьому проміжку потрапляють у діапазон $[3,43;\,3,62]$ (рисунок 4.3).

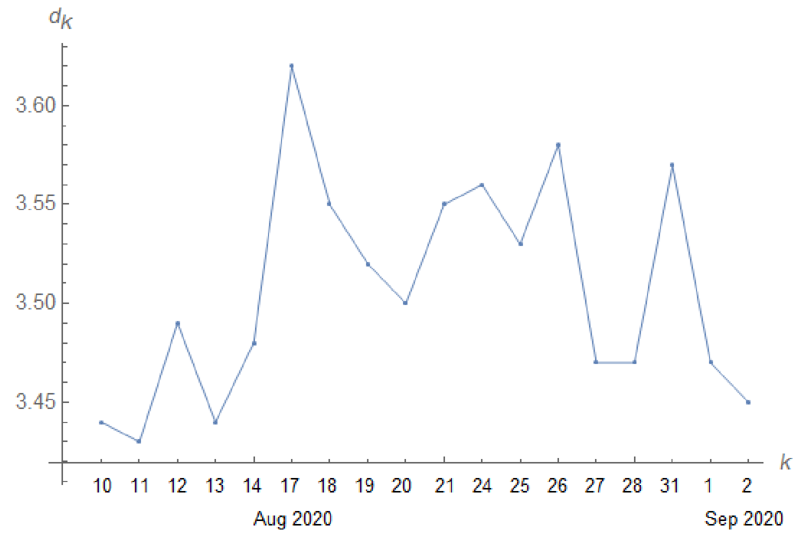


Рисунок 4.3 – Динаміка ціни на фінансовий актив у часовому вікні $[3,43;\,3,62]$

Результати розрахунків для ситуації, коли модель містить 3 стани, наведені у таблицях 4.10 –4.11. Матриця перехідних ймовірностей для даної системи має вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 0,571 & 0,143 & 0,286 \\ 0,167 & 0,5 & 0,333 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 4.10 – Оптимальна стратегія поведінки на 5 днів

Стан / Етап	$(3,340;\,3,49]$	$(3,49;\,3,56]$	$(3,56;\,3,674)$
1	1	1	0
2	1	1	0
3	1	1	0
4	1	1	0
5	1	1	0

Таблиця 4.11 – Довготривала оптимальна стаціонарна стратегія

$(3,340; 3,49]$	$(3,49; 3,56]$	$(3,56; 3,674)$
1	1	0

Результати розрахунків для ситуації, коли модель містить 5 станів, наведені у таблицях 4.12 –4.13. Матриця перехідних ймовірностей для даної системи має вигляд:

$$P_{(5)} = \begin{pmatrix} 0,333 & 0,667 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,333 & 0,667 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 4.12 – Оптимальна стратегія поведінки на 5 днів

Стан / Етап	$(3,340; 3,45]$	$(3,45; 3,5]$	$(3,5; 3,55]$	$(3,55; 3,60]$	$(3,60; 3,674)$
1	1	1	1	0	0
2	1	1	1	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	1	1	0	0
5	1	1	1	0	0

Таблиця 4.13 – Довготривала оптимальна стаціонарна стратегія

$(3,340; 3,45]$	$(3,45; 3,5]$	$(3,5; 3,55]$	$(3,55; 3,60]$	$(3,60; 3,674)$
1	1	1	1	0

Результати розрахунків для ситуації, коли модель містить 6 станів, наведені у таблицях 4.14 – 4.15. Матриця перехідних ймовірностей для даної системи має вигляд:

$$P_{(6)} = \begin{pmatrix} 0,334 & 0,333 & 0,333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0,334 & 0 & 0,333 & 0,333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 4.14 – Оптимальна стратегія поведінки на 5 днів

Стан / Етап	(3,340; 3,445]	(3,445; 3,485]	(3,485; 3,525]	(3,525; 3,565]	(3,565; 3,605]	(3,605; 3,674)
1	1	1	1	1	1	0
2	1	1	1	1	1	0
3	1	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0

Таблиця 4.15 – Довготривала оптимальна стаціонарна стратегія

(3,213; 3,375]	(3,375; 3,425]	(3,425; 3,475]	(3,475; 3,525]	(3,525; 3,575]	(3,575; 3,686)
1	1	1	1	1	0

У таблиці 4.16 наведено порівняння граничного значення ціни, за якої інвестору слід відмовлятись від утримання активів та продавати їх (за даними таблиць 4.10, 4.12, 4.14).

Таблиця 4.16 – Точка змінення рішення інвестора

Етап	Кількість станів		
	3	5	6
1	3,56	3,55	3,605
2	3,56	3,55	3,605
3	3,56	3,55	3,525
4	3,56	3,55	3,485
5	3,56	3,5	3,485

Порівнюючи оптимальні стратегії, обчислені для різних часових вікон, можна зробити висновок, що результати змінюються, оскільки ймовірнісна поведінка цін відрізняється. Виходячи з цього можна зробити висновок, що при використанні історичних даних дуже важливо визначати такий діапазон значень, який охоплюватиме як звичайні зміни на ринку, так і рідкісні екстремальні події, але при цьому не буде надмірно великим і адекватно відображав поточну ситуацію у зміненні цін. Розширення чи звуження часового вікна може дещо змінити рекомендації, тому потрібно уважно обирати часовий діапазон, який буде використовуватись для досліджень. При цьому необхідно враховувати деякий запас реального діапазону цін, щоб уникнути ситуацій, коли модель виходить за межі передбаченого інтервалу. Важливо також враховувати сезонні чи циклічні ефекти на ринках, якщо такі є, вибираючи кількість етапів рішення та часове вікно для побудови моделі.

Крім того, увагу варто приділяти вибору кількості станів, які виділяться у системі. Якщо ринок характеризується високою волатильністю, кількість станів, тобто довжину часткових проміжків ціни, слід збільшити. Для стабільних ринків можна використовувати менше станів. Дрібніші проміжки підвищуватимуть якість прогнозів, але при цьому збільшиться розмір матриці та обчислювальна складність.

Змінення вхідних параметрів, зокрема значення комісійних витрат, горизонту планування дозволить розробляти стратегії, що будуть адаптовані під конкретних інвесторів чи компанії.

Також слід зазначити, що оскільки фінансовий ринок є досить динамічним, то для підвищення якості стратегій слід важливо регулярно оновлювати матрицю перехідних ймовірностей з урахуванням нових історичних даних та перевіряти узгодження отриманих результатів за допомогою інших математичних методів фінансового та інвестиційного аналізу.

Висновки за розділом 4

У даному розділі було проведено низку обчислювальних експериментів з визначення оптимальної стратегії поведінки інвестора. Першим кроком у цих експериментах стала побудова матриці перехідних ймовірностей, яка моделює динаміку цін на фінансовому ринку на визначений актив на основі історичних даних його ціни за певний проміжок часу. Результатом обчислювальних експериментів стали рекомендації щодо оптимальних дій інвестора щодо продовження утримання або реалізації фінансового активу, виконані для різних проміжків часу.

Було проведено аналіз отриманих результатів та виділено фактори, які визначають структуру стратегії. У рамках експериментів при фіксованих вхідних параметрах до таких факторів було віднесено кількість станів моделі, довжину часткових проміжків ціни, розташування та довжину часового вікна, а також безпосередньо саму структуру часового ряду.

Результати аналізу свідчать, що розглянутий у роботі метод може використовуватись на практиці.

ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота була присвячена розв'язанню задачі пошуку оптимальних стратегій управління інвестиційним портфелем. Визначення способів управління інвестиційним портфелем, побудова стратегій поведінки інвестора на фінансовому ринку з метою максимізації прибутків представляє великий інтерес з практичної точки зору.

У ході проведення досліджень було виконано системний аналіз проблеми управління інвестиційним портфелем, побудовані морфологічна, функціональна та інформаційна моделі, за допомогою методу аналізу ієрархій серед декількох методів, які можуть бути використані для розв'язання поставленої задачі обґрунтовано зроблено вибір методу оптимального управління.

Використання математичних методів дозволяє здійснювати наукове обґрунтування вибору тих чи інших інвестиційних рішень, оскільки відповідні математичні моделі враховують стохастичну природу фінансових ринків.

Для розв'язання досліджуваної задачі було розроблено програмний продукт, який дозволив автоматизувати обробку часових даних, реалізувати ітераційні розрахунки та отримувати рекомендації щодо поведінки інвестора на фінансовому ринку у зручному вигляді. Розроблений програмний продукт може бути корисним у сфері фінансового аналізу як додатковий інструмент прийняття ефективних інвестиційних рішень.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Sleptsov, O. Optimal management of an investment portfolio in conditions of uncertainty. *III International Scientific and Practical Conference «LEARNING & TEACHING in the World after the War»*, Kharkiv 2024. P. 242.

2. Сорока К. О. Основи теорії систем і системного аналізу. Харків : ХНАМГ, 2004. 115 с.

3. Катренко А. В. Системний аналіз. Львів : Новий світ – 2000, 2011. 396 с.

4. Катренко А. В., Пасічник В. В., Пасько В. П. Теорія прийняття рішень. Київ : Видавнича група BHV, 2009. 448 с.

5. Сеньо П.С. Випадкові процеси. Львів : Компакт-ЛВ, 2006. 288 с.

6. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Теорія ймовірностей та теорія випадкових процесів. Київ : КНЕУ, 2009. 378 с.

7. Карташов М.В. Імовірність, процеси, статистика. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. 494 с.

8. Feinberg Eu., Shwartz A. Handbook of Markov Decision Processes: Methods and Applications. Springer; 2002. 573 p.

9. Howard, R.A.. Dynamic Programming and Markov Processes. Technology Press and Wiley, New York. 1972. 136 p.

10. Hamdy A. Taha. Operations Research: An Introduction. Pearson, 2017. 848 p.

11. Sutton R., Barto A. Reinforcement Learning: An Introduction. Bradford Books. 2018. 552 p.

12. Sonin I. The Optimal Stopping of Markov Chain and Recursive Solution of Poisson and Bellman Equations. *From Stochastic Calculus to Mathematical Finance* / Eds. Y. Kabanov, R. Liptser, J. Stoyanov. Heidelberg : Springer Berlin, 2006. P. 609-621.

13. Ferguson Th. S. Optimal Stopping and Applications. URL: http://www.math.ucla.edu/~tom/Stopping/Contents.html

14. Chow, Y.S.; Robbins, H.; Siegmund, D. Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping. Boston : Houghton Mifflin. 1971.

15. Zhang D., Zhang X. Study on Forecasting the Stock Market Trend Based on Stochastic Analysis Method. *International Journal of Business and Management.* 2009, Vol. 4, No. 6. P. 163 – 170.

16. Lakshmi G, Jyothi Manoj. Application of Markov Process for Prediction of Stock Market Performance. *International Journal of Recent Technology and Engineering*. 2020, Vol. 8, Issue 6. PP. 1516 – 1519.