УДК 62-50

А.С. Назаров, Харьков, Украина

ВЫБОР МОДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ФОРМИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ МОМЕНТОВ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗВОРОТА ИСЗ

The rotation control problem of an elastic spacecraft is considered. The solution of various rotation control problems of a spacecraft constructed on a program assigned trajectory of reorientation is offered. The kinematic quaternion model of a spherical type is represented. With the help of that model at the expense of support function choice as polynomials is possible to decide any rotation control problem of a spacecraft. The conducted numerical modelling testifies to efficiency of the given approach.

Рассматривается задача терминального управления вращением моделируемого упругого искусственного спутника Земли (ИСЗ). Кинематика модели вращения ИСЗ описывается кинематическим уравнением [1]

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\left(\Lambda \circ \overline{\omega}\right); \tag{1}$$

где Λ - кватернион ориентации ИСЗ; $\overline{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения ИСЗ в проекциях на связанные с ним оси; $\circ$ - знак кватернионного умножения.

Под модели вращения ИСЗ понимается вращение упругого объекта, уравнение которого имеет вид [2]

$$\dot{\overline{K}} + \left[\overline{\omega} \times \overline{K}\right] = \overline{M}, \tag{2}$$

где $\overline{K} = J \cdot \overline{\omega} + A \cdot \overline{H}$ - вектор суммарного кинетического момента и силового гироскопического комплекса (СГК); $\overline{M} = \overline{M}_{у} + \overline{M}_{в}$ - вектор суммарного внешнего момента ИСЗ; $\overline{M}_{у} = \overline{M}_{Г} + \overline{M}_{ИМ} + \overline{M}_{РД}$ - вектор управляющих моментов; $\overline{M}_{в} = \overline{M}_{Д} + \overline{M}_{см}$ - вектор суммарного возмущающего момента ИСЗ.

Здесь приняты следующие обозначения:

$\overline{M}_{Г} = -L(\beta) \cdot \dot{\overline{H}} - (\overline{\omega} \times \overline{H})$ - момент, создаваемый СГК;

$\overline{M}_{ИМ} = \dot{\overline{h}} - \left(\overline{\omega} \times \overline{h}\right)$ - момент, создаваемый инерционными маховиками (ИМ);

$\overline{M}_{РД}$ - момент, создаваемый реактивными двигателями (РД);

J - матрица моментов инерции ИСЗ с упругими элементами, находящимися в недеформированном состоянии;

A - матрица преобразования системы координат, связанной с СГК, к системе базовых осей, связанных с ИСЗ;

$\overline{H}$ - суммарный кинетический момент СГК, определяемый в соответствии с законом

$$\dot{\overline{H}} = L(\beta) \cdot \dot{\overline{\beta}}, \qquad (3)$$

где $\overline{\beta}$ - вектор угловых скоростей прецессии гиродинов; $L(\beta)$ - прямоугольная матрица Грамма, которая зависит от типа компоновки гиродинов в СГК;

$\overline{M}_{Д} = m_{Д} \cdot \left(\dot{R}\overline{\omega} + R\dot{\overline{\omega}} + \left(\overline{\omega} \times R\overline{\omega}\right)\right) - \frac{d}{dt} J_{Д}\overline{\omega} - J_{Д}\dot{\overline{\omega}} - \left(\overline{\omega} \times J_{Д}\overline{\omega}\right)$ - момент, действующий на корпус ИСЗ со стороны упругих элементов и обусловленный их относительным движением; $m_{Д}$ - масса упругих элементов; $R = Eu_c^2 - \overline{u}_c \cdot \overline{u}_c$ - симметричная матрица;

$\overline{u}_c = \overline{OC}$ - радиус-вектор, соединяющий полюс связанной системы осей O с подвижным центром инерции C; E - единичная матрица;

$J_{Д} = \int m_{Д} \cdot \left(2E\overline{\rho} \cdot \overline{u} - \overline{\rho} \cdot \overline{u} - \overline{u} \cdot \overline{\rho} - \overline{u} \cdot \overline{u}\right) dm$ - переменная матрица, дополняющая матрицу моментов инерции недеформированных упругих элементов при их относительном движении; $\overline{u}$ - вектор относительных упругих перемещений; $\overline{\rho}$ - радиус-вектор точек деформируемой части конструкции ИСЗ;

$\overline{M}_{СМ} = m_{Т} \cdot \left(\dot{R}\overline{\omega} + R\dot{\overline{\omega}} + \left(\overline{\omega} \times R\overline{\omega}\right)\right)$ - возмущающий момент, связанный со смещением полюса O относительно центра инерции; $m_{Т}$ - масса твердой части ИСЗ.

Задача управления вращением упругого ИСЗ состоит в том, что требуется за конечный интервал времени T с помощью ограниченных по величине управлений $\dot{\beta}_i,\ i = \overline{1,4}\quad \left(\left|\dot{\beta}_i\right| \le \dot{\beta}_m\right)$ обеспечить в соответствии с уравнениями (1)-(3) перевод вектора состояния $\{\Lambda, \overline{\omega}\}$ из начального положения в требуемое конечное с заданной точностью (в общем случае при ненулевых начальной и конечной угловой скорости).

На практике применяют различные режимы управляемого вращения ИСЗ. В данных режимах управление, как правило, осуществляется по-разному. Например, в [3] для построения закона управления вращением ИСЗ в качестве управления выступает вектор абсолютной угловой скорости, который в общем случае не пригоден.

В связи с этим предлагается алгоритм решения различных задач управления вращением ИСЗ, реализуемый по программно задаваемой траектории вращения.

При моделировании программной траектории применяется кватернионная кинематическая модель сферического типа [4]

$$\Lambda_M(t) = \Lambda_1(t) \circ \Lambda_2(t) \circ \Lambda_3(t), \tag{4}$$

где $\Lambda_i(t) = \cos\left(\frac{\psi_i(t)}{2}\right) + \bar{b}_i \cdot \sin\left(\frac{\psi_i(t)}{2}\right), i = \overline{1,3}$;

$$\bar{b}_3 = \frac{\bar{\omega}_K}{|\bar{\omega}_K|};\ \bar{b}_2 = \frac{\left(\Lambda_O \circ \bar{b}_3 \circ \tilde{\Lambda}_O\right) \times \bar{b}_3}{\left|\left(\Lambda_O \circ \bar{b}_3 \circ \tilde{\Lambda}_O\right) \times \bar{b}_3\right|};\ \bar{b}_1 = \bar{b}_3 \times \bar{b}_2 .$$

Здесь $\bar{b}_i$, $i = \overline{1,3}$ - единичные векторы, связанные с краевыми условиями задачи управления; $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,3}$ - некоторые опорные функции, играющие здесь роль модельных параметров. Выбирая их определеным образом, необходимо обеспечить выполнение граничных условий различных задач управления.

Данной кинематической модели соответствуют модельная угловая скорость, модельное угловое ускорение и программный управляющий момент

$$\bar{\omega}_M = 2 \cdot \left(\tilde{\Lambda}_M \circ \dot{\Lambda}_M\right); \tag{5}$$

$$\dot{\bar{\omega}}_M = 2 \cdot \left(\dot{\tilde{\Lambda}}_M \circ \dot{\Lambda}_M + \tilde{\Lambda}_M \circ \ddot{\Lambda}_M\right); \tag{6}$$

$$\bar{M}_M = I\dot{\bar{\omega}}_M + \left[\bar{\omega}_M \times I\bar{\omega}_M\right], \tag{7}$$

где $I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$ - кососимметрическая матрица моментов инерции ИСЗ, т. е.

$I_{xy} = I_{yx}; I_{xz} = I_{zx}; I_{yz} = I_{zy}$.

Цель данной разработки заключается в формировании алгоритма решения задачи управляемого вращения на основе кинематической модели (4), (5) путем выбора опорных функций.

К терминальным условиям задачи управления вращением относятся значения вектора состояния $\{\Lambda, \bar{\omega}\}$ в начальный и конечный моменты времени. Исходя из этого можно выделить следующие типовые режимы управляемого вращения ИСЗ: трехосная и одноосная переориентация ИСЗ, раскрутка ИСЗ, гашение угловой скорости ИСЗ.

В качестве основного режима управляемого вращения ИСЗ предлагается использовать режим трехосной переориентации ИСЗ, терминальными условиями для которого являются конечные угловая скорость $\bar{\omega}(T) = \bar{\omega}_K$ и кватернион ориентации $\Lambda(T) = \{1,0,0,0\}$. Под трехосной переориентацией ИСЗ понимается конечное угловое положение связанной системы координат относительно инерциальной.

С учетом векторов (6) из краевых условий задачи управления вращением ИСЗ получены следующие выражения для значений опорных функций $\bar{\psi}(t)$ и их производных $\dot{\bar{\psi}}(t)$ в начальный и конечный моменты времени:

$$\psi_{3O} = 2\operatorname{arctg}\frac{\left(\bar{\lambda}_O, \bar{b}_3\right)}{\lambda_O}; \quad \psi_{1O} = 0;$$

$$\psi_{2O} = 2\arcsin\left(\bar{\lambda}_O, \bar{b}''_2\right), \text{ где } \bar{b}''_2 = \sin\left(\psi_{3O}/2\right)\bar{b}_2 - \cos\left(\psi_{3O}/2\right)\bar{b}_1;$$

$$\dot{\psi}_{1O} = \frac{\left(\bar{\omega}_O, \bar{b}'_1\right)}{\cos\psi_{2O}}, \text{ где } \bar{b}'_1 = \sin\psi_{3O}\bar{b}_2 + \cos\psi_{3O}\bar{b}_1; \tag{8}$$

$$\dot{\psi}_{2O} = (\bar{\omega}_O, \bar{b}'_2), \text{ где } \bar{b}'_2 = \sin\psi_{3O}\bar{b}_2 - \cos\psi_{3O}\bar{b}_1;$$

$$\dot{\psi}_{3O} = \left(\bar{\omega}_O, \bar{b}_3\right) + \sin\psi_{2O}\cdot\dot{\psi}_{1O}.$$

$$\psi_{iT} = 0\left(i = \overline{1,3}\right); \quad \dot{\psi}_{1T} = 0; \quad \dot{\psi}_{2T} = 0; \quad \dot{\psi}_{3T} = \left|\bar{\omega}_K\right|. \tag{9}$$

Следует отметить, что для всех режимов управляемого вращения ИСЗ краевые значения $\bar{\psi}(0), \dot{\bar{\psi}}(0)$ и $\dot{\bar{\psi}}(T)$ являются одинаковыми и определяются выражениями (8) и (9), а отличаются лишь величины $\bar{\psi}(T)$.

Опорные функции $\psi_i(t)$ выбираются в виде полиномов времени, порядок которых определятся количеством краевых условий и связан с типом режима управления вращением ИСЗ. В случае трехосной переориентации ИСЗ опорные функции $\bar{\psi}(t)$ и их производные $\dot{\bar{\psi}}(t), \ddot{\bar{\psi}}(t)$ принимают следующий вид

$$\begin{aligned}
&\psi_i(t) = a_{0i} + a_{1i}t + a_{2i}t^2 + a_{3i}t^3; \\
&\dot{\psi}_i(t) = a_{1i} + 2a_{2i}t + 3a_{3i}t^2; \\
&\ddot{\psi}_i(t) = 2a_{2i} + 6a_{3i}t, i = \overline{1,3}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Коэффициенты $a_{ki}\left(k = \overline{0,3}; i = \overline{1,3}\right)$ полиномиальных опорных функций (10) обеспечивают выполнение краевых условий задачи трехосной переориентации ИСЗ и, основываясь на краевых значениях опорных функций и их производных (см. формулы (8) и (9)), определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
&a_{0i} = \psi_{iO}; a_{2i} = \frac{3 \cdot [\psi_{iT} - \psi_{iO}] - T \cdot [2\dot{\psi}_{iO} + \dot{\psi}_{iT}]}{T^2}; \\
&a_{1i} = \dot{\psi}_{iO}; a_{3i} = \frac{2 \cdot [\psi_{iO} - \psi_{iT}] + T \cdot [\dot{\psi}_{iO} + \dot{\psi}_{iT}]}{T^3}, i = \overline{1,3}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Полученный алгоритм решения задачи управляемого вращения ИСЗ может быть реализован и для других режимов управления вращением упругого ИСЗ. Решение задачи управления вращением ИСЗ получен в разомкнутой форме. Для его замыкания рекомендуется применять текущую информацию о векторе состояния. При этом полученные соотношения для фиксированного начального значения $\{\Lambda_0, \bar{\omega}_0\}$ остаются неизменными, а алгоритм формирования управляющего момента $\overline{M}$ существенно упрощается.

Таким образом, применение кинематической модели (4), (5) путем выбора опорных функций (10) позволяет найти универсальное решение любой задачи управления вращением КА. Проведенное на ряде тестовых задач моделирование свидетельствует об эффективности данного решения.

Список литературы: 1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. - М.: Наука, 1973. - 320 с. 2. Закржевский А.Е., Хорошилов В.С. Программные движения деформируемой конструкции с пространственной гиросиловой системой управления // Прикл. мех. - Киев, 1989. Т. 25, № 11. - С. 107-112. 3. Челноков Ю.Н. Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: уравнения движения, постановка задач, программное движение и управление // Изв. РАН. МТТ.- 1993.- № 4. - С. 7-14. 4. Фролов Ю.А., Успенский В.Б. Построение траектории разворота твердого тела // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. - 1993.- Т. 17, № 12. - С. 11-13.

Поступила в редколегию 14.03.01
Представлен докт. техн. наук Голоскоковым Е.Г.